

ESQUEMA DE CHOLESKY PARA SOLUÇÃO DOS SISTEMAS LINEARES

GEN. MOYSÉS CASTELLO BRANCO FILHO
Prof. do IME

Apresentamos uma análise original muito simples das fórmulas de Cholesky para redução das equações normais de Gauss.

Os métodos convencionais de Gauss e Cholesky para resolução dos sistemas lineares — álgebra clássica — são de mais fácil realização em máquinas de calcular que os matriciais e iterativos utilizados nos computadores eletrônicos. Têm aplicação no ajustamento de redes geodésicas locais. Tratamos do as-

sunto em "Aplicação dos Métodos Matriciais e Iterativos à Compensação Geodésica", em preparo.

1.0 — EQUAÇÕES NORMAIS DE GAUSS

O esquema de Cholesky de redução das Equações Normais é o mesmo de Gauss, porém o algoritmo de eliminação das incógnitas é $\frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}$ e não $\frac{[ab]}{[aa]}$

As equações normais — 3 x 3 — são escritas:

$$\begin{array}{lclclclclcl} 1a. & N \dots & [aa] & x & + & [ab] & y & + & [ac] & z & + & [ad] & = & 0 \\ 2a. & N \dots & [ab] & x & + & [bb] & y & + & [bc] & z & + & [bd] & = & 0 \\ 3a. & N \dots & [ac] & x & + & [bc] & y & + & [cc] & z & + & [cd] & = & 0 \end{array}$$

$$\text{PRIMEIRA REDUÇÃO } 1a. N / \sqrt{[aa]} \times [ab] / \sqrt{[aa]}$$

subtraída da 2a. N:

Dividindo a 1a. N por $\sqrt{[aa]}$:

$$\frac{1a. N}{\sqrt{[aa]}} \dots \frac{[aa]}{\sqrt{[aa]}} x + \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} y + \frac{[ac]}{\sqrt{[aa]}} z + \frac{[ad]}{\sqrt{[aa]}} = 0$$

Adotamos os mesmos símbolos de Cervino — Resolución de Ecuaciones Normales en Geral pelo Método de Cholesky, 1963 — Univ. Montevideo:

$$\sqrt{[aa]} = A_1; \quad \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} = B_1; \quad \frac{[ac]}{\sqrt{[aa]}} = C_1$$

$$\frac{[ad]}{\sqrt{[aa]}} = D_1$$

Escreve-se:

$$1a. N/A_1 \dots \frac{[aa]}{\sqrt{[aa]}} x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

Multiplicando por B_1 :

$$1a. N/A_1 \times B_1 \dots \frac{[aa]}{\sqrt{[aa]}} - \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} x + B_1 B_1 y + B_1 C_1 z + B_1 D_1 = 0$$

Ou para subtrair da 2a. N:

$$- 1a. N/A_1 \times B_1 \dots - \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} x - B_1 B_1 y - B_1 C_1 z - B_1 D_1 = 0$$

$$+ 2a. N \dots + [ab] x + [bb] y + [bc] z + [bd] = 0$$

Resulta:

$$1a. R. 1 \dots ([bb] - B_1 B_1) y + ([bc] - B_1 C_1) z + ([bd] - B_1 D_1) = 0$$

Ainda primeira redução: $1a. N/A_1 \times C_1$ e subtraída da 3a. N:

$$2a. R. 1 \dots ([bc] - B_1 C_1) y + ([cc] - C_1 C_1) z + ([cd] - C_1 D_1) = 0$$

As equações 1a. R. 1 e 2a. R. 1 consignam o sistema R. 1 referente à primeira redução.

Anàlogamente:

$$1a. R \ 1/ \ B_2 \ \dots\dots \frac{[bb] \ B_1 \ B_1}{B_2} \ y + \frac{[bc] \ - \ B_1 \ C_1}{B_2} \ z + \frac{[bd] \ - \ B_1 \ D_1}{B_2} = 0$$

Aceitando C_2 , D_2 será

$$1a. R \ 1/ \ B_2 \times C_2 \ \dots\dots \frac{[bb] \ - \ B_1 \ B_1}{\sqrt{[bb] \ - \ B_1 \ B_1}} \cdot \frac{[bc] \ - \ B_1 \ C_1}{\sqrt{[bb] \ - \ B_1 \ B_1}} \ y +$$

$$C_2 \ C_2 \ D_2 \ C_2 = 0$$

Ou para subtrair da 2a. R. 1

$$- \ 1a. R. / \ B_2 \times C_2 \ \dots\dots ([bc] \ - \ B_1 \ C_1) \ y - \ C_2 \ C_2 \ - \ C_2 \ D_2 = 0$$

$$+ \ 2a. R. \ \dots\dots + ([bc] \ - \ B_1 \ C_1) \ y + ([cc] \ - \ C_1 \ C_1 \ z + ([cd] \ - \ C_1 \ D_1) = 0$$

Resulta:

$$1a. R. \ 2 \ \dots\dots ([cc] \ - \ C_1 \ C_1 \ - \ C_2 \ C_2) \ Z + ([cd] \ - \ C_1 \ D_1 \ - \ C_2 \ D_2) = 0$$

As equações 1a. R: 2 e 2a. R: 2 formam o sistema R: 2 referente à segunda redução. (No caso, equação única 1a. R. 2)

2.0 — TERMOS DE PROVA

Pelo mesmo desenvolvimento chega-se à expressão da última incógnita Z e aos termos de prova. No sistema 3X3 de equações normais:

$$C_3 = \sqrt{[cc] \ - \ C_1 \ C_1 \ - \ C_2 \ C_2}$$

$$D_3 = ([cd] \ - \ C_1 \ D_1 \ - \ C_2 \ D_2) \div C_3$$

$$Z = \frac{- D_3}{C_3}$$

SEGUNDA REDUÇÃO

Faz-se:

$$\sqrt{[bb] \ - \ B_1 \ B_1} = B_2$$

Térmos de prova:

$$1a. N \ \dots\dots ([aa] \ + \ [ab] \ + \ [ac] \ + \ [ad] \ = \ [as])$$

$$S_1 = \frac{[as]}{A_1}$$

$$2a. N \ \dots\dots ([ab] \ + \ [bb] \ + \ [bc] \ + \ [bd] \ = \ [bs])$$

$$S_2 = \frac{[bs] \ - \ B_1 \ S_1}{B_2}$$

$$3a. N \ \dots\dots ([ac] \ + \ [bc] \ + \ [cc] \ + \ [cd] \ = \ [cs])$$

$$S_3 = \frac{[cs] \ - \ C_1 \ S_1 \ - \ C_2 \ S_2}{C_3}$$

ESQUEMA DE CHOLESKY PARA SOLUÇÃO DOS SISTEMAS LINEARES

3.0 — SISTEMA REDUZIDO RESOLVENTE

As incógnitas Z, Y, X são obtidas no sistema reduzido resolvente por substituição inversa:

$$C_3 Z + D_3 = 0$$

$$C_2 Z + B_2 Y + D_2 = 0$$

$$C_1 Z + B_1 Y + A_1 X + D_1 = 0$$

A DSG e o Coast and Geodetic Survey, U.S., adotam o esquema "Gauss-Doolittle", em seus manuais geodésicos.

Estudamos o assunto em "Síntese do Cálculo das Compensações — Ed. DSG 1968".

O esquema de Cholesky é usado oficialmente pelo Serviço Geodésico do Uruguai (Resolución de Ecuaciones Normales em Geral pelo Método de Cholesky, 1963 — Univ. Montevideo).

4.0 — EXEMPLO

$$1a. N \dots\dots + 4 k_1 + 0 k_2 + 2 k_3 + 4 = 0$$

$$2a. N \dots\dots + 0 k_1 + 4 k_2 + 2 k_3 + 2 = 0$$

$$3a. N \dots\dots + 2 k_1 + 2 k_2 + 4 k_3 + 4 = 0$$

Têrmos de prova

$$1a. N \dots\dots 4 + 0 + 2 + 4 = + 10$$

$$2a. N \dots\dots 0 + 4 + 2 + 2 = + 8$$

$$3a. N \dots\dots 2 + 2 + 4 + 4 = + 12$$

Sistema reduzido resolvente

Do quadro (S. O):

$$+ 1, 4 \ 1 \ 4 \ 2 \ k_3 + 0, 7 \ 0 \ 7 \ 2 = 0$$

$$+ 1 \ k_3 + 2 \ k_2 + 1, 0 = 0$$

$$+ 1 \ k_3 + 0 \ k_2 + 2 \ k_1 + 2, 0 = 0$$

Resolvendo:

$$K_3 = - 0,50; K_2 = - 0,25; K_1 = - 0,75$$

	REDUÇÕES	1a. N	2a. N	3a. N	W	PROVAS
K ₁	$\sqrt{[aa]} = A_1$ — + 2,0000	$[aa]$ + 4,0000	$[ab]$ 0,0000	$[ac]$ + 2,0000	$[ad] = W_1$ + 4,0000	$[as]$ + 10,0000
K ₂	$[ab] / A_1 = B_1$ 0,0000	$\sqrt{[bb]} - B_1 B_1 = B_2$ — + 2,0000	$[bb]$ + 4,0000	$[bc]$ + 2,0000	$[bd] = W_2$ + 2,0000	$[bs]$ + 8,0000
K ₃	$[ac] / A_1 = C_1$ + 1,0000	$([bc] - B_1 C_1) \div B_2 = C_2$ + 1,0000	$\sqrt{[cc]} - C_1 C_1 - C_2 C_2 = C_3$ + 1,4142	$[cc]$ + 4,0000	$[cd] = W_3$ + 4,0000	$[cs]$ + 12,0000
	$[ad] / A_1 = D_1$ + 2,0000	$([bd] - B_1 D_1) \div B_2 = D_2$ + 1,0000	D_3 + 0,7072			
	SOMA + 5,0000	SOMA + 4,0000	SOMA + 2,1214	$D_3 = ([cd] - C_1 D_1 - C_2 D_2) \div C_3 = + 0,7072$		
	$[as] / A_1 = S_1$ + 5,0000	$([bs] - B_1 S_1) \div B_2 = S_2$ + 4,0000	S_3 + 2,1214	$S_3 = ([cs] - C_1 S_1 - C_2 S_2) \div C_3 = + 2,1214$		