AJUSTAMENTO DE POLIGONAL PELO CÁLCULO MATRICIAL

Cap. OSWALDO ARI ABIB
Aluno do 5.° ano de Engenharia - Geodésia - IME

I — INTRODUÇÃO

Ainda hoje no Brasil é bastante comum o ajustamento de poligonais pelo método intuitivo, fazendo-se inicialmente a distribuição dos erros de fechamento angular e, após, o linear.

O objetivo deste trabalho é apresentar o ajustamento de uma poligonal plana, pelo método dos mínimos quadrados, usando-se matrizes.

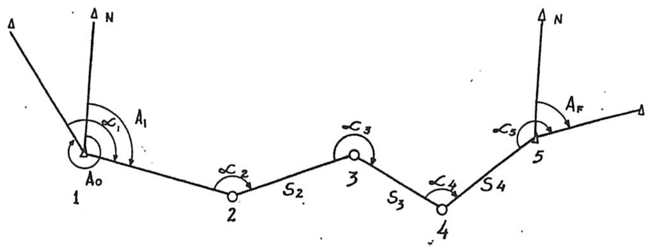
II — DESENVOLVIMENTO

O modelo matemático usado foi

$$F(X_A, L_A) = 0.$$

A nomeclatura aplicada é a convencional, conforme trabalho apresentado no número anterior desta revista, pelo Cap. Eng. Geo. Victorino Carvalho dos Santos, baseado no compêndio *Introduction to Adjustment Computation with Matrices* (Urho A. Uotila).

1 — *Equações de observação*



$$F_1 : Y_1 + S_1 \cos(A_0 + \alpha_1) - Y_2 = 0$$

$$F_2 : X_1 + S_1 \operatorname{sen}(A_0 + \alpha_1) - X_2 = 0$$

$$F_3 : Y_2 + S_2 \cos(A_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180) - Y_3 = 0$$

$$F_4 : X_2 + S_2 \operatorname{sen}(A_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180) - X_3 = 0$$

$$F_{2n-3} : Y_{n-1} + S_{n-1} \cdot \cos\left[A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha i - (n-2)\,180\right] - Yn = 0$$

$$F_{2n-2} : X_{n-1} + S_{n-1} \cdot \operatorname{sen}\left[A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha i - (n-2)\,180\right] - Xn = 0$$

$$F_{2n-1} : A_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 - (n-1)\,180 - A_F = 0$$

Sendo P_1 (X_1, Y_1) e Pn (Xn, Yn) pontos inicial e final da poligonal, temos ao total (n — 2) 2 incógnitas e (2n — 1) equações, havendo sempre abundância de 3 equações.

$$2 \text{ — Matriz } B = \frac{\delta F}{\delta L},$$

derivadas parciais em relação às observações, (Lb), que são as deflexões (α) e as distâncias (S). A dimensão de B é: (2n —1) (2n — 1).

B	α_1	S_1	α_2	— — —
F_1	$-S_1 \operatorname{sen}(A_0+\alpha_1)$	$\cos(A_0+\alpha_1)$	0	— — —
F_2	$-S_1 \cos(A_0+\alpha_1)$	$\operatorname{sen}(A_0+\alpha_1)$	0	— — —
F_3	$-S_2 \operatorname{sen}(A_0+\alpha_1+\alpha_2-180)$	0	$-S_2 \operatorname{sen}(A_0+\alpha_1+\alpha_2-180)$	— — —
	— — —	— — —	— — —	— — —
F_{2n-1}	1	0	1	— — —

$$3 \text{ — Matriz } A = \frac{\delta L}{\delta X},$$

derivadas parciais em relação às incógnitas (X_i, Y_i) sua dimensão é: (2n—1) (n—2)2 .

	Y_2	X_2	Y_3	X_3	— — —
F_1	—1	0	0	0	— — —
F_2	0	—1	0	0	— — —
F_3	1	0	—1	0	— — —
F_4	0	1	0	—1	— — —
	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —
F_{2n-1}	0	0	0	0	— — —

4 — O valor inicial de X (Xo) não pode ser qualquer, tendo em vista que as equações de observação não são lineares. Xo foi calculado usando as fórmulas convencionais do transporte de coordenadas.

5 — W = F (Lb, Xo), erro de fechamento, foi calculado substituindo Lb e Xo nas equações de observação.

6 — A matriz P tem as dimensões (2n—1) (2n—1). Ele é calculado em função do desvio padrão das observações. Por exemplo, numa poligonação de 2.ª ordem, a precisão das observações será:

— para a medida eletrônica dos lados — 1/200.000

— para a leitura dos ângulos — 3"

Para um lado de 1.000 m, o desvio padrão para a distância será $\sigma s = 5.10^{-3}$m e a variância $\sigma^2 s = 2{,}5.10^{-5}m^2$. Para os ângulos teremos

$$\sigma 2 = \frac{3''}{\rho''} = 1{,}5.10^{-5} \text{ rd}$$

e a variância $\sigma^2\alpha = 2{,}1.10^{-10}$ rd^2.

Considerando os lados sempre próximos de 1.000 m (se fossem diferentes, o raciocínio seria o mesmo, bastando calcular para cada um, o seu desvio padrão) e as observações independentes entre si, $\sigma ij = 0$, a matriz dos coeficientes de peso

$$Qij = \frac{\Sigma ij}{\sigma\, 0^2}$$

será, após as simplificações das potências:

Q	α_1	S_1	α_2	S_2	— — —
	$2{,}1.10^{-5}$	0	0	0	— — —
	0	2,5	0	0	— — —
	0	0	$2{,}1.10^{-5}$	0	— — —
	0	0	0	2,5	— — —
	—	—	—	—	— — —

A matriz P será a inversa de Q ou seja

$$P = Q^{-1}$$

P	α_1	S_1	α_2	S_2	— — —
	$4{,}7.10^4$	0	0	0	— — —
	0	0,4	0	0	— — —
	0	0	$4{,}7.10^4$	0	— — —
	0	0	0	0,4	— — —
	—	—	—	—	— — —

III — PROGRAMAÇÃO

Uma poligonal plana de ensaio foi montada e ajustada através um programa Fortran. A matriz P foi considerada unitária. A matriz A, B e P sendo rarefeitas, foram inicializadas a zero e complementadas dentro do programa, o qual nos fornece os valores das incógnitas ajustadas, o desvio padrão da unidade de peso e a matriz Variância — Covariância das incognitas.