DETERMINAÇÃO DE COORDENADAS ATRAVÉS DE SATÉLITES

Eng.° Ariel Mera Valverde

Assessor Técnico da Cruzeiro do Sul

Conferência Pronunciada no I Simpósio Brasileiro de Geodésia por Satélites — (Clube de Engenharia 25-7-1974)

Descreveremos a seguir a aplicação do efeito Doppler na determinação das coordenadas de um ponto partindo das informações emitidas pelo Satélite.

Relembremos rapidamente que o efeito Doppler é produzido pela variação da freqüência de uma onda ao propagar-se com uma certa velocidade, dentro de um meio elástico contínuo, emitida por uma fonte que se desloca também no mesmo meio, e recebida por um ponto em movimento neste mesmo meio.

A aplicação do princípio relativista da não variação das leis físicas respeita as transformações de Lorentz, permite uma interpretação simples do fenômeno, no caso das ondas luminosas e eletromagnéticas.

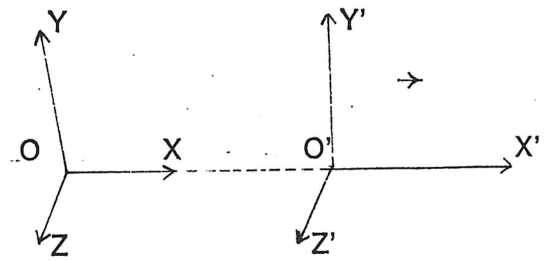

FIG. 1

Sejam 2 sistemas de referências como na figura 1

$$O\ (X,\ Y,\ Z,\ T)$$

sistema de coordenadas ao qual está referida a fonte emissora.

$$O'\ (X'\ Y'\ Z'\ Y')$$

sistema de coordenadas ao qual está referida o receptor.

Ambos os sistemas movem-se relativamente na direção de

$$OX \equiv O'X'$$

A equação de uma onda vibrante, eletromagnética referida ao primeiro sistema é:

$$s = a \cos 2\pi n \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Sendo

s a elongação
a a amplitude
n a freqüência
t o tempo contado a partir do início da primeira vibração
c a velocidade da luz no vácuo.

Se a onda se propaga no sentido O X, a fase no sistema

$$O\ (X,\ Y,\ Z,\ T)$$

é igual a:

$$2\pi n \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

As equações de transformação de Lorentz neste caso são:

$$(1) \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}};\quad y' = y;\quad z' = z;$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}};\qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Aplicando-as para transformar a fase ao sistema

$$O'\ (X',\ Y',\ Z',\ T')$$

obtemos:

(2)
$$2\pi n\,(t - \frac{x}{c}) = 2\pi n\,(\frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}})$$

E como

$$2\pi n'\,(t' - \frac{x'}{c})$$

é a fase no sistema

O' (X', Y', Z', T')

que deve ser igual à transformada no 1.° sistema

$$(3)\qquad 2\pi n' = 2\pi n\,(\frac{t' + \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x' + vt'}{c\sqrt{1-\beta^2}})$$

desenvolvendo a equação anterior chega-se a:

$$(4)\qquad n' = n\,\frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e no caso que a velocidade, V, não seja colinear com 00' devemos tomar a componente nessa direção, ou seja:

$v \cos\theta$;

temos então que:

$$(5)\qquad n' = n\,\frac{1 - \frac{v\cos\theta}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots\ldots\ldots [1]$$

é a equação que relaciona as freqüências medidas nos 2 sistemas de referências.

No caso da determinação das coordenadas de uma estação utilizando os satélites NNSS temos uma interessante aplicação daquele princípio.

Se chamamos FS a freqüência do Satélite, e F a freqüência recebida, aplicando a equação [1] anterior:

$$(6)\qquad \frac{F}{FS} = \frac{1 - \frac{v\cos\theta}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots\ldots\ldots [2]$$

O incremento instantâneo do raio vetor observador — satélite é:

$$(7)\qquad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = v\cos\theta$$

Substituindo em [2] obtemos:

$$(8)\qquad r = c\,[1 - \frac{F}{FS}\sqrt{1-\beta^2}]$$

raiz pelo binônimo:

$$(9)\qquad \dot{r} = c\,[1 - \frac{F}{FS}(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \ldots)]$$

Desprezando os termos de ordem superior nos quais, c, encontra-se no denominador:

$$(10)\qquad r = \frac{c}{FS}\,[FS - F]$$

Agora FS e F não são valores medidos, mas sim FB, o qual é o valor que resulta da subtração de uma freqüência conhecida, gerada internamente no receptor, da F recebida

$$FB = FR - F$$

$$(11)\qquad r = \frac{c}{FS}\,[FB - (FR - FS)]$$

e agora se integramos esta equação no intervalo de tempo no qual a defasagem Doppler é contada, obtemos a equação básica que relaciona a variação das freqüências com a diferença da distância:

$$\Delta r = \int_t^{t+\Delta t} r\,dt = \frac{C}{FS}\int_t^{t+\Delta t} FB\,dt -$$

$$(12)\qquad - \frac{C}{FS}\int_t^{t+\Delta t} (FR - FS)\,dt \qquad [3]$$

Chamando

$$I = \int_t^{t+\Delta t} FB\,dt,$$

e observando que a segunda integral pode-se considerar constante devido à alta estabilidade das freqüências de Satélite e do receptor:

$$(13)\qquad \Delta r_{e,i,j} = \frac{C}{FS}\,[I_{i,j} - (FR - FS)\,\Delta t] \qquad [4]$$

i, j, são duas posições consecutivas, do Satélite.

Geometricamente l_{ij} é o seguinte:

f FR

t

F

1 ... i Δ = j ... n

FIG. 2

Cálculo das coordenadas da estação:

$$r_{e,k} = [(x - \bar{x}_k)^2 + (y - \bar{y}_k)^2 + (z - \bar{z}_k)^2]^{1/2} \quad (14) \quad \ldots [5]$$

é a equação de observação da distância, satélite/estação. (*FIG. 3*).

$X, Y, Z, \bar{X}_k, \bar{Y}_k, \bar{Z}_k,$

são coordenadas cartesianas da estação e do satélite no instante k referidas a um sistema fixo da terra.

O modelo matemático que relaciona a diferença de distâncias entre duas posições sucessivas de um satélite em movimento "1" e "2" e as coordenadas da estação e:

$$r_{e,1} - r_{e,2} - \Delta r_{e,1,2} = 0 \qquad [6]$$

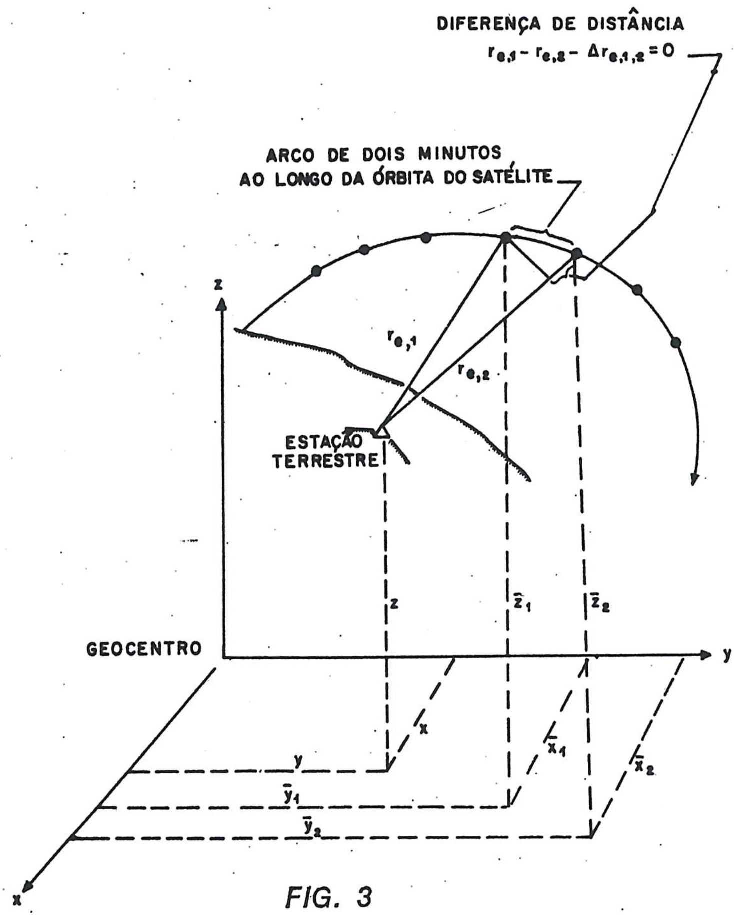

FIG. 3

$r_{e,1}$; $r_{e,2}$

em coordenadas cartesianas são da forma da equação . . . . |5|

$$(15)\ \Delta r_{e,1,2} = \frac{C}{FS}\,[l_{1,2} - (FR - FS)\,\Delta t] \ldots \text{de}[4]$$

de acordo com . . . . |4|

Substituindo em |6| e resolvendo para as observações l, obtemos a seguinte equação:

$$l_{1;2} = [(x-\bar{x}_1)^2 + (y-\bar{y}_1)^2 + (z-\bar{z}_1)^2]^{1/2} -$$

$$(16) \quad - [(x-\bar{x}_2)^2 + (y-\bar{y}_2)^2 + (z-\bar{z}_2)^2]^{1/2} +$$

$$+ (FR - FS)\,\Delta t \ldots \ldots \ldots \ldots [7]$$

Para cada observação Doppler existirá uma equação deste tipo. Uma passagem simples de um satélite em uma estação terrestre dura no máximo 18 minutos, o que significa que fornecerão 9 observações e portanto 9 equações |7|, devendo proceder-se a um ajustamento das mesmas pelo método dos mínimos quadrados.

Como as equações |7| não são lineares, deverão ser previamente linearizadas para obter-se as incógnitas x, y, z.

As coordenadas cartesianas do satélite não são conhecidas diretamente mas podem ser calculadas partindo das informações emitidas pelo próprio Satélite sobre suas efemérides, que são pré-computadas e extrapoladas para cada período de 16 horas, ou conhecendo-se a posterior, as efemérides reais do dia e no instante nos quais as emissões das freqüências forem recebidas.

As coordenadas assim obtidas, são definidas num sistema topocêntrico considerado sobre um elipsóide de referência que em nosso caso é o NWL 9 D.

Por último, a fim de que possam ser utilizados em nossos sistemas devem-se transformar até os Datunns CÓRREGO, CHUÁ ou SAD 69.