

Covariância cruzada experimental aplicada em séries temporais de economia e finanças

João Bosco Dias Marques¹
Osvair Vidal Trevisan²
Armando Zaupa Remacre³

Resumo: O objetivo deste artigo é mostrar a aplicação da covariância cruzada e do variograma cruzado experimentais, conforme definidos na Geoestatística, a séries temporais de ativos financeiros e de variáveis econômicas. As amostras dos ativos são os preços de fechamento da BM&FBOVESPA e os índices econômicos são de instituições governamentais. Nos exemplos indicados foi considerado *a priori* que as séries são estacionárias em suas respectivas frequências de amostragem. Os gráficos gerados com a função da covariância cruzada experimental são acompanhados e analisados com gráficos de regressão linear e com histogramas. A metodologia indicada neste artigo pode ser utilizada como complemento nas análises de modelos de precificação de ativos financeiros (CAPM) e de processos estocásticos (ARIMA, GARCH etc.). A conclusão indica que o tempo de defasagem determinado pela aplicação da variografia cruzada pode ser utilizado em estratégias de compra e venda de títulos financeiros, análises de correlação entre variáveis econométricas e outras aplicações.

Palavras-chave: Covariância cruzada. Variografia cruzada. Precificação de ativos. Processos estocásticos.

Experimental cross-covariance applied in time series of economics and finance

Abstract: The objective of this paper is to show the application of experimental cross-covariance and cross-variogram, as defined in Geostatistics, to time series of financial assets and economic variables. The samples used in this work are the closing prices of financial assets which are traded at BM&FBOVESPA and the economic indices published by government institutions. In the cases considered, the averages in the series were considered as stationary in their respective sampling frequency. The data produced by the experimental cross-covariance function are compared and analyzed through linear regression and histograms. The procedure can be used to supplement the analysis by usual models of financial asset pricing (CAPM) and by stochastic methods (ARIMA, GARCH and derivatives). The results lead to conclude that the delay determined by the procedure including the crossed variography can be used in the decision process of purchase/sale of financial assets, in the analyses of correlation between economic variables among other applications.

Keywords: Cross-covariance. Crossed variography. Asset pricing. Stochastic process.

Classificação JEL: C65, C58, G12, C15

Introdução

As ferramentas da Geoestatística, como ramo da Matemática aplicada, têm origem na indústria de mineração da África do Sul com os trabalhos iniciais de Daniel G. Krige⁴, apoiado pelo estatístico H. S. Sichel no início da década de 1960. A técnica, inicialmente desenvolvida por

1. Engenheiro de Petróleo da PETROBRAS e Mestre em Engenharia de Petróleo pela UNICAMP. E-mail: jmarques@dep.fem.unicamp.br – Departamento de Engenharia de Petróleo da UNICAMP.

2. Professor Titular da UNICAMP. E-mail: trevisan@dep.fem.unicamp.br – Departamento de Engenharia de Petróleo da UNICAMP.

3. Professor Titular da UNICAMP. E-mail: armando@ige.unicamp.br – Instituto de Geociências da UNICAMP.

4. Daniel Gerhardus Krige – Engenheiro de minas sul-africano e considerado o pioneiro da Geoestatística.

Daniel Krige, tomou forma teórica com ajuda do matemático francês Georges Matheron⁵, que estabeleceu os primeiros teoremas e corolários relacionados às variáveis regionalizadas, denominando a nova ciência de Geoestatística.

Embora sua vasta aplicação se refira às variáveis espaciais estáticas, seu uso se estende também à avaliação da dispersão dessas variáveis no tempo, abrangendo um domínio de até quatro dimensões. Ao longo do tempo, uma grande quantidade de métodos e técnicas da Geoestatística, com base nos conceitos de variância e covariância, tem ajudado pesquisadores de diversas áreas das ciências da natureza, conforme se conclui com os exemplos publicados pelo *Journal Mathematical Geosciences*⁶. Como se sabe, não é de praxe aplicar a variografia cruzada experimental a séries temporais de ativos financeiros ou a séries temporais econométricas. A matriz variância-covariância, conforme definida nos primeiros trabalhos sobre carteiras de investimentos de Markowitz (1952), Tobin (1958) e de outros pesquisadores, tem sido a opção preferida há mais de seis décadas, entre outras abordagens.

Na área da economia, um conjunto de ferramentas foi desenvolvido ao longo dos últimos 80 anos, com o objetivo de correlacionar suas diversas variáveis. A econometria, nome dado a esse conjunto de ferramentas, inicialmente se ocupou de subsidiar decisões de governos com base em análises das variáveis macroeconômicas. Em quase todos os métodos de estimação da econometria, desde os mais simples, como o método dos mínimos quadrados até os métodos bayesianos⁷ e das cópulas, é inevitável aplicar a matriz variância-covariância na determinação dos estimadores. As evidências empíricas entre a base monetária de um país e sua respectiva inflação, por exemplo, podem ser estudadas com ajuda da matriz variância-covariância. O mesmo se aplica na avaliação realizada por agências classificadoras, como a Moody e a Standard&Poord, sobre o risco de crédito de países em todo o mundo.

É comum, entre duas séries temporais, uma segunda variável reagir às flutuações da primeira após um intervalo de tempo, denominado de tempo de defasagem ou *delay*. Por exemplo, o retorno do título de uma empresa de petróleo após um intervalo de tempo, pode estar correlacionado com o aumento do custo de produção da commodity. Outro exemplo é o aumento da taxa de juros básicos sobre a taxa de inflação. Nesse contexto, são vastos os exemplos de correlação entre duas séries temporais e a covariância cruzada experimental, em conjunto com a variância cruzada experimental, pode ser utilizada na determinação desse intervalo de tempo e subsidiar outras análises.

A metodologia apresentada aqui se destaca pela determinação gráfica do tempo de defasagem entre a correlação de duas séries temporais. A qualidade dos demais resultados, seja para avaliar o risco de ativos (variância) e outras propriedades, não difere de outras abordagens que utilizam a mesma base teórica centrada no contexto de variância-covariância. Desse modo, esta aplicação se presta para complementar outras análises de séries temporais, como por exemplo, os processos estocásticos clássicos (AR, MA, ARIMA, SARIMA, ARCH, GARCH e outros).

1. Fundamentos Teóricos

Em Geoestatística, a covariância cruzada entre duas funções ou variáveis aleatórias é aplicada tanto para uma locação x qualquer como para um par de locações separadas por um vetor h . É com base no pressuposto de estacionariedade conjunta de segunda ordem que a função de covariância cruzada entre duas funções é definida e depende somente do vetor h . Essa abordagem pode ser aplicada em economia e em finanças, em que o vetor que separa os eventos é o tempo, Δt . Nestes casos, as variáveis aleatórias são funções financeiras ou funções econômicas definidas em

5. Georges François Paul Marie Matheron (1930 a 2000) – Matemático e geólogo francês – conhecido como fundador da Geoestatística. Em 1968 criou o Centro de Geoestatística e Morfologia Matemática na escola de minas em Fontainebleau – Paris – França.

6. Ver <<http://www.cosmo-mg.mcgill.ca/>>.

7. A inferência bayesiana é um tipo de inferência estatística onde as incertezas são modificadas periodicamente após observações de novos dados ou resultados.

um domínio de tempo, D . Essas funções podem ser tanto os retornos de ativos financeiros ou de índices de mercado (IBOVESPA, câmbio, cotação do petróleo etc.) como indicadores que medem os parâmetros da economia de um país ou de uma empresa (PIB, inflação, rentabilidade, produtividade etc.).

O interessante da função de covariância cruzada aplicada em séries temporais é que seu valor para $+\Delta t$ e $-\Delta t$ podem ser diferentes. Tomando como exemplos variáveis aleatórias de funções financeiras definidas em um domínio de tempo D , de acordo com Wackernagel (1991, pp. 131-136), se

$$E[r_i(t)] = \mu_i \quad t \in D; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

a covariância cruzada fica definida como

$$C_{ij}(\Delta t) = E[(r_i(t) - \mu_i) \cdot (r_j(t + \Delta t) - \mu_j)] \quad t, t + \Delta t \in D; \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

onde $r_i(t)$ e $r_j(t)$ são séries temporais de funções financeiras, ou séries de variáveis econômicas ou até mesmo funções de variáveis de processos industriais etc.

Um conjunto de funções de covariância cruzada é uma função definida positiva. Isto implica que a variância de qualquer combinação linear das N variáveis tomadas em $n+1$ momentos diferentes com seus respectivos ponderadores w é maior que zero. Em outras palavras significa que

$$\text{var} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=0}^n w_{\alpha}^i r_i(t_{\alpha}) \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n w_{\alpha}^i w_{\beta}^j C_{ij}(t_{\alpha} - t_{\beta}) \geq 0 \quad (3)$$

A covariância cruzada não é, *a priori*, nem função par nem ímpar, pois geralmente para $i \neq j$ ou mudança da ordem das variáveis ou do sinal do vetor afeta o valor da covariância. Para o caso do vetor tempo implica que:

$$C_{ij}(\Delta t) \neq C_{ji}(\Delta t) \quad \text{e} \quad C_{ij}(-\Delta t) \neq C_{ij}(\Delta t) \quad (4)$$

sendo que

$$C_{ij}(\Delta t) = C_{ji}(-\Delta t) \quad (5)$$

Em situações particulares, desde que a correlação entre duas funções seja positiva⁸, o valor máximo da função da covariância cruzada pode ser deslocado por um vetor d numa determinada direção a partir da origem da abcissa. Este deslocamento da covariância é frequente em séries temporais, onde uma variável exerce um efeito retardado sobre outra variável. O tempo para que a segunda variável reaja às flutuações da primeira variável representa o tempo de defasagem, *delay*.

A função do variograma cruzado de séries temporais $\gamma_{ij}(\Delta t)$ é definida sob a hipótese conjunta de estacionariedade fraca de N funções aleatórias, onde cada $t, t + \Delta t \in D$ e para todos os pares $i, j = 1, 2, \dots, N$, tem-se que

$$E[r_i(t + \Delta t) - r_i(t)] = 0 \quad (6)$$

e

$$2\gamma_{ij}(\Delta t) = \text{cov}[(r_i(t + \Delta t) - r_i(t)), (r_j(t + \Delta t) - r_j(t))] \quad (7)$$

De acordo com a Equação (7), o variograma cruzado é a metade da esperança do produto do incremento direto de duas variáveis, ou seja,

$$\gamma_{ij}(\Delta t) = \frac{1}{2} E\{[r_i(t + \Delta t) - r_i(t)] \cdot [r_j(t + \Delta t) - r_j(t)]\} \quad (8)$$

satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$\gamma_{ii}(\Delta t)\gamma_{jj}(\Delta t) \geq |\gamma_{ij}(\Delta t)|^2 \quad (9)$$

É interessante investigar a relação do variograma cruzado com a função da covariância cruzada. Observe que, a Equação (10) a seguir

8. Quando a correlação entre as duas funções é negativa, o valor mínimo da função da covariância cruzada pode ser deslocado por um vetor d numa determinada direção a partir da origem da abcissa.

$$\gamma_{ij}(\Delta t) = C_{ij}(0) - \frac{1}{2} [C_{ij}(-\Delta t) + C_{ij}(\Delta t)] \quad (10)$$

demonstra que o variograma cruzado toma a média dos valores⁹ das covariâncias cruzadas correspondentes de $-\Delta t$ e $+\Delta t$. Ora, decompondo a função da covariância cruzada em duas funções, termo par e termo ímpar, tem-se que

$$C_{ij}(\Delta t) = \frac{1}{2} [C_{ij}(\Delta t) + C_{ij}(-\Delta t)]_{par} + \frac{1}{2} [C_{ij}(\Delta t) - C_{ij}(-\Delta t)]_{impar} \quad (11)$$

o que leva a concluir que o variograma cruzado envolve somente o termo par da função da covariância cruzada, ver Equação (10). Em modelos de precificação de ativos financeiros, onde é investigada a relação de um título com o índice de mercado, o termo ímpar da função de covariância é importante na modelagem. Esta é uma conclusão interessante deste artigo indicada mais adiante.

Apenas para recordar, uma série temporal y_t é fracamente estacionária se $E|y_t| < \infty$; $E|y_t| = \mu$ para todo t e $E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = \gamma_j$, onde γ_j representa a autocovariância com j unidades defasadas. Em outras palavras, a primeira condição é o que o segundo momento não centrado deve ser finito, a segunda é que a média é igual para todo período amostrado, ainda que a distribuição da variável se altere com o tempo, e a terceira condição exige que a autocovariância não dependa do tempo, mas da distância temporal entre as observações.

A função de covariância cruzada de duas funções aleatórias é, em tese, uma função par, desde que se admita simetria de suas variâncias no tempo. É justamente a simetria ou mesmo a assimetria, uma componente importante da covariância cruzada experimental. O comportamento assimétrico dessa função é encontrado em vários estudos de hidrogeologia e em outras áreas relacionadas às Geociências¹⁰. Neste presente artigo é indicado o termo ímpar da covariância cruzada experimental para avaliação qualitativa na determinação do índice de risco de títulos em modelos clássicos de precificação de ativos, como o CAPM e seus derivados.

A função de covariância cruzada experimental de séries temporais $r_i(t)$ é definida para diferentes classes de tempo ψ , tomadas de n_t pares de tempos t_α e t_β de acordo com o vetor $t_\alpha - t_\beta = \Delta t_{\alpha\beta} \in \psi$ ¹¹, tal que

$$C_{ij}^*(\psi) = \frac{1}{n_t} \sum_{\alpha=1}^{n_t} [r_i(t_\alpha) - \mu_i] \cdot [r_j(t_\alpha + \Delta t_{\alpha\beta}) - \mu_j] \quad (12)$$

e a função do variograma cruzado experimental é definida para diferentes classes de tempo ψ de funções de séries temporais $r_i(t)$ com $\Delta t_{\alpha\beta} \in \psi$, tal que

$$\gamma_{ij}^*(\psi) = \frac{1}{2n_t} \sum_{\alpha=1}^{n_t} [r_i(t_\alpha + \Delta t_{\alpha\beta}) - r_i(t_\alpha)] \cdot [r_j(t_\alpha + \Delta t_{\alpha\beta}) - r_j(t_\alpha)] \quad (13)$$

A metodologia adotada neste artigo consiste em aplicar diretamente as funções definidas pelas Eqs. (12) e (13) sobre os retornos de ativos financeiros de empresas negociados na BM&FBOVESPA, sobre retornos de índices setoriais financeiros e sobre variações de índices econômicos. Os termos par e ímpar da função de covariância experimentais são respectivamente:

$$termo_{par} = \frac{1}{2} [C_{ij}^*(\Delta t) + C_{ij}^*(-\Delta t)] \quad (14)$$

e

$$termo_{impar} = \frac{1}{2} [C_{ij}^*(\Delta t) - C_{ij}^*(-\Delta t)] \quad (15)$$

deduzidos da Equação (11).

9. A Eq. (10) é obtida facilmente a partir da seguinte relação $\gamma_s(h) = C_s(0) - C_s(h)$.

10. Ver diversos exemplos no compêndio *Mathematical Geosciences* disponível em <<http://www.cosmo-mg.mcgill.ca/>>.

11. A Eq. (12) e demais equações derivadas referem-se às equações definidas por Myers (1991) e Hans Wackernagel (1995) – aqui a notação é adaptada para o vetor Δt (tempo) em vez de h (distância).

As amostras utilizadas neste trabalho foram testadas utilizando-se do teste de Jarque-Bera e Durbin-Watson, ambos calculados com funções programadas no MATLAB. O teste Jarque-Bera pertence à classe de testes de normalidade, usado para determinar se um conjunto de dados de uma variável aleatória pode ser ajustado por uma distribuição normal ou não, ou para calcular a probabilidade da variável aleatória estar normalmente distribuída. O valor do teste Jarque-Bera é dado por $JB=(n/6)[s^2+(k-3)^2/4]$. Conforme se observa, esse teste é função do tamanho da amostra n , da assimetria s e da curtose k da distribuição da série temporal. A hipótese nula é de que a distribuição pode ser representada por uma distribuição normal. Foi realizado apenas com o objetivo de demonstrar que a metodologia aplicada aqui independe se os retornos são distribuídos normalmente ou não.

Já o teste de Durbin-Watson, utilizado para detectar a presença de autocorrelação (dependência) nos resíduos de uma análise de regressão, é feito com ajuda de uma tabela de valores de limites indicados em função do tamanho da amostra, do número de variáveis explicativas e do nível de significância. Para este trabalho, o nível de significância foi de 5% e o tamanho da amostra igual a 60. Nesse caso, os valores limites inferiores e superiores são $d_L=1,549$ e $d_U=1,616$, respectivamente. Nesse teste, a hipótese nula é rejeitada (indicando, portanto, dependência dos erros) quando $0 \leq dw < d_L$ (correlação positiva) ou quando $4 - d_L < dw \leq 4$ (correlação negativa). A hipótese nula é não rejeitada se $d_U < dw < 4 - d_U$. O teste é inconclusivo quando $d_L \leq dw \leq d_U$ ou $4 - d_U \leq dw \leq 4 - d_L$ (ver resultados nas Tab. 1 e Tab. 2 no anexo).

2. Aplicação da Covariância Cruzada Experimental e Resultados

Normalmente, uma série temporal de retornos diários de um ativo financeiro negociado na BM&FBOVESPA está correlacionada com a série temporal de retornos de um índice do mercado, o IBOVESPA por exemplo. Essa correlação, usualmente adotada nos modelos de precificação de ativos financeiros (CAPM e seus derivados), é expressa conforme Equação (16) a seguir:

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + e_{i,t} \quad (16)$$

onde $r_{i,t}$ é o retorno do título no t -ésimo período; $r_{m,t}$ é o retorno da carteira de mercado no t -ésimo período; α_i é o coeficiente linear; β_i é o coeficiente angular da regressão (denominado índice de risco do título) e $e_{i,t}$ é o erro, que representa a variabilidade dos retornos não associada ao mercado. Quanto maior o coeficiente β_i , maior a volatilidade quanto ao retorno do ativo.

É possível avaliar a volatilidade de um ativo financeiro aplicando o variograma direto experimental. A Figura 1, por exemplo, indica um variograma para 120 amostras diárias do retorno do ativo PETR4 em três períodos distintos: Fase I (03/01/2000 a 26/06/2002); Fase II (01/07/2008 a 17/12/2008) e Fase III (09/02/2011 a 02/08/2011)¹². Os valores indicados no variograma são proporcionais à volatilidade dos retornos nos três períodos distintos, conforme se observa nos histogramas da

Figura 2.

12. Fonte de dados: sítio da BM&FBOVESPA disponível em <http://www.bmfbovespa.com.br>.

Figura 1: Variograma experimental direto – volatilidade do ativo PETR4 para três diferentes períodos.

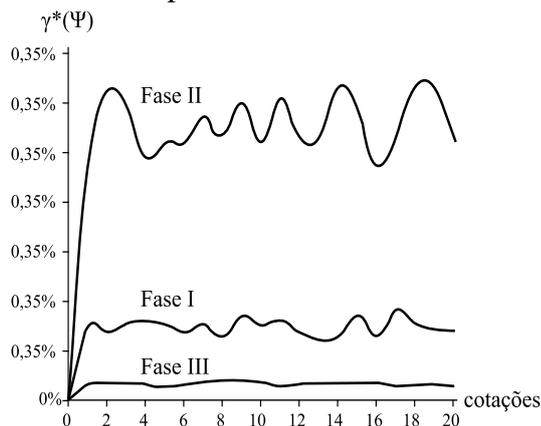
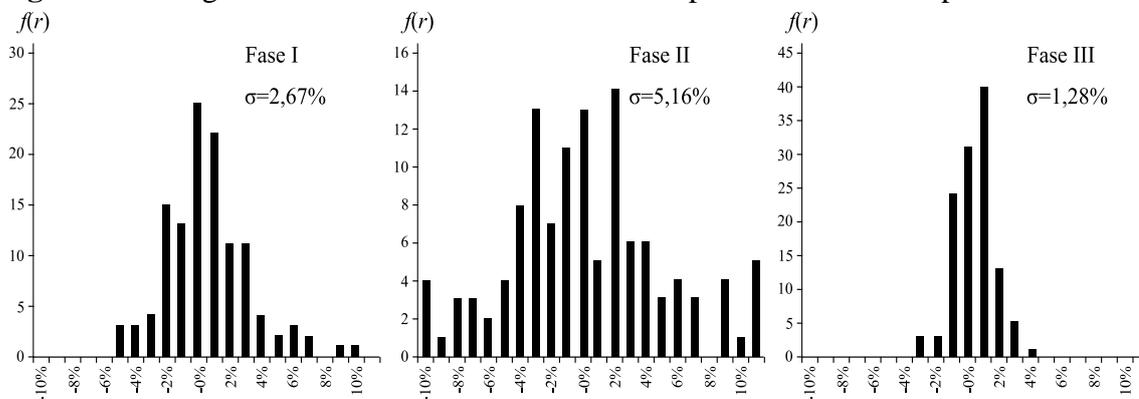


Figura 2: Histograma e volatilidade do ativo PETR4 para três diferentes períodos.



O variograma experimental da Figura 1 foi construído com a seguinte expressão:

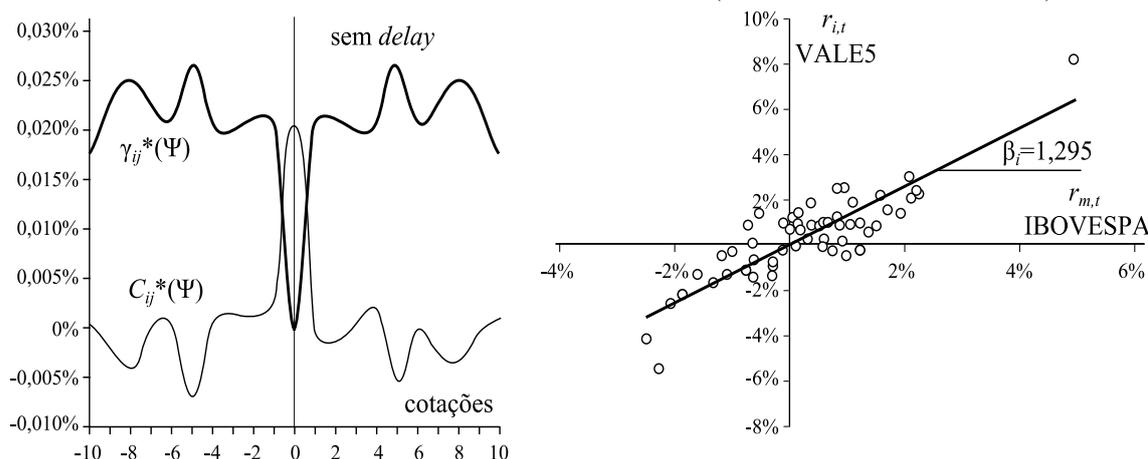
$$\gamma^*(\psi) = \frac{1}{2n_t} \sum_{\alpha=1}^{n_t} [r(t_\alpha + \Delta t_{\alpha\beta}) - r(t_\alpha)]^2, \Delta t_{\alpha\beta} \in \psi \quad (17)$$

onde n_t é o número de pares de pontos para cada valor de $\Delta t_{\alpha\beta} \in \psi$. Observe-se a volatilidade elevada (mensuração de risco) para o período da Fase II, que coincide com a crise mundial de 2008.

O variograma, por si só, revela poucas informações quando aplicado a séries temporais de ativos financeiros ou séries econométricas. No entanto, a covariância cruzada experimental e o variograma cruzado experimental revelam algumas informações interessantes a serem investigadas. A

Figura 3, por exemplo, indica a variografia dessas funções para o ativo VALE5 e o IBOVESPA durante o período de 01/07/2009 a 24/07/2009 (60 amostras).

Figura 3: Covariância cruzada experimental $C_{ij}^*(\psi)$ e variograma cruzado experimental $\gamma_{ij}^*(\psi)$ para os retornos diários do título VALE5 e IBOVESPA (01/07/2009 a 24/09/2009).

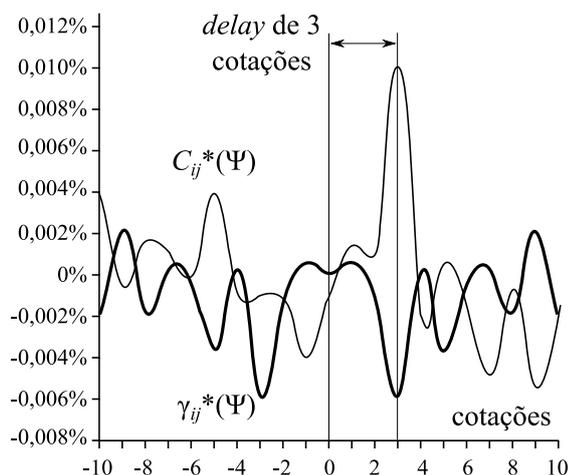


O variograma cruzado experimental, a exemplo do variograma direto, é simétrico em relação à origem, ao passo que a covariância cruzada experimental não o é. Essa particularidade permite utilizar a covariância cruzada experimental para determinar a defasagem "delay" entre as variâncias de duas séries temporais. Embora os retornos de ativos financeiros ou índices setoriais estejam quase sempre correlacionados em tempo real com o IBOVESPA, é possível utilizar essa metodologia para avaliar se entre pares de títulos ou índices setoriais ocorre ou não o mesmo fenômeno. O tempo de defasagem pode ser de apenas alguns minutos ou de poucas horas, dado a dinâmica dos negócios em bolsas de valores.

Para demonstrar a validação do uso da função na determinação do tempo de defasagem, são utilizadas duas séries temporais de índices de mercado defasadas propositalmente de um período de tempo. Por exemplo, se forem tomadas 60 amostras do índice IBOVESPA e 60 amostras do índice SMLL¹³ defasados três cotações em relação ao IBOVESPA, a covariância cruzada indicará o *delay* entre as cotações (Figura 4).

Figura 4: Covariância cruzada experimental $C_{ij}^*(\psi)$ e variograma cruzado experimental $\gamma_{ij}^*(\psi)$ para os retornos diários da IBOVESPA e o SMLL (séries temporais amostrados em períodos defasados).

13.SMLL – Índice setorial da BM&FBOVESPA. O SMLL, mais conhecido pelo nome em inglês Small Cap, mede o retorno de uma carteira composta por empresas de baixa capitalização.

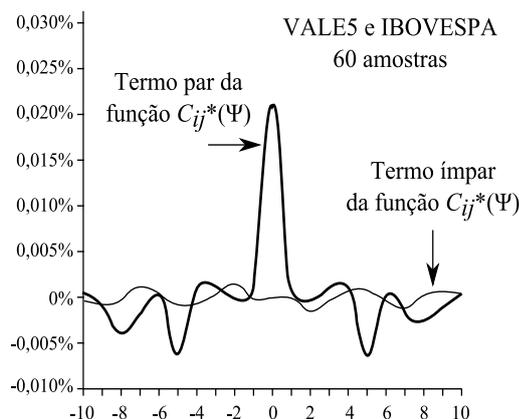


As amostras do IBOVESPA na variografia da

Figura 4 são do período de 01/02/2006 a 02/05/2006, ao passo que as amostras do índice SMLL são de três pregões à frente, 06/02/2006 a 05/05/2006. A Figura 5 a seguir mostra o gráfico dos dois termos da covariância cruzada experimental, termo par e ímpar, conforme definidos na Equação (11). Observe que a curva do termo par da Figura 5 é um espelho do variograma cruzado, que pode ser confirmado observando a

Figura 3. Esta observação confere com a Equação (10) já descrita.

Figura 5: Termo par e ímpar da covariância cruzada experimental – amostras de 01/07/2009 a 24/09/2009.



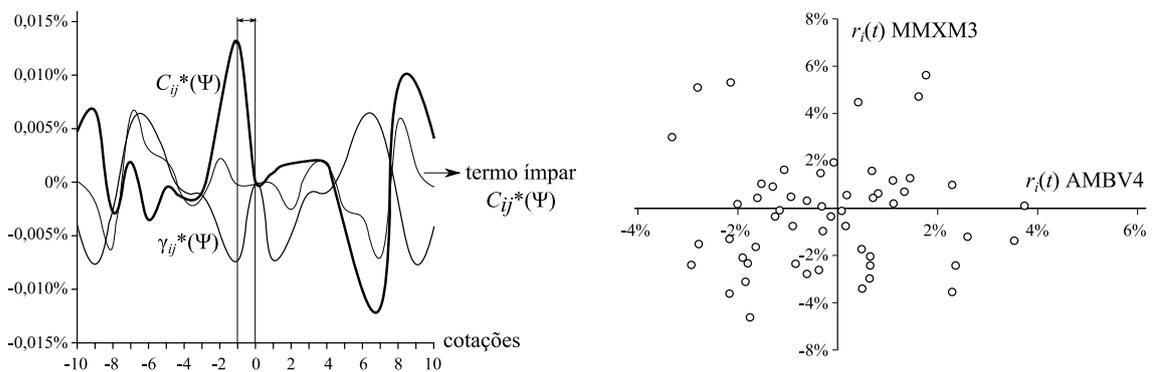
O termo ímpar, como já comentado, mede o grau de assimetria da covariância cruzada. Em caso de total simetria este termo seria nulo. Portanto, a assinatura dessa curva é uma boa indicação para avaliar a assimetria quanto aos retornos entre dois ativos, ou entre duas séries temporais quaisquer. Em métodos de precificação de ativos, por exemplo, em que o interesse é definir um

valor apropriado para o índice beta, a distorção do termo ímpar pode subsidiar qualitativamente a avaliação desse índice.

Na

Figura 6 a seguir é mostrada a covariância cruzada experimental dos retornos dos títulos de duas empresas com atividades econômicas distintas: a ação preferencial da cervejaria AMBEV (AMBV4) e a ação ordinária da mineradora MMX (MMXM3). O gráfico do lado direito mostra que a correlação entre as duas séries é baixa. É importante registrar que nestes casos não se pode afirmar se o "delay" apresentado entre a covariância cruzada e o variograma cruzado experimentais está ou não relacionado aos efeitos retardados de uma ação sobre a outra. O termo ímpar da covariância revela também que há pouca simetria entre os dois títulos durante o período amostrado.

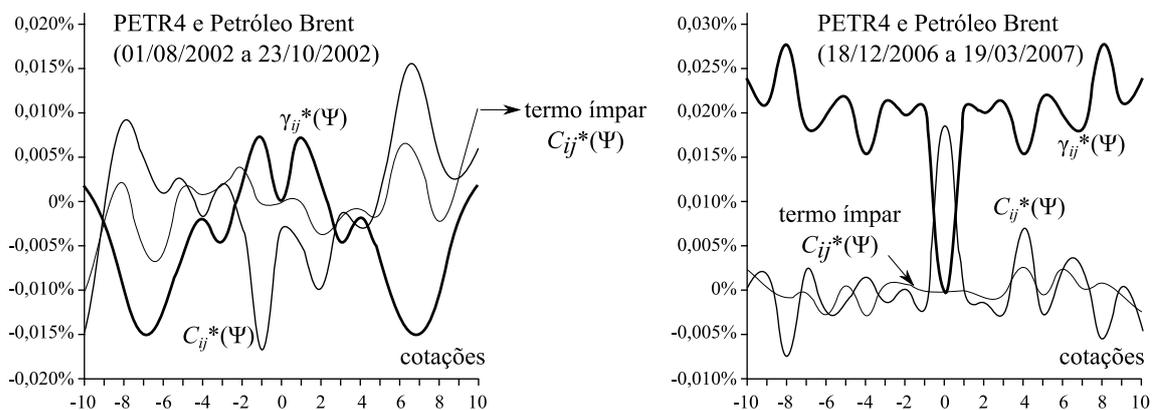
Figura 6: Covariância cruzada experimental - AMBEV e MMX (amostras de 04/01/2011 a 31/03/2011).



De um modo geral os ativos financeiros de empresas de *commodities* acompanham a cotação internacional de seus produtos em mercados de futuros. No entanto, há períodos em que esta correlação apresenta assimetria. A

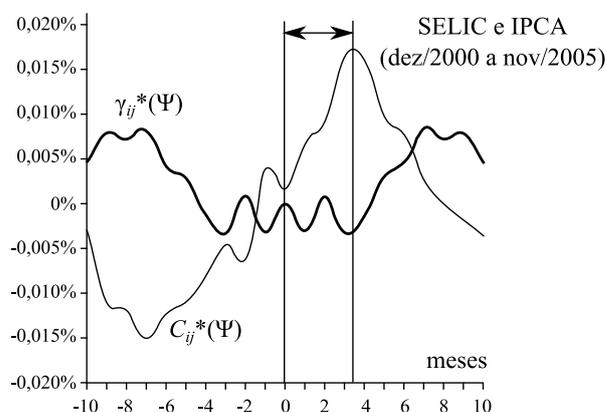
Figura 7 a seguir, por exemplo, mostra as curvas de covariância cruzada com seus termos de assimetria e as curvas do variograma cruzado para o ativo PETR4 e a commodity petróleo em dois momentos distintos. O ativo PETR4 e a *commodity* apresentaram boa simetria durante o período de 18/12/2006 a 19/03/2007, ao passo que o mesmo não ocorreu para o período de 01/08/2002 a 23/10/2002. Esse procedimento pode ser feito para diversas *commodities* nos mesmos intervalos de tempo e, com isso, avaliar se as assimetrias apresentadas são devidas ao mercado ou são endógenas a cada ativo em particular.

Figura 7: Covariância cruzada experimental: ativo PETR4 e a commodity petróleo em momentos distintos.



A última aplicação refere-se à taxa de juros estabelecida mensalmente pelo COPOM¹⁴ (taxa de juros anual válida durante o mês vigente) e a taxa de inflação mensal medida pelo IPCA, ver Figura 8 a seguir.

Figura 8: Covariância cruzada experimental: taxa SELIC e inflação medida pelo IPCA.



Foram consideradas as variações das duas taxas como variáveis aleatórias. Como se sabe, no Brasil e em outras partes do mundo, as metas de inflação são controladas por políticas monetárias rígidas baseadas na definição da taxa básica de juros. É esperado que os efeitos desejados na taxa de inflação ocorram após um prazo a partir da adoção da taxa básica de juros pelo mercado. A Figura 8 mostra o tempo de defasagem a partir de 60 amostras mensais do IPCA e da SELIC¹⁵ durante o período de janeiro de 2000 a dezembro de 2005. Em diversas simulações com amostras de janeiro de 2000 a agosto de 2011 o tempo de defasagem variou entre três e quatro meses, semelhante ao indicado na Figura 8. Os resultados, no entanto, não são considerados conclusivos pelos autores, pois em algumas simulações este efeito de defasagem apresentou valores distintos, indicando que a taxa de inflação é correlacionada com outros índices da economia além da taxa básica de juros.

3. Relação com os processos estocásticos

A contribuição deste artigo, à medida que integra a estatística espacial com a econometria de séries temporais, se faz notar pela praticidade em indicar o tempo de defasagem na correlação de duas séries temporais por meio de método variográfico de fácil construção. Outras características como a volatilidade (risco) e a assimetria podem ser visualizadas e mensuradas também. Nesse sentido, esta metodologia é uma alternativa que se alia aos métodos clássicos de séries temporais, como os métodos autorregressivos $AR(p)$ e de média móvel $MA(q)$ e seus derivados, $ARMA(p,q)$ e $ARIMA(p,q,d)$, além dos métodos com suposição de heterocedasticidade condicional, como $ARCH(q)$, $GARCH(p,q)$ etc.

Apenas para registrar, é interessante lembrar que a Equação (2) guarda a mesma natureza da função de autocovariância de uma realização particular de um processo estocástico qualquer, definida por

$$\gamma_{jt} = E[(y_j - \mu_j) \cdot (y_{t-j} - \mu_{t-j})] \quad \text{onde} \quad \gamma_{0t} = \text{var}(y_t) \quad (18)$$

14. COPOM – Comitê de Política Monetária do Banco Central do Brasil. Esse comitê determina a taxa básica de juros do mercado, SELIC – Sistema Especial de Liquidação e de Custódia. Esta é a taxa básica utilizada como referência pela política monetária do Brasil como parte do controle das metas de inflação.

15. Fonte de Dados: sítio do Banco Central do Brasil: <http://www.bcb.gov.br>.

Como se sabe, a escolha de um modelo estocástico para representar uma série temporal tem como base o comportamento da função de autocorrelação (FAC), definida em função da Equação (19), ou seja

$$\rho_{jt} = \frac{\gamma_{jt}}{\gamma_{0t}} \quad (19)$$

Por exemplo, a FAC define a defasagem do processo estocástico com base em média móvel (MA). Nesse trabalho, o interesse é avaliar a correlação cruzada entre duas séries temporais, conforme indicado na Equação (2). No entanto, nada impede que a mesma metodologia seja aplicada para uma série temporal e compará-la com os gráficos das funções de autocorrelação, FAC.

Considerações finais

A covariância cruzada experimental em conjunto com o variograma cruzado é indicada para diversas aplicações, entre elas: correlação entre ativos financeiros negociados em bolsas de valores, entre ativos e índices de mercado, entre índices econômicos ou entre ativos financeiros e índices econômicos. A condição necessária na aplicação da variografia cruzada é que as variáveis aleatórias apresentem estacionariedade fraca, e só há sentido prático se tais variáveis são de fato (ou presume-se) correlacionadas. Do contrário o tempo de defasagem indicado pela variografia não revelará informação de utilidade prática.

A curva de covariância cruzada entre ativos pode indicar estratégias de compra e venda de ativos em bolsas de valores. Recomenda-se avaliar a metodologia com cotações de ativos durante o dia em intervalos de 1 hora ou menos. É possível assim determinar alguns co-movimentos de compra e venda de ativos ao longo do dia e determinar se há pares de ativos correlacionados com tempo de defasagem bem definidos.

O termo ímpar da função de covariância cruzada experimental mede o grau de assimetria entre as variáveis. Em métodos de precificação de ativos, em que o interesse é definir um valor apropriado para o índice beta, como o CAPM e seus derivados, a curva de assimetria pode subsidiar qualitativamente a determinação desse índice. Esse procedimento também pode ser aplicado entre os retornos dos ativos financeiros de empresas de *commodities* e seus respectivos preços de produtos em mercados de futuros. A assimetria apresentada revelará se é devida ao mercado ou se é endógena ao ativo. Recomenda-se aprofundar a relação do termo ímpar da função de covariância cruzada com o índice β de ativos financeiros.

Como referido, neste trabalho, o interesse é avaliar a correlação cruzada entre duas séries temporais, conforme indicado na Equação (2). No entanto, nada impede que a mesma metodologia seja aplicada para uma única série temporal e compará-la com os gráficos das funções de autocorrelação, FAC, como objetivo de orientar o analista na escolha do melhor processo estocástico para representar a série em análise. Recomendamos aprofundar as vertentes já consagradas de variografia experimental da estatística espacial para séries econométricas em conjunto com os processos estocásticos clássicos. São vastas as possibilidades de uso da variografia cruzada para séries temporais. A abordagem indicada neste artigo pode auxiliar, além de análise de variáveis financeiras ou econômicas, análises de variáveis de processos industriais, variáveis de gestão ou outras aplicações genéricas onde o interesse seja definir o efeito temporal que uma variável exerça sobre outra.

Anexo

Tab. 1 – Resultados do teste estatístico – Durbin-Watson

Variável (regressão)	Período de amostragem	dw (Durbin-Watson)	p -valor
	Tamanho da amostra, $n=60$	$d_L=1,549$ e $d_U=1,616$	
VALE5 e IBOVESPA	01/07/2009 a 24/09/2007	1,9750	0,9068
MMXM3 e AMBV4	04/01/2011 a 31/03/2011	1,6716	0,1871
PETR4 e Petróleo	01/08/2002 a 23/10/2002	1,6020	0,1149
PETR4 e Petróleo	18/12/2006 a 19/03/2007	2,0399	0,8604
SELIC e IPCA	dez/2000 a nov/2005	1,8028	0,3912

Tab. 2 – Resultados do teste estatístico – Jarque-Bera

Variável	Período amostra, $n=60$	Assimetria e curtose	JB	hipótese, h_0 (5%)
VALE5	01/07/2009 a 24/09/2007	0,5195 e 7,8024	60,3553	Rejeitada
IBOVESPA	01/07/2009 a 24/09/2007	0,5085 e 4,8853	11,4712	Rejeitada
MMXM3	04/01/2011 a 31/03/2011	0,5948 e 2,7802	3,6587	Não rejeitada
AMBV4	04/01/2011 a 31/03/2011	0,3031 e 2,6253	1,2695	Não rejeitada
PETR4	01/08/2002 a 23/10/2002	-0,0584 e 4,1756	3,4893	Não rejeitada
Petróleo	01/08/2002 a 23/10/2002	0,0327 e 2,6736	0,2770	Não rejeitada
PETR4	18/12/2006 a 19/03/2007	-0,3460 e 4,0821	4,1247	Não rejeitada
Petróleo	18/12/2006 a 19/03/2007	0,8096 e 4,5366	12,4564	Rejeitada
SELIC	dez/2000 a nov/2005	-5,8820 e 42,2184	4191,2	Rejeitada
IPCA	dez/2000 a nov/2005	0,9601 e 7,0657	50,5429	Rejeitada

Referências

BANCO CENTRAL DO BRASIL S.A. Base de Dados. Dados históricos de inflação e do COPOM disponível em <http://www.bcb.gov.br>. Acesso em 30 out. 2011.

BM&FBOVESPA. Base de Dados. Dados históricos de cotação de ações e índices disponíveis em <http://www.bmfbovespa.com.br>. Acesso em 25 set. 2011.

BUENO, R. L. S., 2012. "Econometria de Séries Temporais". 2. ed. ver. ampl. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade – USP – São Paulo: Cengage Learning 341 pp.

KRIGE, D. G. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. South Africa, 1951: **Journal of the Chem**, 52(6). p. 119–139.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. Oxford, 1952: **Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91.

MATHERON, G. **Traité de géostatistique appliquée**. Paris, 1962: Technip, v. 14. 333 p.

MYERS, D. E. Pseudo-cross variograms, positive-definiteness, and cokriging. Arizona, 1991: **Mathematical Geology**, v. 23, n. 6, p. 805-816.

TOBIN, J. Liquidity preference as a behavior toward risk. Oxford, 1958: **Review of Economic Studies**, v. 25, n. 66, p. 65-86.

WACKERNAGEL, H. **Multivariate Geostatistic – An Introduction with Application**. New York, 1995: Springer, 256 p.

WEI, W. W. S., 2006. **Time Series Analysis – Univariate and Multivariate Methods**. 2. ed. – Pearson Education, Boston, 614 pp.

Recebido em 17.02.12

Aprovado em 13.04.13