A ALOMETRIA AO ALCANCE DE TODOS

Antonio Feltran Filho
Professor do Departamento de Geografia da UFU
Mestre em Geografia pela UNESP – Rio Claro

RESUMO
O presente artigo tem como finalidade simplificar a possibilidade de uso da análise alométrica, através da determinação dos parâmetros alométricos (métodos analítico e gráfico).

INTRODUÇÃO

A alometria consiste em verificar as relações existentes entre a grandeza assumida pelos elementos componentes do sistema, entendendo que os ajustes internos ocorrem em função da atuação de determinados processos. GOULD (1966) a considera como o "estudo do tamanho e suas conseqüências" (CHRISTOFOLETTI, 1979:87).

O conceito de crescimento alométrico está fundamentado no estudo das taxas relativas de modificação, ocorridas em dois aspectos de um organismo ou sistema, ou seja, o crescimento de parte de um sistema, comparado ao seu crescimento total.

Como se trata de instrumento para caracterizar o desenvolvimento e a mensuração do equilíbrio de sistemas, a alometria não se preocupa em analisar as modificações que as formas dos elementos vão tomando com o passar do tempo. É, portanto, o desempenho apresentado pelo crescimento relativo entre o todo e/ou partes do sistema, que interessa à alometria.

A fórmula do crescimento alométrico, que descreve as taxas de mudanças relativas entre o crescimento do todo e partes do sistema, foi utilizada por SNELL em 1891 na Biologia, portanto há quase um século. Entretanto, na Geografia, só recentemente esse conceito passou a ser utilizado. Por se prestrar a comparações entre uma e outra parte do sistema ou com o sistema total, tanto na área física como humana, encontramos sua aplicação. Merecem destaques os autores WILDENBERG (1966, 1972), MOSLEY & PARKER (1972), FAULKANER (1974), BULL (1975, 1978), na área física, e LAMARCHE (1973), WOLDENBERG (1973), VILLENEUVE (1973, 1975) RAY (1974) RAY, VILLENEUVE & ROBERGE (1974), na área humana. No Brasil, destaca-se o trabalho de CHRISTOFOLETTI (1979).

A literatura especializada carece de informações que facilitem ao pesquisador a utilização de tal instrumento.

A publicação da fórmula alométrica e de seus fundamentos conceituais nem sempre é suficiente para a sua implantação no meio geográfico.

Os objetivos do presente trabalho são divulgar a dedução da fórmula matemática da equação alométrica e exemplificar a sua aplicação no estudo de uma bacia hidrográfica.

Tratando-se do estudo de um sistema que apresenta fenômenos correlacionados, pretende-se mostrar que os resultados possibilitados pelas funções alométricas facilitam uma avaliação do comportamento das variáveis, de maneira mais segura.

DEDUÇÃO DA FÓRMULA DO CRESCIMENTO ALOMÉTRICO

A fórmula matemática da equação é expressa da seguinte maneira:

$$y = ax^b$$

A fórmula alométrica mostra que a taxa de crescimento específico de um elemento (y) permanece em constante relação com a taxa de crescimento de um outro elemento do sistema ou do sistema total (x). O conceito alométrico assegura que essas variáveis estão relacionadas entre si e então a taxa relativa de modificação de (y) é proporcional à taxa relativa de modificação de (x), ao longo do tempo.

Esse conceito pode ser expresso matematicamente por:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = b\,\frac{\frac{dx}{dt}}{x} \qquad (1)$$

De (1) vem:

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{y} = b \, \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{x}$$

multiplicando-se ambos os termos da equação por dt, vem:

$$\frac{dy}{y} = b \, \frac{dx}{x}$$

integrando ambos os lados, temos:

$$\int \frac{dt}{y} = b \int \frac{dx}{x} \qquad (2)$$

calculando-se as integrais, vem:

$$1ny + c_1 = b \, 1n \, x + c_2$$

em que c_1 e c_2 são constantes de integração, e.

Obs.: A função 1n y (ou 1n x) representa o logaritmo Nepperiano de (y) ou de (x), cuja base é o número de Nepper = e ≃ 2,7183.

Logo:

$$1n \, y = (c_2 - c_1) + b \; 1n \, x$$

Fazendo:

$c_2 - c_1 = 1n \, a$, em que a é uma constante, vem

$$\begin{aligned} 1n \, y &= 1n \, a + b \, 1n \, x \\ 1n \, y &= 1n \, a + 1n \, x^b \qquad (3) \\ 1n \, y &= 1n \, a \, x^b \end{aligned}$$

Portanto:

$$y = a \, x^b \qquad (4)$$

A equação (4) define a relação alométrica entre as grandezas (x) e (y).

1. Determinação dos Parâmetros Alométricos

Dadas duas grandezas (x) e (y), alometricamente relacionadas, a determinação dos parâmetros (a) e (b) pode ser feita pelo método analítico ou pelo método gráfico. O primeiro é um método mais preciso, enquanto o segundo permite verificar mais facilmente a existência de alometria entre as grandezas.

1.1. Descrição do método analítico

O método analítico consiste na aplicação de fórmulas deduzidas a partir do conceito de alometria, que permitam a fácil determinação dos parâmetros alométricos.

O parâmetro (b) pode ser determinado a partir do desenvolvimento da equação (2). Temos, então:

$$b = \frac{\int \frac{dy}{y}}{\int \frac{dx}{x}} \qquad (5)$$

A equação (5) revela a necessidade de dois pontos fornecidos em coordenadas (x) e (y), para que seja obtido o valor de (b). Logo:

$$b = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y}}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x}} \qquad (6)$$

em que os pontos citados são: (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

Desenvolvendo a equação (6), vem:

$$b = \frac{1n \, y_2 - 1n \, y_1}{1n \, x_2 - 1n \, x_1} = \frac{1n \, (y_2/y_1)}{1n \, (x_2/x_1)} \qquad (7)$$

A equação (7) é a que permite determinar o parâmetro (b), a partir de dois pontos do sistema. Para a determinação do parâmetro (a), podemos partir da equação (4).

$$a = \frac{y}{x^b} \qquad (8)$$

Pela equação (8) é determinado o valor (a), desde que sejam conhecidos o valor de (b) e um ponto do sistema. Seja esse ponto igual a (x_1, y_1). Logo:

$$a = \frac{y_1}{x_1{}^b} \qquad (9)$$

As equações (7) e (9) mostram que, para determinação dos parâmetros (a) e (b), é necessário e suficiente o conhecimento de dois pontos do sistema.

1.2. Descrição do método gráfico

O método gráfico consiste no traçado gráfico da variação de (y) em relação à variação de (x), para a determinação dos parâmetros (a) e (b). Isso pode ser feito a partir da equação (3).

Seja, $(z = \ln y)$ e $(w = \ln x)$. Segue:

$$z = \ln a + b\,w \tag{10}$$

Como é fácil verificar, a equação (10) traduz uma variação linear de (z) em relação a (w).

Diferenciando a equação (10), temos:

$$dz = b\,dw \tag{11}$$

ou seja,

$$b = \frac{dz}{dw} \tag{12}$$

A equação (12) mostra que o parâmetro (b) é o coeficiente angular da variação de (z) em relação a (w), ou seja, (b) é a inclinação da reta que traduz a variação de (b) em relação a (w).

Tomando a equação (10) e fazendo $w = 0$, vem:

$$z = \ln a \tag{13}$$

Como as grandezas (z) e (w) são funções logarítmicas de (y) e (x), respectivamente, então o gráfico da variação de (z) em relação à de (w) pode ser obtido a partir do traçado da variação de (y) em relação à de (x), em escala logarítmica.

Integrando a equação (11), obtemos:

$$\int dz = b \int dw \tag{14}$$

A equação (14) revela a necessidade do conhecimento de dois pontos do sistema para a determinação do parâmetro (b). Logo:

$$b = \frac{\int_{z_1}^{z_2} dz}{\int_{w_1}^{w_2} dw}$$

Logo:

$$b = \frac{z_2 - z_1}{w_2 - w_1} \tag{15}$$

Se voltarmos à fórmula original de (z) e (w), obteremos:

$$b = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{\ln (y_2/y_1)}{\ln (x_2/x_1)} \tag{16}$$

Como podemos notar, a equação (16), deduzida no método gráfico, coincide com a equação (7), deduzida do método analítico.

O parâmetro (a) é obtido da equação (13) em que a condição $(w = 0)$ é equivalente à condição $(x = 1)$, pois $(w = \ln x)$.

Logo:

$$\ln a = \ln y, \text{ para } (x = 1) \tag{17}$$

Então, o valor de (a) é obtido do gráfico de (y) em relação a (x), sendo igual ao valor de (y) para $(x = 1)$.

A Figura 1 mostra a determinação dos parâmetros alométricos pelo método gráfico.

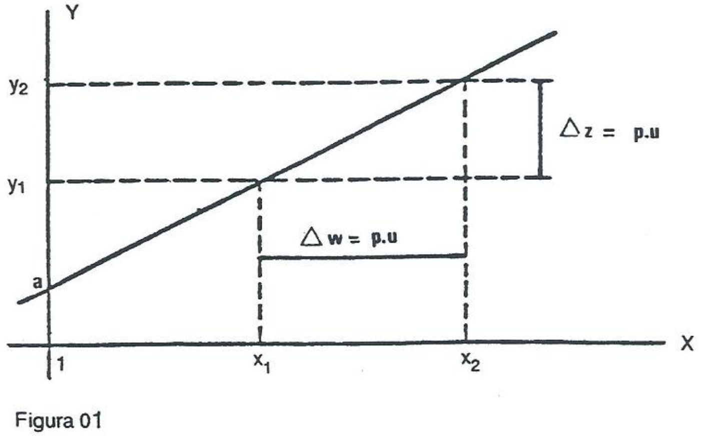

Figura 01

Medindo os valores de ($\Delta z = \ln y - \ln y_1$) e de ($\Delta w = \ln x_2 - \ln x_1$), usando uma mesma escala de unidade (u), determinamos:

$$b = \frac{n.u}{p.u} = \frac{n}{p}$$

Um exemplo prático é fazer (u) igual a um centímetro. Logo, (n) é a medida de (Δz) em centímetros, e (p) é a medida de (Δw) em centímetros.

Para a determinação de (b) não importa a unidade escolhida, pois ela será cancelada na equação (18). O valor de (a) é determinado pela interseção da reta com o eixo (y), no ponto em que ($x = 1$). O valor de (y), tomado nesse ponto é igual ao valor de (a).

Como (b) é constante de proporcionalidade entre (x) e (y), as relações entre ambos os elementos, a alometria pode ser positiva ou negativa. Se ($b > 1$), indica que o crescimento alométrico é positivo, pois (y) está crescendo mais rapidamente que (x). Se ($b = 1$), então o crescimento alométrico é proporcional entre ambos os elementos (y) e (x), também chamado de crescimento isométrico. Se ($b < 1$), o crescimento alométrico é negativo, indicando que (y) cresce de maneira mais lenta que (x).

ANÁLISE ALOMÉTRICA APLICADA À BACIA DO RIO PIRACICABA

No presente estudo, calcularam-se as funções alométricas para os principais cursos fluviais da bacia do rio Piracicaba, nas suas vazões específicas de 25, 50, 75 e 95%, para melhor poder avaliar o comportamento de seus débitos (Quadro 1).

Desta maneira, tem-se uma visão particularizada de cada curso de água, bem como a visão do conjunto dos rios da bacia em análise, em que x é a área da bacia e y é o valor do débito.

Através das equações alométricas encontradas, pode-se afirmar que:

- com exceção do rio Piracicaba, os demais rios, de maneira geral, não possuem crescimento alométrico positivo;
- os rios Atibaia e Jaguari apresentam semelhança no crescimento alométrico, entre a área e seus débitos específicos;
- os rios Camanducaia e Piracicaba apresentam resultados mais extremados. O primeiro com seu crescimento alométrico apresentando o maior valor negativo e o segundo com resultado positivo de maior valor.

RIO	PREFIXO	ALTITUDE	ÁREA km^2	25%	50%	75%	95%
Camanducaia	3D–02	735	406	$y=1,101(x)^{0,42}$	$y=0,782(x)^{0,42}$	$y=0,349(x)^{0,50}$	$y=0,013(x)^{0,19}$
Camanducaia	3D–01	575	995				
Jaguari	3D–09	730	1970	$y=0,094(x)^{0,88}$	$y=0,243(x)^{0,76}$	$y=0,062(x)^{0,85}$	$y=0,015(x)^{1,00}$
Jaguari	4D–01	515	3476				
Atibaia	3D–06	695	1918	$y=0,084(x)^{0,86}$	$y=0,121(x)^{0,78}$	$y=0,058(x)^{0,83}$	$y=0,002(x)^{1,20}$
Atibaia	4D–09	540	2682				
Piracicaba	4D–10	510	7078	$y=0,004(x)^{1,18}$	$y=0,018(x)^{1,10}$	$y=0,029(x)^{0,92}$	$y=0,0001(x)^{1,49}$
Piracicaba	4D–07	445	10616				

QUADRO 1 – Funções alométricas para os principais rios da Bacia do Piracicaba, para os tipos de descargas características

De conformidade com a disposição do Quadro I, os resultados alométricos dos expoentes (b) indicam que o débito aumenta mais rapidamente que suas respectivas áreas, para os débitos específicos; ou seja, do Camanducaia até o Piracicaba, passando pelo Jaguari e Atibaia.

Com relação ao rio Camanducaia, pode-se dizer que, para os débitos de 25, 50 e 75%, os resultados do crescimento alométrico são negativamente equilibrados. Porém, para o caso de 95% o resultado apresentado revela que seu débito cresce na menor taxa alométrica dos rios estudados (0,19). Para o Jaguari, ao contrário do Camanducaia, o seu equilíbrio máximo ocorre na descarga específica de 95%, onde encontramos a isometria.

O rio Atibaia tem seus valores para os débitos específicos pouco abaixo da isometria, indicando, portanto, um certo equilíbrio entre seu débito e sua área de drenagem. Para os débitos de 95%, entretanto, seu expoente (b) é maior que a unidade, indicando que o débito cresce mais rapidamente que sua área de drenagem.

Para o Piracicaba, nota-se em todos os seus débitos específicos que seu crescimento alométrico é positivo, com exceção dos débitos ocorridos em 75% das vezes que esteve abaixo de um, porém muito próximo (0,92). Em 95% dos débitos diários analisados, seus débitos tiveram um crescimento alométrico superior ao de sua área.

Tendo encontrado esses resultados através de um método matemático, sendo, portanto, indicadores de tais procedimentos, devemos procurar as causas desses acontecimentos. As sub-bacias dos rios Atibaia e Jaguari, que são os principais formadores do rio Piracicaba, estão muito próximas em suas características de crescimento alométrico e de isometria e isso pode ser visto da seguinte maneira. Ambas as sub-bacias encontram-se localizadas em áreas climaticamente próximas, com poucas alterações em seus conjuntos. O mesmo não se pode dizer com relação à sua litologia, mesmo assim possibilitam a manutenção de débitos e fluxos, constantes em toda área.

Para o rio Camanducaia, o crescimento alometricamente negativo pode ser explicado pelo fato de estar sua bacia localizada em terrenos cristalinos do Planalto Atlântico, mais úmido, correndo em direção à Depressão Periférica, onde o total pluviométrico é menor e o aumento do valor absoluto das temperaturas indicam a acentuação diferenciada na distribuição das chuvas. Esses elementos justificam o aparecimento de expoentes menores que um, nas equações matemáticas, indicando que a taxa relativa de crescimento (b) é alometricamente negativa, ou seja o seu débito cresce relativamente menos que sua área.

Para o rio Piracicaba, quanto ao trecho examinado, ou seja, entre as estações fluviométricas de Carioba, no município de Americana e de Artemis, no município de Piracicaba, o crescimento alométrico foi positivo, diferentemente do que aconteceu com o resto da maioria das funções exponenciais calculadas para os outros rios.

Na realidade, analisando-se a carta topográfica, nota-se a presença das elevações das escarpas do Planalto Ocidental, dispostos e alinhados no sentido geral norte-sul, antepondo-se ao vale formado pelo Tietê e Piracicaba, por onde penetram as correntes circulatórias regionais de sentido nordeste e leste, podendo-se prever as conseqüências que trazem para as áreas próximas a esse alinhamento do relevo. Portanto, o efeito orográfico, principalmente na primavera e verão, provocam intensos aguaceiros, pois os ventos são obrigados a nova ascensão (MONTEIRO, 1971). Esse fato acarreta o aparecimento de inúmeros canais de escoamento superficial, que irão dar origem ao rio Corumbataí, que segue o mesmo sentido do "front" da Cuesta, em direção ao rio Piracicaba. Portanto, o débito do rio Piracicaba, neste trecho, cresce alometricamente mais rápido que sua área.

Entre as constatações que a análise efetuada permitiu, acresce uma de grande importância. Pelos resultados obtidos através da equação alométrica, é possível uma suposição ou prognóstico. Se o débito do rio Piracicaba tivesse um crescimento alométrico negativo ou isométrico durante o período analisado, tal como ocorre com os outros rios de sua bacia que foram analisados, seus problemas seriam ainda mais agravados. Considerada a utilização de suas águas para os diversos fins sociais, tais problemas trariam sérias conseqüências à população, principalmente durante o período da estiagem.

Finalizando, há que ser lembrada a necessidade de se considerar a técnica como meio e não como fim. E, enquanto meio, recomendá-la para outros setores de estudo da ciência geográfica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BULL, William B. Allometric change of landforms. **Geol. Soc. Amer. Bulletin, 86** (11):1489-98, 1975.

BULL, William B. Transformação alométrica em formas de relevo. **Notícia Geomorfológica,** Campinas, **18**(35):3-44, 1978.

CHRISTOFOLETTI, Antonio. **Análise de sistemas em Geografia.** São Paulo, Hucitec – EDUSP, 1979.

FELTRAN FILHO, Antonio. **Contribuição à análise fluviométrica da bacia do rio Piracicaba.** Rio Claro, UNESP, Instituto de Geografia, 1982. (Tese, Mestrado).

FAULKANER, Hazel. An Allometric Growth Model for Competitive Gullies, Zeits. **fur Geomorphologie,** Supplementband 20, 1974.

GOULD, Stephen J. Allometry and Size in Ontogeny and Phylogeny. **Ekistics, 36** (215):253-62, 1973.

LAMARCHE, R. Um modele d'analyse chrono-spatiale geographique: la croissance allométrique dans le reseau urbain Canadien, **Géoscope,** Ottawa, **4** (1):40-77, 1973.

MONTEIRO, Carlos Augusto F. **A dinâmica climática e as chuvas do Estado de São Paulo, um estudo geográfico sob forma de Atlas.** São Paulo, USP, Instituto de Geografia, 1971.

MOSLEY, M.P. & PARKER, R.S. Allometric Growth: a Useful Concept in Geomorphology? **Geol. Soc. America Bulletin, 83** (12):3669-74, 1972.

RAY, D. Michael. The Allometry of Urban and Regional Growth, in "Proceedings of the Commission on Regional Aspects of Development", **Union Géographique Internationale,** :345-369. 1974.

RAY, D. M., VILLENEUVE, P.Y. & ROBERGE, R.A. Fundional Prerequisites Spatial Diffusion and Allometric Growth. **Economic Geography, 50** (4): 341-51, 1974.