DETERMINAÇÃO GEODÉSICA POR RASTREAMENTO "DOPPLER" DE SATÉLITES

WILSON R.M. KRUKOSKI
Ten. Cel. Av. (Eng.º)

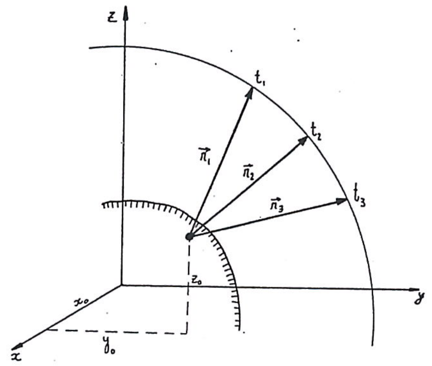
Um assunto comumente questionado pelas pessoas que iniciam o estudo da determinação geodésica pelo rastreamento de satélites é a compreensão do princípio básico utilizado neste sistema.

A pergunta normalmente feita é: "como pode a passagem de um satélite que transmite certa freqüência, captada por um receptor, fornecer os elementos necessários para a determinação espacial da posição onde se encontra este receptor"

A origem desta tecnologia, como sabemos, foi desenvolvida quando cientistas americanos, observando a transmissão rádio emitida pelo primeiro satélite artificial, o "sputnik", e medindo o efeito "doppler" desta transmissão através de uma estação receptora que eles sabiam onde se encontrava, puderam determinar com precisão a órbita desenvolvida pelo satélite: partindo deste raciocínio, eles imaginaram que, inversamente, se soubessem com precisão a órbita de um satélite, pelo medição do efeito "dopler", poderiam também determinar a posição dessa estação receptora.

Para a compreensão do que seja este efeito "doppler", podemos dizer, de maneira mais prática, que é basicamente a medição, em ciclos, da diferença entre o número de ciclos recebidos e o número de ciclos que deveriam ter sido recebidos pelo receptor, isto devido às diversas posições geométricas do satélite que está em movimento.

$$\Delta N = N_R - N_O \qquad (1)$$



Como sabemos, o número de ciclos é calculado pela relação:

N.º de ciclos = freqüência × × intervalo de tempo

Assim,

$$N_R = N_T = f_T\,(t_2 - t_1) \qquad (2)$$

O número de ciclos recebidos é exatamente o número de ciclos transmitidos (isto porque a marcação do tempo é feita pelo próprio satélite); e o calculamos multiplicando a freqüência do transmissor (do satélite), pelo período de tempo considerado, tempo que o satélite vai da posição 1 à posição 2.

Agora o número de ciclos que deveriam ser recebidos, devido às posições geométricas do satélite, em relação ao sistema rígido da terra, será igual ao produto da freqüência básica de medição (freqüência para a qual o receptor está calibrado), multiplicado também por um intervalo de tempo.

$$N_O = f_O \left[(t_2 + \Delta t_2) - (t_1 + \Delta t_1) \right]$$

Para o cálculo deste intervalo de tempo, agora temos de levar em conta também a pequena fração de tempo que decorre entre o instante em que o satélite está na posição 1 (ou 2), até que a emissão eletro-magnética chegue ao receptor.

Este intervalo de tempo é calculado pela relação:

$$\textbf{Tempo} = \frac{\textbf{espaço}}{\textbf{velocidade}}$$

Se designarmos por "r_1" e "r_2" as distâncias espaciais e por "c" a velocidade eletromagnética (igual à velocidade da luz), teremos:

$$N_O = f_O \left[\left(t_2 + \frac{r_2}{c}\right) - \left(t_1 + \frac{r_1}{c}\right) \right] \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) na equação (1), teremos:

$$\Delta N = f_T (t_2 - t_1) - f_O \left[\left(t_2 + \frac{r_2}{c}\right) - \left(t_1 + \frac{r_1}{c}\right) \right]$$

Agora, apenas pelo desenvolvimento do cálculo algébrico, teremos:

$$= f_T (t_2 - t_1) - f_O t_2 - f_O \frac{r_2}{c} + f_O t_1 + f_O \frac{r_1}{c}$$

$$= f_T (t_2 - t_1) - f_O (t_2 - t_1) + \frac{f_O}{c} (r_1 - r_2)$$

$$= (f_T - f_O)(t_2 - t_1) + \frac{f_O}{c} (r_1 - r_2)$$

Ou se chamarmos à diferença de freqüência por "Δ f", (também uma incógnita a determinar) e a diferença de tempo "Δ t", (uma constante), teremos:

$$\Delta N = \frac{f_O}{c} (r_1 - r_2) + \Delta f . \Delta t$$

Ou ainda podemos representar as distâncias espaciais "r_1" e "r_2" em função das coordenadas de seus extremos, ficando então:

$$\Delta N = \frac{f_O}{c} \left\{ \left[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \right]^{1/2} - \left[(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 \right]^{1/2} \right\} + \Delta f . \Delta t$$

que é a fórmula fundamental para o posicionamento de uma estação receptora; isto porque podemos organizar uma equação de observação deste tipo para cada intervalo de tempo considerado.

Nestas equações o "Δ N" é a chamada contagem "doppler" medida pelo receptor, "f_0", "c" e "Δt" são constantes conhecidas, e as coordenadas do satélite nas diversas posições "x_1", "y_1", "z_1", "x_2", "y_2", "z_2", "x_3", "y_3", "z_3", etc. são valores conhecidos, pois, como vimos, pertencem à órbita de um satélite considerada como perfeitamente conhecida.

Desta maneira as incógnitas serão sempre apenas "Δf", "x_0", "y_0", e "z_0", isto é, 4 incógnitas para cada equação, de tal maneira que, se fizermos observações em uma passagem por mais de 4 intervalos de tempo, poderemos ter um sistema determinado de equações, ou seja, mais do que determinado, mais equações de observação do que incógnitas, o que nos permite um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.

É interessante observar que esta equação é complexa e, para o seu ajustamento, deverá ser linearizada pela aplicação da série de Taylor, dentro da técnica de ajustamento conhecida.

Como vimos, toda a determinação é feita referida a um sistema espacial rígido com a terra, que tem seu sistema tridimensional com origem no centro de massa da terra, o eixo dos "x" em direção a "Greenwich", o eixo dos "y" em direção ao meridiano 90º W e o eixo dos "z" em coincidência com o eixo de rotação da terra.

Gostaríamos então de fazer aqui, ainda, uma breve recordação da correlação existente entre as coordenadas espaciais (x, y, z,), e as coordendas elipsoidais, normalmente chamadas geográficas (φ, λ, H).

Uma vez determinadas as coordenadas espaciais de um receptor "x_0", "y_0", "z_0", acharemos as suas correspondentes φ, λ, H ,pelas fórmulas:

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{Z\,(N + H)}{D\left\{N\,(1 - e^2) + H\right\}}$$

$$\text{tg}\ \lambda = y/z$$

$$H = D/\cos\varphi - N$$

$$\text{onde, } D = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

que são fórmulas a serem resolvidas por reiteração, pois "N" (raio no 1.º vertical) é uma função de "φ".

Para maior clareza apresentamos as figuras 2 e 3.

Destas figuras podemos também deduzir as fórmulas para a correlação inversa, isto é, a determinação de coordenadas espaciais "x", "y" e "z", partindo das coordenadas geográficas φ . λ . H .

$$x = (N + H)\cos\varphi \,.\, \cos\lambda$$

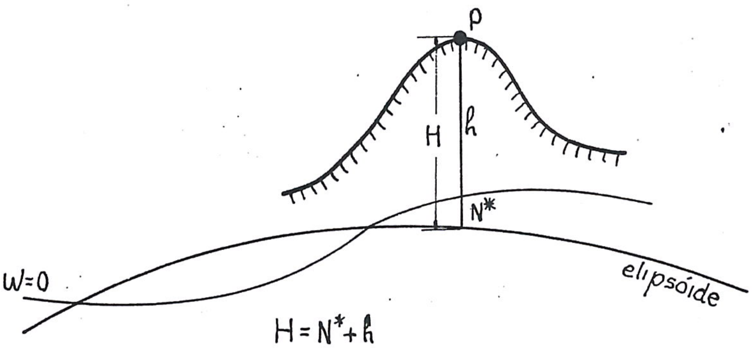
$$y = (N + H)\cos\varphi \,.\, \sin\lambda$$

$$z = \left\{N\,(1 - e^2) + H\right\}\sin\varphi$$

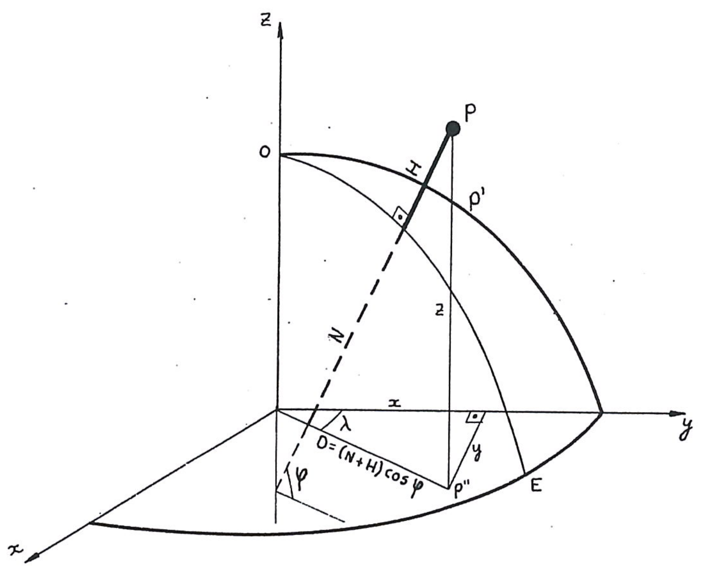
Estas fórmulas não são reiterativas.

É interessante observar (fig. 4) que o "H" aqui referido é a altura em relação ao elipsóide de referência, isto é:

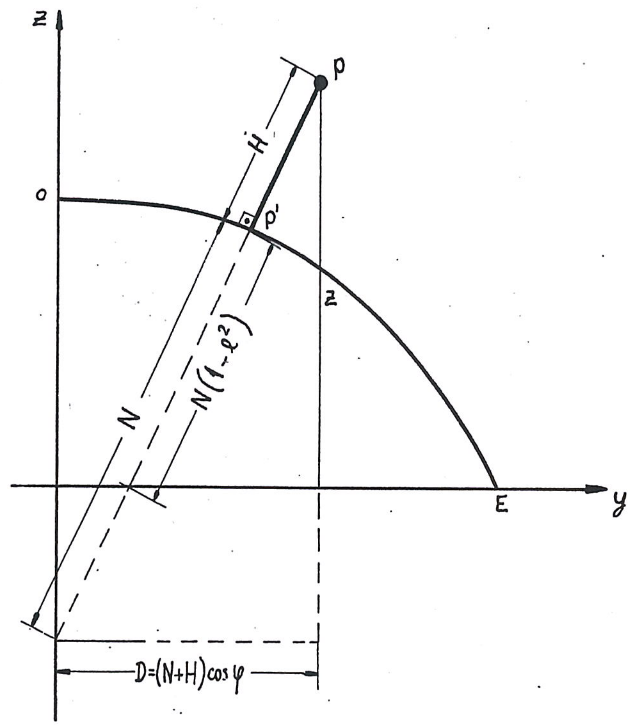
H = altura geoidal* + altura potencial (do nivelamento geométrico).



(Fig. 4)



(Fig. 2)



(Fig. 3)