IMPORTÂNCIA DO GEÓIDE EM GEODÉSIA CELESTE

Estudo apresentado pelo Professor Camil Gemael — Diretor do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná —, no "Seminário Internacional das Nações Unidas sobre aplicações em Cartografia de dados Geodésicos e de Sensoriamento Remoto obtidos por meios de Satélites Artificiais", realizado em S. José dos Campos, de 4 a 15 de novembro de 1974, e patrocinado pelo Instituto de Pesquisas Espaciais.

RESUMO

Em quase todos os sistemas geodésicos tem sido empregado, face à carência de informações geoidais, o método de desenvolvimento; é enfatizada a necessidade de abandonar tal procedimento, incompatível com a precisão das operações geodésicas modernas.

É apresentada uma carta geoidal para o Sistema Geodésico Brasileiro (elipsóide de Hayford; $\zeta = \eta = N = 0$ em Córrego Alegre) obtida por transformação do geóide de Fischer relativo ao Sistema Sul-Americano.

1 — SISTEMAS GEODÉSICOS

Um SISTEMA GEODÉSICO * pode ser caracterizado por cinco quantidades:

a) dois parâmetros definidores do elipsóide bi-axial de referência utilizado no transporte de coordenadas; por exemplo:

o semi-eixo maior *a*,
o achatamento *f* e

b) as duas coordenadas elipsóidicas do datum (latitude ϕ e longitude λ) e o azimute (A) de uma direção passante pelo datum; ou, alternativamente.

b') os três parâmetros definidores da *orientação do elipsóide;* por exemplo: as componentes principais do desvio da vertical e a altura geoidal:

$$\zeta = \phi_a - \phi_g$$

$$\eta = (\lambda_a - \lambda_g) \cos \phi = (A_a - A_g) \cot g\, \phi \qquad (1.2)$$

$$N = h - H$$

os índices servindo para distinguir as grandezas astronômicas (a) das geodésicas (g); *H* e *h* são, respectivamente, as altitudes *ortométrica* e *geométrica;* ou ainda:

b") as três coordenadas retilíneas geocêntricas do centro do elipsóide de referência.

No SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO a superfície de referência é o elipsóide bi-axial de HAYFORD [1] recomendado como "internacional" pela Associação Internacional de Geodésia na Assembléia de Madrid em 1924:

$$a = 6\,378{,}388 \text{ m}$$
$$f = 1{:}297$$

No datum, ou ponto origem, que é o vértice denominado Córrego Alegre, a exemplo do que ocorreu na maioria dos sistemas geodésicos existentes foi imposta a tangência entre o elipsóide e o geóide:

$$\zeta = \eta = N = 0 \qquad (1.3)$$

com a condição, sempre presente e garantida pela equação de Leplace, de os dois modelos terrestres admitirem eixos de rotação paralelos.

As coordenadas de Córrego Alegre são:

$$\phi_a = \phi_g = 19°50'14{,}91'' \text{ S}$$

$$\lambda_a = \lambda_g = 48°57'41{,}98'' \text{ W}$$

No SISTEMA GEODÉSICO SUL-AMERICANO (SAD: South American Datum 1967), oficializado na IX Assembléia Geral de IPGH em 1969, o datum é o vértice *Chuá* situado cerca de 90 km a nordeste de Córrego Alegre.

Ao contrário do datum brasileiro, o sul americano teve as componentes principais do desvio da vertical calculadas através de um ajustamento que envolveu grande número de estações astro-geodésicas resultando [2]:

$$\phi^a_g = 19°\ 45' \begin{matrix} 41{,}34'' \\ 41{,}65'' \end{matrix}\ \text{S}$$

$$\lambda^a_g = 48°\ 06' \begin{matrix} 07{,}80'' \\ 04{,}06'' \end{matrix}\ \text{W}$$

Em Chuá a ondulação geoidal foi arbitrada

$$N = 0,$$

e a superfície de referência adotada em os seguintes parâmetros:

$$a = 6\,378{,}160 \text{ m}$$
$$f = 1{:}298{,}25$$

* Utilizamos a expressão "sistema geodésico" com o mesmo significado que a maioria dos autores de língua inglesa atribui à palavra "datum"; e por datum entendemos simplesmente o "ponto origem" da triangulação.

Nos seus "sistemas nacionais" as nações sul-americanas adotam o elipsóide de HAYFORD porém com orientação particular em cada datum; o SISTEMA GEODÉSICO SUL-AMERICANO representa pois um grande passo no sentido de uma "unificação geodésica" que há muito se vem buscando.

O Sistema Geodésico Norte-Americano (North American 1927 Datum), que reúne o Canadá, Estados Unidos e México adota ainda como superfície de referência o elipsóide de Clarke 1866. Cogita-se agora da redefinição desse sistema, empreitada gigantesca que deverá se estender por uma década e custar alguns milhões de dólares [10].

2 — *REDUÇÃO AO ELIPSÓIDE*

2.1 — *Redução de um ponto*

As observações tanto geodésicas como astronômicas são realizadas sobre a superfície física do planeta enquanto os cálculos da geodésia "bidimensional" são conduzidos sobre a superfície de referência adotada. Impõe-se pois uma redução dos valores observados àquela superfície (método *projetivo*).

Na chamada *redução de HELMERT* um ponto *P* da superfície física é projetado sobre o elipsóide ao longo da *normal;* aliás o segmento da normal assim determinado é a *altitude geométrica* h de P.

Na *redução de PIZZETTI* o ponto é inicialmente projetado sobre o geóide ao longo da "vertical" e em seguida sobre o elipsóide; obtemos assim dois segmentos: a altitude ortométrica H e a separação geóide-elipsóide N que, em primeira aproximação, satisfazem à equação:

$$h = H + N$$

Para as altitudes comuns em nosso país as projeções de um ponto nos dois sistemas, mesmo no caso de um desvio da vertical de 10″, apresentam discrepâncias de poucos centímetros.

Na figura 1, fora de escala em benefício da clareza, P é a "projeção de HELMERT" do ponto P da superfície terrestre; resultam as seguintes ex-

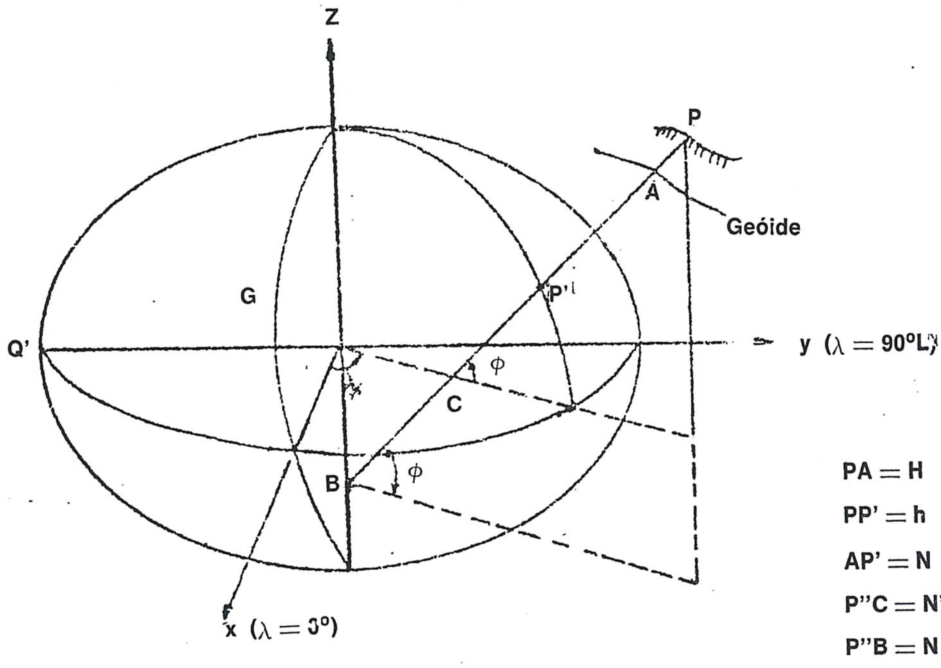

Fig. 1

PA = H
PP' = h
AP' = N
P"C = N'
P"B = N
P'C = N'
P'B = N

pressões para as coordenadas retilíneas de P:

$$x = (\overline{N} + h) \cos\phi \cos\lambda$$

$$y = (\overline{N} + h) \cos\phi \operatorname{sen}\lambda \qquad (2.1)$$

$$z = (\overline{N}' + h) \operatorname{sen}\phi$$

sendo $\overline{N}$ e $\overline{N}'$ respectivamente a grande e a pequena normal de P':

$$\overline{N} = a\,(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{-1/2} \qquad (2.2)$$

$$\overline{N}' = (1 - e^2)\,\overline{N} \qquad (2.3)$$

A transformação inversa:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{y}{x} \qquad (2.4)$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{z + \overline{N}\, e^2 \operatorname{sen}\phi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (2.5)$$

$$\overline{N} + h = x \sec\phi \sec\lambda =$$

$$= y \sec\phi \operatorname{cosec}\lambda \qquad (2.6)$$

exige reiterações.

Em muitos sistemas geodésicos a ausência de mapas geoidais tem levado obrigatoriamente à aproximação:

$$N = 0 \quad \therefore \quad h = H$$

2.2 — *Redução de uma distância*

Uma base geodésica ou os lados de uma poligonal são, no método projetivo, reduzidos à superfície de referência adotada. Designando por D a distância medida, a redução se efetua com a seguinte correção:

$$c = \frac{D\bar{h}}{R + \bar{h}} = -D\frac{\bar{h}}{R} + \frac{\bar{h}^2}{R^2} \qquad (2.7)$$

ou, em primeira aproximação:

$$c = -D\frac{\bar{h}}{R} \qquad (2.8)$$

sendo $\bar{h}$ altitude geométrica média e R o raio de curvatura segundo o azimute da linha, em seu ponto médio.

A expressão diferencial:

$$\frac{dc}{D} = -\frac{d\bar{h}}{R} \qquad (2.9)$$

nos mostra que adotando o valor arredondado

$$R = 6{,}4 \times 10^6 \text{ m}$$

necessitamos, para que a redução não introduza um erro relativo superior a 1 ppm, conhecer a altitude geométrica com precisão mínima de 6,4 metros.

2.3 — *Método de desenvolvimento*

No início da implantação de uma triangulação não é possível ou pelo menos não o era até há bem pouco, a aplicação do método projetivo. Os desvios astro-geodésicos da vertical necessários ao cálculo de N só se tornavam conhecidos após os transportes de coordenadas e às determinações astronômicas nos vértices da triangulação.

Isso explica porque todos os órgãos geodésicos nacionais se limitavam, pelo menos na fase preliminar do estabelecimento do sistema, a efetuar *reduções ao geóide*, com base na altitude ortométrica, como primeira aproximação da redução ao elipsóide. Esse procedimento tem sido denominado, aliás com bastante impropriedade como bem observa BOMFORD. 3, pág. 120 , de *método de desenvolvimento* (development method).

MOLODENSKY desenvolveu fórmulas para corrigir os valores de N oriundos de uma rede astro-geodésica extensa calculada pelo método de desenvolvimento.

O sistema geodésico brasileiro não escapou à essa regra; as bases, desde as mais antigas, curtas e medidas com fios de invar, às mais recentes, lados de triangulação medidos a geodímetro, todas têm sido sistematicamente reduzidas ao geóide. O mesmo se diga das poligonais eletrônicas algumas com vários graus de amplitude.

3 — *CONEXÃO DE SISTEMAS GEODÉSICOS*

3.1 — *Fórmulas de transformação*

Já no início do século, HELMERT estudou o problema da conexão de dois sistemas referidos a um mesmo elipsóide, porém, diferentemente orientado nos respectivos data. As fórmulas do grande geodesista alemão exigem o conhecimento dos valores:

$$d\zeta = \zeta_B - \zeta_{B(A)}$$
$$d\eta = \eta_B - \eta_{B(A)} \qquad (3.1)$$

sendo

$$\zeta_B \quad \text{e} \quad \zeta_B$$

as componentes principais do desvio no datum do sistema B e

$$\zeta_{B(A)} \quad \zeta_{B(A)}$$

as componentes no mesmo datum, porém referidas ao sistema A; e permitem o cálculo das correções

$$d\zeta_i, \quad d\eta_i$$

que convertem as coordenadas de qualquer vértice do sistema B ao sistema A sem necessidade de efetuar um novo transporte.

As fórmulas de VENING-MEINESZ deduzidas nos meados do século são mais gerais pois consideram também as variações das alturas geoidais inclusive quando os sistemas se valem de elipsóides diferentes 5 , 6 . Também de GRAAF-HUNTER deduziu fórmulas similares 3 , 7 .

A obtenção dos valores (3.1) não implica necessariamente em estender o sistema A até alcançar o datum de B. É suficiente que um certo número de vértices sejam referidos simultaneamente aos dois sistemas; um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados permite então chegar aos valores (3.1) relativos ao datum, através das fórmulas de conversão; as mesmas fórmulas conduzem depois às correções

$$d\zeta_i, \quad d\eta_i.$$

3.2 — *Contribuição da Geodésia Celeste*

As fórmulas de transformação anteriormente citadas pressupõem a extensão de um sistema sobre o outro; seja através de um simples prolongamento da triangulação, no caso de sistemas vizinhos, seja como aconteceu, p.ex., com as triangulações brasileira e venezuelana, interligadas por uma trilateração HIRAN.

A *Geodésia Celeste* trouxe uma notável simplificação ao problema: o afastamento entre os dois elipsóides pode ser obtido facilmente mesmo na ausência de vínculo terrestre entre os dois sistemas.

A simples ocupação de um vértice geodésico com um receptor Doppler propicia as suas coordenadas retilíneas *geocêntricas*. Estas, comparadas às coordenadas homônimas calculadas com as fórmulas (2.1), propiciam as coordenadas geocêntricas

$$(X_c, Y_c, Z_c)$$

do centro C do elipsóide; procedimento análogo (e independente) conduzido num vértice pertencente a outro sistema propicia igualmente as coordenadas geocêntricas

$$(X'_c, Y'_c, Z'_c)$$

do centro C' do elipsóide desse sistema.

CG: centro de gravidade da Terra;

C, C': centros dos elipsóides;

Z: orientado positivamente para o pólo médio 1900-5 (OCI)

Resultam então as coordenadas do centro de um elipsóide referidas ao terno cartesiano cuja origem coincide com o centro do outro elipsóide:

$$\begin{aligned} \Delta X &= X'_c - X_c \\ \Delta Y &= Y'_c - Y_c \qquad (3.1) \\ \Delta Z &= Z'_c - Z_c \end{aligned}$$

No método dito *iterativo* processa-se a transformação de coordenadas retilíneas em retilíneas (simples translação) e de retilíneas em geodésicas (fór-

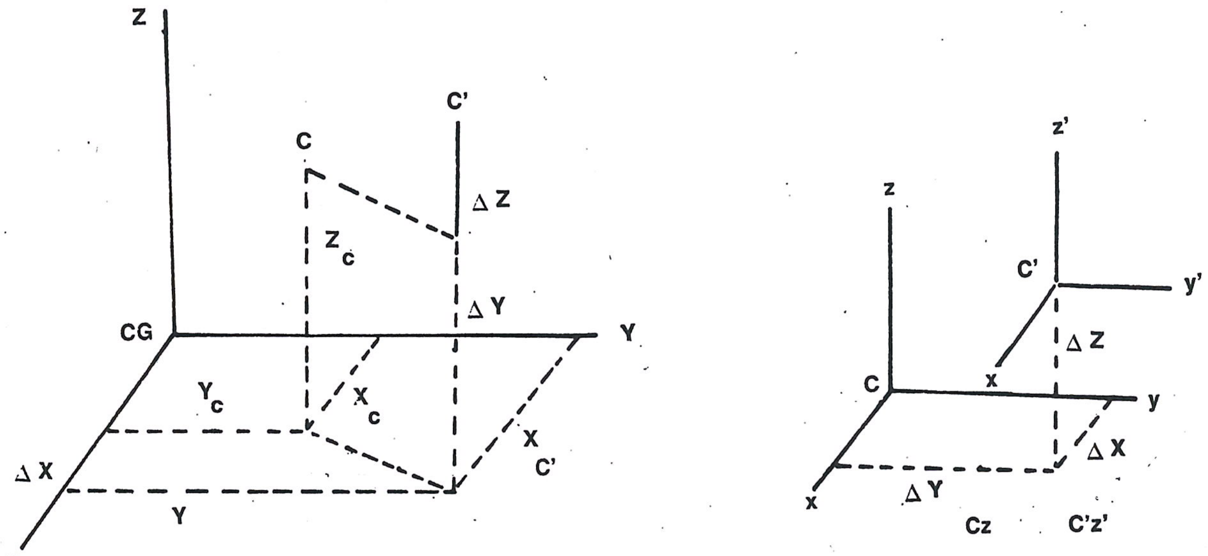

Fig. 2

mulas 2.4 — 2.6). No método *diferencial* utilizam-se fórmulas do tipo |8|, |9|:

$$\begin{aligned} \text{ad}\ \phi &= \text{sen}\ \phi \cos \lambda\ \Delta X + \\ &+ \text{sen}\ \phi\ \text{sen}\ \lambda\ \Delta Y - \\ &\cos \phi\ \Delta Z + 2a\ \text{sen}\ \phi \times \\ &\cos \phi\ df + a \cos \phi\ d\lambda = \\ &\text{sen}\ \lambda\ \Delta X - \cos \lambda\ \Delta Y \qquad (3.2) \\ dh &= - \cos \phi \cos \lambda\ \Delta X - \\ &- \cos \phi\ \text{sen}\ \lambda\ \Delta Y - \\ &- \text{sen}\ \phi\ \Delta Z - da + \\ &+ a\ \text{sen}^2 \phi\ df \end{aligned}$$

com

$$da = df = 0$$

no caso de sistemas geodésicos com a mesma superfície de referência.

4 — *NECESSIDADE DE INFORMAÇÕES GEOIDAIS*

Conforme ressaltamos, normalmente se vem processando em muitos sistemas geodésicos — é o caso do Brasil — a redução ao geóide (método de desenvolvimento) enquanto o cálculo da triangulação é conduzido sobre o elipsóide. Essa dualidade, absurda do ponto de vista científico, é uma simples decorrência da ausência de informações geoidais. Tolerável até há bem pouco, não mais pode ser admitida face ao grau de precisão que caracteriza as operações geodésicas hodiernas.

O tópico 2.1 nos mostrou que o método projetivo pressupõe o conhecimento da separação geóide-elipsóide; vejamos então qual conseqüência de negligenciar N nas fórmulas que transformam coordenadas geodésicas em retilíneas. Exemplifiquemos com N = 20 m, plausível em qualquer sistema geodésico, e com um ponto equatorial com 40° de longitude: resultariam erros de 15 m, 13 m e 0 m respectivamente para x, y e z. Nas mesmas condições se a longitude do ponto for de 70° o erro em y atingirá aproximadamente 20 metros, ou seja, será praticamente igual ao valor de N negligenciado.

A utilização de receptores Doppler no rastreio de satélites do sistema NNSS para o posicionamento geodésico vem se difundindo rapidamente; o nosso país, face à sua extensão continental e à impenetrabilidade da região amazônica aos processos convencionais, tem razões de sobra para adotar, como já o vem fazendo, tais técnicas de Geodésia Celeste.

Admitamos que um vértice novo tenha sido ocupado com um "geoceiver" ou um receptor OMA-722 (Marconi); resultam conhecidas as suas coordenadas retilíneas e geodésicas, em ambos os casos *geocêntricas*. Tal vértice poderá ser incorporado ao "sistema geodésico nacional", normalmente não geocêntrico, desde que as coordenadas geocêntricas do centro do elipsóide tenham sido previamente determinadas; a transformação se processa então pelo método iterativo ou pelo diferencial. Em ambos os casos o conhecimento de N propicia a altitude ortométrica e vice-versa.

FISCHER em 2 apresenta a carta geoidal (astro-geodésica) do Sistema Geodésico Sul-Americano bem como as coordenadas do centro do correspondente elipsóide em relação ao centro do elipsóide de HAYFORD arbitrariamente orientado em Córrego Alegre. Isso nos permitiu construir a carta geoidal para o Sistema Geodésico Brasileiro mostrada na figura 3.

Com base nessa carta pretendíamos efetuar alguns estudos sobre as deformações da triangulação brasileira decorrentes do método de desenvolvimento, mas não tivemos êxito no que tange à obtenção de informações geodésicas. Por isso nos limitamos a apresentar, na figura 4, as linhas de isocorreção para as bases (distâncias em geral) reduzidas ao geóide, em qualquer região do Brasil, expressas em partes-por-milhão (ppm).

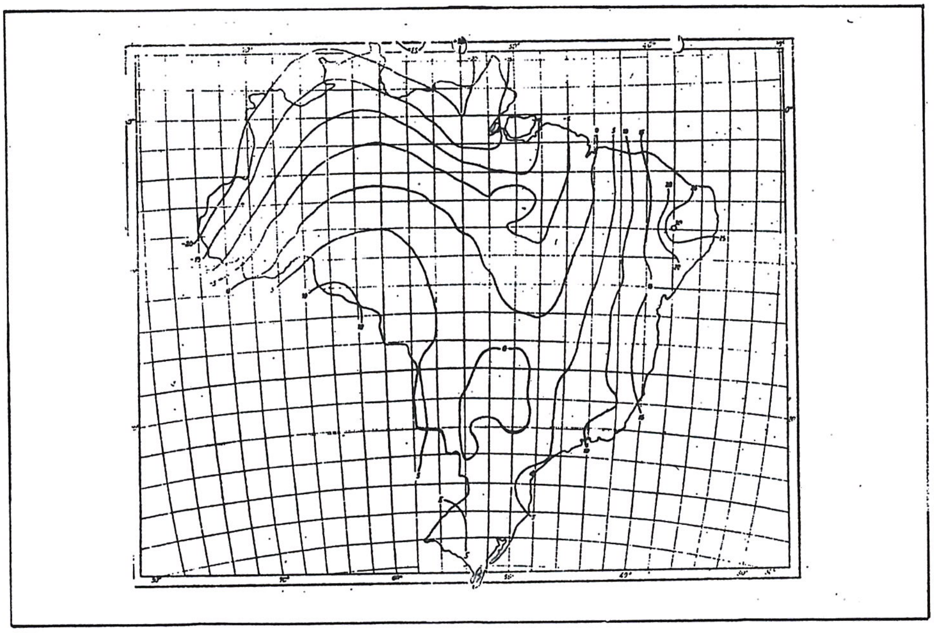

Fig. 3 — Carta Geoidal do Sistema Geodésico Brasileiro (datum Córrego Alegre com $\xi = \eta = N = 0$) baseada no geóide astrogeodésico de FISCHER relativo ao sistema Geodésico Sul-Americano.

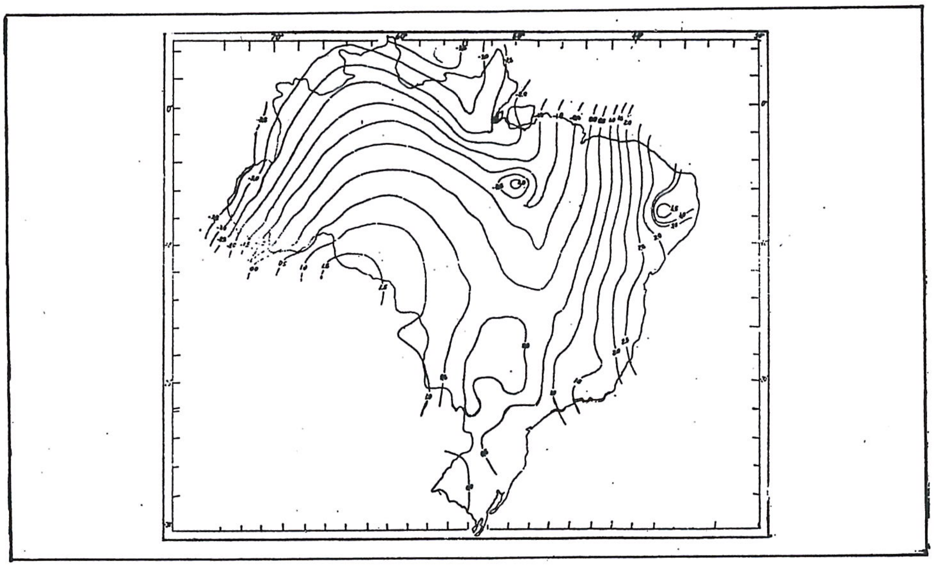

Fig. 4 — Correções, em p.p.m., às distâncias reduzidas ao geóide (Sistema Geodésico Brasileiro, datum em Córrego Alegre com $\xi = \eta = N = 0$).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. HAYFORD, J.F. (1909) — **The figure of the Earth and isostasy from measurements in the U.S.** Coast and Geodetic Survey, Washington 80 p + 4 maps.
2. FISCHER, I. (1973) — **The basic framework of the South American Datum of 1969.** XII Pan American Consultation on Cartography, Panamá.
3. BOMFORD, G. (1971) — **Geodesy.** Oxford University Press, Third Edition, London, 731 p.
4. MOLODENSKY, M.S. et alli (1962) **Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth.** Translated from Russian. Israel Programme for scientific translations.
5. VENING MEINESZ (1950) — New formulas for systems of deflections of the plumb-line and Laplace's theorem. **Bull. Geod.** (N.S.) (15): 33-42.
6. ——— (1950) — Changes of deflections of the plumb-line brought about by a chang of the reference-ellipsold. **Bull. Geod.** (N.S.) (15): 43-51.
7. GEMAEL, C. (1972) — **Geodésia II (Notas Complementares).** Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
8. ——— (1973) — **Aplicação do Cálculo Matricial em Geodésia. 1.ª Parte: Transformação de Coordenadas.** Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
9. HEISKANEN, W.A.; MORITZ, H. (1967) — **Physical Geodesy** — W.H. Freeman and Company, San Francisco, 364 p.
10. National Academy of Sciences (1971) — **North American Datum.** National Ocean Survey, NOAA. Rockville, Maryland.