CRITÉRIOS ADOTADOS NOS EUA E NA EUROPA, PARA A ANALISAÇÃO DAS PRECISÕES FOTOGRAMÉTRICAS

CEL. PAULO MORETSOHN BRANDI

1.0 — **INTRODUÇÃO**

1.1 — O assunto é uma adaptação das conclusões teóricas de autoria de **RICHARD FINITERWALDER** e que se acham publicadas em números da revista "Photogrammetric Engeenering". O autor mostra as relações existentes entre o **Fator C,** adotado nos E.U.A., e o **êrro médio quadrático,** comumente usado na Europa, para as avaliações das precisões das medidas fotogramétricas.

1.2 — Demonstra que o **Fator C** é determinado, normalmente, com o auxílio de numerosos pontos de apoio — fornecidos diretamente pelos trabalhos de campo — dispostos ao acaso. Ainda que os valôres das discrepâncias encontradas se enquadrem na lei da distribuição dos erros, de Gauss, guardando, em conseqüência, uma relação bem definida com o **êrro médio quadrático.** Conclui, conseqüentemente, que os dois processos são bàsicamente iguais.

1.3 — O autor demonstra que a eqüidistância mínima a adotar **não** deverá ser menor que 3,3 vêzes o maior **êrro médio quadrático,** a fim de assegurar a correta representação do modelado do terreno.

Admite que o **Fator C** seja mais adaptável aos levantamentos extensivos executados nas Américas e que o **êrro médio quadrático** seja mais conveniente aos levantamentos detalhados, em uso na Europa.

2.0 — **GENERALIDADES**

2.1 — É geralmente admitido que haja grandes diferenças entre as maneiras de analisar as precisões das medidas fotogramétricas, adotadas nos E.U.A. e as em uso na Europa.

De fato, à primeira vista, as diferenças parecem ser muito grandes pois que, nos E.U.A., o meio usual adotado é função do chamado **Fator C,** ao passo que na Europa, para a finalidade, é usado o critério do **êrro médio quadrático,** que se baseia na lei da propagação dos erros, de Gauss.

2.2 — Na Europa, o **Fator C** é considerado normalmente como sendo processo de avaliação de caráter empírico, carente de fundamentos teóricos — matemáticos profundos; por outro lado, nos E.U.A., o **êrro médio quadrático** não é normalmente usado, por ser considerado como critério muito complicado.

2.3 — **RICHARD FINITERWALDER,** em complemento à palestra feita no decorrer do Congresso Internacional de Fotogrametria, realizado em Washington, em 1952, já esclarecera o assunto, focalizando os seguintes tópicos:

2.3.1 — Relações estreitas entre os dois processos e o fato de as mesmas estarem baseadas na lei dos erros, de Gauss;

2.3.2 — Conversão de um processo em outro;

2.3.3 — Diferenças reais entre os dois processos.

2.4 — Antes de abordar os assuntos acima expostos, é conveniente relembrar as exigências de precisão que a carta topográfica regular deve satisfazer. Conforme resolução aprovada na III Reunião Pan-Americana de Consulta sôbre Cartografia, realizada em Caracas, ano 1946, e integralmente adotada nas Américas, as ditas exigências são as seguintes, concisamente apresentadas:

1ª — 90% dos pontos testados, relativos a acidentes nítidos no terreno, **não devem apresentar** afastamentos das suas reais posições, que sejam superiores a $\pm$ 0,5 mm;

2ª — 90% das altitudes, obtidas por interpolação entre as curvas de nível da carta topográfica, **devem apresentar** êrro menor que a metade da eqüidistância adotada, não podendo nenhum dêles exceder esta eqüidistância.

3.0 — **RELAÇÕES ENTRE OS DOIS PROCESSOS E O FATO DE OS MESMOS ESTAREM BASEADOS NA LEI DOS ERROS, DE GAUSS.**

3.1 — Segundo o "Manual of Photogrammetry", página 262, edição 1952, publicação da Sociedade Norte-Americana de Fotogrametria, o **Fator C** é definido pela seguinte relação:

$$C = \frac{h}{E} \quad (1)$$

onde:
h = altura de vôo, da cobertura aerofotogramétrica;
E = menor eqüidistância que pode ser corretamente restituída.

3.2 — Nos E.U.A., a precisão fotogramétrica altimétrica é definida, pela ordenação dos erros que estão abaixo de limite fixado, ou seja, 90%, como já verificamos.

RICHARD FINITERWALDER, em artigo publicado em **"Photogrammetric Engeenering"**, ano 1954 — baseando-se em trabalhos de **J. V. SHARP,** publicados na mesma revista, ano 1951 —, mostra, apoiando-se na lei dos erros de Gauss, que para a referida exigência altimétrica ser satisfeita é preciso que a eqüidistância adotada **não seja menor** que 3,3 vêzes o maior êrro médio quadrático, obtido pelo processo já referido, isto é, por interpolação entre curvas de nível. Assim:

$$E \geq 3{,}3 \text{ m} \quad (2)$$

Igualmente, para uma determinada eqüidistância, o maior êrro médio quadrático tolerável será:

$$M \leq \frac{E}{3{,}3} = \pm 0{,}3 \text{ E} \quad (3)$$

3.3 — Verifiquemos o exposto, com o auxílio de uma forma simples da teoria das probabilidades, retirada de HANDBUCK DER VERMESSUNGSKUNDE, JORDAN — EGGERT, página 565, 6 ed., STUTTGART 1910.

Dada uma série qualquer de erros, que satisfazem a lei de Gauss, os valôres percentuais, N por cento (N%) das ordenações dos erros que são inferiores a valôres pré-fixados, correspondentes a **n** vêzes o **êrro médio** quadrático, é dado por:

$$N\% = 100 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(n - \frac{n^3}{6} + \frac{n^5}{40} - \frac{n^7}{336} + \frac{n^9}{3456} - \frac{n^{11}}{58556}\right) \quad (4)$$

A fórmula acima permite que sejam fàcilmente calculados, para valôres dados de **n** vêzes o êrro médio, os correspondentes valôres de N%, e os tabelares, conforme mostra a tabela abaixo:

TABELA I

n	N%	n	N%
1,00	68,3	2,33	97,8
1,66	90,0	3,00	99,7
2,00	95,6	3,33	99,99

A tabela I mostra que em 90,0% dos casos, os erros são inferiores a **1,66 x m.** Conforme a exigência da precisão altimétrica, já referida, de que 90% dos erros devem ser menores que a metade da eqüidistância adotada — E —, têm-se:

$$1{,}66m \leq \frac{E}{2} \quad (5)$$

ou

$$E \geq 3{,}3 \times m \quad (6)$$

A demonstração acima torna claro que o valor da eqüidistância mínima, fixada por J. V. SHARP e analisado por RICHARD FINITERWALDER, fundamenta-se não só nas exigências da precisão estabelecida em Caracas, como também na teoria das probabilidades.

3.4 — Verifiquemos a seguir as relações existentes entre o **Fator C** e o **êrro médio** quadrático.

Substituindo-se em (1), E, por seu valor dado em (6), virá:

$$C = \frac{h}{3{,}3xm} \quad (7)$$

Verifica-se em (7) que o Fator C não é mais dado diretamente em função de E, mas sim em função de 3,3 vêzes o êrro médio quadrático, **M.**

Já verificamos que a constante 3,3 foi deduzida com base na lei de erros de Gauss e na teoria das probabilidades e que **m,** como veremos, se fundamenta no método dos mínimos quadrados.

Conseqüentemente, pode-se concluir que o Fator C está realmente baseado na lei citada e no método dos mínimos quadrados.

3.5 — Na fotogrametria européia o êrro médio não é obtido, usualmente, pela ordenação dos erros cujos valôres se situam abaixo de um limite fixo; êle é determinado em função de todos os erros de uma série qualquer, por meio da singela fórmula do êrro médio quadrático:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v\ v]}{n - 1}} \quad (8)$$

É de tôda a conveniência mencionar que na Europa, na investigação da precisão do fator altimétrico, **m,** é levado em consideração o ângulo de inclinação do terreno, conforme a seguinte fórmula de KOPPE:

$$m = a + b \operatorname{tg}\alpha$$

Contudo, normalmente em fotogrametria, o coeficiente **b** é sempre muito menor do que **a** e como **tg** α é, também comumente, menor do que a unidade, pode-se tomar como valor de **m** o dado por (8).

3.6 — Verifica-se que a incerteza **M,** na determinação do êrro médio por (8) é função da quantidade **n** de dados (erros), isto é, quanto mais numerosos êsses, maior é a precisão obtida na determinação de **M.**

Porém, é possível avaliar por (8) o êrro médio, mesmo dispondo-se de número relativamente pequeno de dados (erros). A incerteza **M** é definida por:

$$M = \pm m \sqrt{\frac{1}{2\,n}} \quad (9)$$

Como exemplo: sendo dado n = 10, a incerteza **M,** na determinação de êrro médio calculado por (8) será:

$$M = \pm m \sqrt{\frac{1}{20}} = \pm \frac{m}{4{,}4}$$

Isto quer dizer que, nas condições mais desfavoráveis, como a do caso, a incerteza no valor de **m** dado por (8) não alcançará a 1/4 m.

4.0 — CONVERSÃO DE UM PROCESSO EM OUTRO

4.1 — Consideremos os dois casos:

1º — Sendo atribuído a um restituidor Fator C = 1300, pede-se o valor correspondente do êrro médio quadrático.

De (7) tira-se:

$$m = \frac{h}{3{,}3\ C} = \frac{h}{3{,}3 \times 1300}$$

$$= 0{,}233\ \%\ h = 0{,}23\ \%\ h$$

Exemplo: Considerando-se a altura média de vôo, da cobertura aerofotogramétrica realizada pelo esquadrão AST-10, ou seja 9100 m, ter-se-á:

$$m = 9{,}1 \times 0{,}233 = \pm 2{,}12\ m$$

2º — Sendo dado o êrro médio quadrático — **m,** pede-se o valor correspondente do Fator C.

A fórmula (7) fornece diretamente:

$$C = \frac{h}{3{,}3 \times m}$$

Exemplo: Considerando-se os mesmos dados do anterior exemplo, virá:

$$C = \frac{9100}{3{,}3 \times 2{,}12} = 1300$$

4.2 — Estas conversões, além de serem muito fáceis, são exatamente corretas. Torna-se claro que o Fator C e o êrro médio correspondente indicam, cada qual a seu modo, a mesma precisão para determinado aparelho restituidor.

4.3 — Evidentemente, para poder-se considerar tanto o Fator C como o êrro médio quadrático — m — como sendo valôres seguros, é necessário que se tenha informações corretas sôbre os processos de determinação dos mesmos. Isto porque, nas suas determinações, além da influência preponderante da precisão do instrumento, elas são afetadas por outros fatôres, tais como: a qualidade do material fotográfico e dos cuidados no seu manuseio, a habilidade média dos restituidores, a qualidade da objetiva da câmara fotogramétrica, a maior ou menor densidade do apoio de campo etc.

Na falta de tais informações, os valôres dos mesmos tornam-se um tanto inseguros e é prudente usá-los com precauções.

Contudo, mesmo sob êste último aspecto, ambos os processos são totalmente correspondentes.

5.0 — DIFERENÇAS REAIS ENTRE OS DOIS PROCESSOS

5.1 — Há apenas uma diferença real entre os dois processos, que é a seguinte:

O Fator C, em sua expressão original (1), é dado em função da menor eqüidistância **E,** que pode ser corretamente restituída, ao passo que o êrro médio

CRITÉRIOS ADOTADOS NOS EUA E NA EUROPA, PARA A ANALISAÇÃO DAS PRECISÕES FOTOGRAMÉTRICAS

quadrático, definido por (8), é dado em função da altura de vôo, **h.**

Porém, substituindo em (1) o valor de **E**, dado por (6), tal diferença deixa de existir.

5.2 — É conveniente lembrar que na Europa, no passado, mais precisamente na Alemanha, o êrro médio vertical era relacionado à eqüidistância. O manual "Vorschrift für die Topog Abt des Preuss. Landesaufnahme" (1898) determinava que os desvios admissíveis nas curvas de nível (três vêzes o desvio médio) não poderiam exceder a eqüidistância; entretanto, essa maneira de definir a precisão altimétrica foi abandonada. Contudo, verifica-se que há diferença acentuada em relação aos casos atuais, em virtude da eqüidistância variar muito, nas fôlhas prussianas, pois ia de 1,25 m a 20 m.

6.0 — **CONCLUSÕES**

6.1 — Incluindo a eqüidistância mínima, corretamente locável, E = 3,3 m, na definição da precisão fotogramétrica, as normas em uso nas Américas propiciaram uma regra prática e relativamente segura para a escolha correta da eqüidistância. **RICHARD FINITERWALDER** demonstrou que as curvas de nível da eqüidistância, E = 3,3m, acham-se afetadas por incertezas perceptíveis, notadamente quanto aos posicionamentos relativos das mesmas, que se acham sujeitos às influências das denominadas **incertezas diferenciais.**

6.2 — Verifiquemos as conseqüências resultantes destas últimas incertezas. Dado o êrro médio — m — no posicionamento de uma curva de nível e considerando-o como acidental, o êrro na distância entre duas curvas de nível vizinhas (que se manifesta variando o espaçamento entre as mesmas), conforme a singela lei da soma dos erros médios, é dado por:

$$Ma = \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2} \quad (10)$$

Da combinação de (6) com (10), tira-se:

$$E = \frac{3{,}3 \text{ ma}}{\sqrt{2}} \approx 2{,}3 \text{ ma} \quad (11)$$

— Conforme se verifica na Tabela I, o valor 2,33 m do êrro não será atingido em 97,8% de todos os casos. Evidentemente, nos 2,2% restantes casos, o êrro igualará ou excederá o valor citado.

6.3 — Qual o significado do exposto?

Significa, como conseqüência da incerteza referida, que dado o êrro da curva de nível — m —, o êrro no espaçamento entre duas curvas de nível vizinhas será ma = m $\sqrt{2}$. Verificamos que o valor 2,33 m do êrro não será atingido em 97,8% de todos os casos. Conforme as exigências de precisão altimétrica já referidas, virá:

$$2{,}33\text{m} = \leq \frac{E}{2} \quad \text{e}$$

$$E = \geq 4{,}66\text{m}$$

expressão que, combinada com (10), dará:

$$E = \frac{4{,}66 \text{ ma}}{\sqrt{2}} = 3{,}3 \text{ ma} \quad (12)$$

Conseqüentemente, em 97,8% de todos os casos o maior valor tolerável para ma = m $\sqrt{2}$, será inferior ao da eqüidistância adotada e o valor de E dado em (12) continuará sendo como o da menor eqüidistância que poderá ser corretamente locada.

— Porém, também significa, em 2,2% dos casos restantes, que o êrro relativo ao afastamento entre duas curvas de nível vizinhas igualará ou excederá o valor da eqüidistância adotada e que, nestas condições, as curvas de nível tocar-se-ão ou cruzar-se-ão.

A Tabela I mostra que em 100,0% — 97,8 = 2,2% de todos os casos, os erros serão inferiores a 3,33 x m.

Considerando (5) (6) e (10) a menor eqüidistância locável, será:

$$E = \frac{6{,}66 \text{ ma}}{\sqrt{2}} = 4{,}7 \text{ ma} \quad (13)$$

6.4 — Para uma melhor compreensão do exposto, apresentaremos os seguintes exemplos:

1º — Dados: um restituidor de Fator C = 800, a altura de vôo, h = 9100m e a eqüidistância desejada, E = 20m; calculemos o êrro médio, **m.**

De (7), têm-se:

$$m = \frac{9100}{3{,}3 \times 800} = \pm 3{,}4 \text{ m}$$

Porém, em conseqüência das incertezas já referidas, ter-se-á, de (10):

$$ma = 3{,}4\sqrt{2} = \pm 4{,}8\text{m}$$

Tal êrro é inferior ao valor do êrro máximo tolerável, para E = 20m, conforme se verifica de (3). Para o caso, a menor eqüidistância que pode ser corretamente locada, será:

$$E = 3{,}3 \times \text{ma}$$

Conseqüentemente, em 90% dos casos, o êrro permanecerá inferior ao valor da meia-eqüidistância e, em 7,8% dos casos restantes, permanecerá inferior ao valor da eqüidistância desejada, conforme se verifica de:

$$3{,}3 \times 4{,}8 = 16 \text{ m}$$

2º — Tomemos os mesmos dados do exemplo anterior, exceto para **m,** que consideramos entre 3 x m e 3,3 x m. Da Tabela I, verifica-se que tais erros não serão atingidos em 99,7 e 99,9% dos casos e que também é correspondente a 100% — 97,8% = 2,2% de todos os casos.

As menores eqüidistâncias locáveis, dado por (5) (6) e (10), serão:

$$E = 4{,}2 \text{ ma}$$

e

$$E = 4{,}7 \text{ ma}$$

Tomando do exemplo anterior, o valor de ma = 4,8 m verifica-se que os erros máximos entre duas curvas de nível vizinhas, de eqüidistância E = 20 m, serão:

$$4{,}2 \times 4{,}8 = 20 \text{ m}$$

e

$$4{,}7 \times 4{,}8 = 23 \text{ m}$$

Portanto, no caso figurado, verifica-se que as curvas de nível tocar-se-ão e cruzar-se-ão.

3º — Dados: como restituidor, o discutido Estereotopo, a altura de vôo, $h = 9100$ m, e as eqüidistâncias $E = 20$ m e $E = 40$ m.

— Segundo testes realizados, em 1957, pelo Army Map Service (E.U.A.) o Fator C do Estereotopo é **359 ≈ 350.**

A precisão da medida dêste aparelho, isto é, o seu êrro, para o caso, dada por (7) é:

$$m = \frac{9100}{3{,}3 \times 3{,}50} = 7{,}87 \text{ metros.}$$

Para a eqüidistância $E = 20$ m, tal êrro é superior ao êrro máximo tolerável, dado por (3), que é:

$$m = 0{,}3 \times 20 = 6 \text{ metros}$$

Verifica-se que, para o caso figurado, o referido restituidor não tem condições para resolver a eqüidistância $E = 20$ m porque a menor eqüidistância locável pelo mesmo será, conforme (2):

$$E = 3{,}3 \times 7{,}87 = 26 \text{ metros}$$

Não consideraremos as influências das incertezas diferenciais, porque òbviamente será desnecessário.

— Para $E = 40$ m, o êrro em pauta é inferior ao êrro máximo tolerável, isto é: $m = 0{,}3 \times 40 = 12$ m.

Considerando, agora, as influências referidas, virá:

$$ma = 7{,}87\sqrt{2} = 11{,}1 \text{ metros, ainda inferior a 12 m.}$$

Para o exemplo figurado, o menor valor E que pode ser corretamente locado, em 97,8% dos casos segundo (12) será:

$$E = 3{,}3 \times 11{,}1 = 37 \text{ m} \quad \text{ou seja} \quad E = 40 \text{ m}$$

Nos 2,2% dos casos restantes, o êrro variará de:

$$4{,}2 \times 11{,}1 = 46{,}6 \text{ m a } 4{,}7 \times 11{,}1 = 51{,}2 \text{ m}$$

4º — Dados: restituidor do Fator C $= 600$, a altura de vôo, $h = 9100$ m e as eqüidistâncias $E = 20$ m e $E = 40$ m.

A precisão de medida de tal restituidor, segundo (7) é:

$$m = \frac{9100}{3{,}3 \times 600} = \pm\, 4{,}59 \text{ m}$$

O êrro na distância entre duas curvas de nível vizinhas de $E = 20$ m será, segundo (10):

$$ma = 4{,}59 \quad 2 = \pm\, 6{,}45 \text{ metros}$$

Tal êrro é ligeiramente superior ao maior êrro médio tolerável, definido por (3) ou seja:

$$m = 0{,}3 \times 20 = 6 \text{ m}$$

Para o caso, a menor eqüidistância que poderá ser corretamente locada dado por (12), será:

$$E = 3{,}3 \times 6{,}49 = 21{,}45 = 22 \text{ m.}$$

Êste valor de E mostra que, se as incertezas diferenciais forem tomadas em consideração, um restituidor do **Fator C** $= 600$ não satisfará as exigências da eqüidistância $E = 20$ m, mas que satisfará folgadamente as da eqüidistância $E = 40$ m, porque, no caso, o êrro máximo $3{,}3 \times m$, (Tabela I) não será atingido em 99,99% de todos os casos, conforme nos mostra (13):

$$ma = 4{,}7 \times 6{,}49 = 30{,}5 \text{ m}$$

6.5 — As conclusões teóricas definidas no item (6.3) e os exemplos concretos de (6.4) mostram que, como conseqüência das incertezas referidas, o êrro relativo à incerteza da medida, em casos, poderá adulterar a representação morfológica regional, causando a falsa impressão de terreno abrupto ou de declive exagerado. Entretanto, o êrro médio **ma**, no tocante ao espaçamento entre duas curvas de nível vizinhas, normalmente não se apresenta de forma inteiramente imprevisível ou acidental, como acontece com outras fontes de erros, que comumente afetam essas curvas; por isto, as justaposições e os cruzamentos não ocorrerão com a freqüência estabelecida pelo cálculo.

Apesar da ressalva, as deformações inerentes à eqüidistância $E = 3{,}3$ m ainda são sensíveis. Elas poderão ser atenuadas em parte, pelo bom acêrto das curvas, feito diretamente à mão e à vista, pelo operador da restituição; passarão, então, a corresponder, razoàvelmente bem, às formas do terreno.

Porém, no caso de eqüidistância menor que $E = 3{,}3$ m, é fora de dúvida que não será mais possível proceder da forma desejada e necessária à correta representação do modelado regional.

6.6 — Na determinação do Fator C, o limitado valor da eqüidistância $E = 3{,}3$ m não é familiar ao fotogrametrista europeu.

Entretanto, para os países americanos, é fàcilmente compreensível que no levantamento e mapeamento dos seus territórios, comumente enormes, a sua adoção se tenha tornado necessária.

Na Europa, normalmente, os levantamentos realizados são detalhados; por isso o êrro médio exigido, via de regra, é menor que o necessário aos países americanos.

A fim de atingir a precisão desejada, em posição e altura, normalmente, são usados aparelhos restituidores de 1ª ordem.

Assim, na Europa, para relacionar a eqüidistância **E** ao êrro médio, **m**, não se tomaria $E = 3{,}3$ m como nas Américas, mas dar-se-ia a **E** valôres entre 5 a 20 vêzes e do êrro médio, conseqüentemente, o modelado do terreno fica definido mui precisamente pelas curvas de nível.

6.7 — Na Europa, a eqüidistância é escolhida em função das considerações de ordem fotogramétrica, de menor pêso, e das de ordem topográfica, de maior pêso. Para os terrenos de fraco relêvo usa-se eqüidistância menor que as para os terrenos movimentados e íngremes. Por exemplo, na carta topográfica alemã, escala 1:100.000, a eqüidistância é fixada da seguinte forma:

$E = 10$ metros, terrenos de fraco relêvo,
$E = 20$ metros, terrenos movimentados,
$E = 40$ metros, terrenos montanhosos.

Desta forma fica satisfeita a regra, ainda não bem compreendida entre nós, de ter-se curvas de nível fàcilmente legíveis, em todos os casos.

6.8 — Quando o terreno é montanhoso e escarpado, é importante que, na carta, as curvas de nível não se apresentem muito juntas, sendo a riqueza e a fidelidade das formas do terreno preservadas pelas cotas e pelo aspecto do seu conjunto.

Nos terrenos de fraco relêvo, ao contrário, o importante é diminuir o espaçamento entre as curvas de nível, para permitir que estas representem realmente o modelado regional.

7.0 — CONCLUSÕES FINAIS

7.1 — Resumindo o exposto, pode-se concluir que os processos para avaliar a precisão fotogramétrica, tanto o que adota o **Fator C** como o que usa o êrro médio quadrático, estão baseados na lei de propagação dos erros, de Gauss, e que são de igual valor, em sua essência.

Tal conclusão se verifica, particularmente, na determinação do Fator C, fórmula (7), em virtude de ser possível, de forma correta, converter um processo em outro.

Ainda o Fator C permite uma regra prática e relativamente segura para a escolha da eqüidistância desejada, se bem que diferente da maneira usualmente adotada na Europa. Tal fato é compreensível, pois que nas Américas os levantamentos são, normalmente, extensivos ao passo que na Europa são mais detalhados.