



O Problema da Escolha do *Datum* na Geodesia

The datum choice problem in Geodesy

Ivandro Klein¹, Marcelo Tomio Matsuoka², Vinicius Francisco Rofatto³

¹ Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC), Florianópolis, Brasil. ivandroklein@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4296-592X>

² Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Monte Carmelo, Brasil. tomiomatsuoka@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2630-522X>

³ Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Monte Carmelo, Brasil. vfrofatto@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1453-7530>

Recebido: 08.2024 | Aceito: 12.2024

Resumo: O objetivo desta contribuição é apresentar uma revisão teórica sobre o problema da escolha do *datum* na Geodesia, por meio do caso geral de ajustamento pelo modelo paramétrico (Gauss-Markov). Nesta revisão, demonstra-se matematicamente que uma solução com injunções é enviesada quando o posto (*rank*) da matriz *design* $A \in \mathbb{R}^{n \times u}$ não é completo, ou seja, $\text{rank}(A) < u$. Em outras palavras, há deficiência de *datum* da rede geodésica, o que em geral ocorre ao menos em termos de origem do referencial. Demonstramos matematicamente as injunções mínimas internas por meio das condições *no net translation* (NNT), *no net rotation* (NNR) e *no net scale* (NNS), além da transformação-S para a conversão ou atualização do *datum* de uma solução com injunções mínimas para outra. Em particular, duas aplicações importantes são discutidas: (i) o monitoramento geodésico de estruturas, em que as diferentes épocas de observação devem estar no mesmo *datum*; (ii) a densificação de redes geodésicas a partir de pontos de referência pré-existentes. As diferentes possibilidades de definição da matriz *datum* são demonstradas em uma rede simulada de trilateração. Por fim, foram realizadas comparações entre cinco diferentes tipos de injunções em uma rede altimétrica: injunção absoluta; injunção relativa; condição NNT para todos vértices da rede; condição NNT apenas para os vértices de referência e condição NNT ponderada ou generalizada conforme Kotsakis (2013). Os resultados obtidos por simulações Monte-Carlo demonstram que a condição NNT generalizada fornece a melhor escolha de *datum* no problema de densificação de redes geodésicas.

Palavras-chave: Injunções mínimas internas. Transformação-S. Monitoramento geodésico. Densificação de redes.

Abstract: This contribution presents a theoretical review of the datum problem in Geodesy, inside the framework of the Gauss-Markov model. In this review, it is mathematically demonstrated that a solution with constraints is biased when the rank of the design matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times u}$ is not full, i.e., $\text{rank}(A) < u$. In other words, there is a rank defect in the design matrix due to the datum deficiency in the geodetic network, which generally occurs at least in terms of the origin. The minimum inner constraints are mathematically demonstrated through the conditions of no net translation (NNT), no net rotation (NNR), and no net scale (NNS). Furthermore, we provide a step-by-step S-transformation to change or update the datum from a minimally constrained solution to another. In particular, the cases of geodetic deformation analysis, where different observation epochs must be at the same datum, and the geodetic network densification based on pre-existing reference points are discussed. A simulated trilateration network demonstrates several possibilities for defining the datum matrix. Finally, comparisons were made between five different types of constraints in a levelling network: absolute constraint; weight constraint; NNT condition for all network points; NNT condition only for reference points and weighted or generalized NNT condition according to Kotsakis (2013). The results obtained by Monte-Carlo simulations demonstrate that the generalized NNT condition provides the best datum choice in the densification of geodetic networks problem.

Keywords: Inner constraints. S-transformation. Deformation analysis. Geodetic network densification.

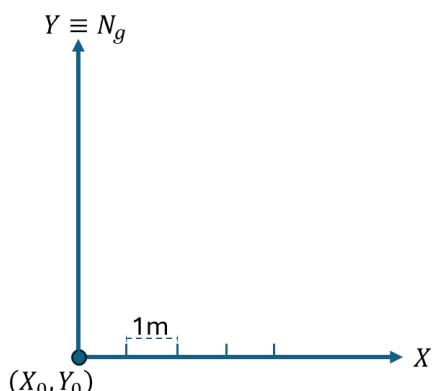
1 INTRODUÇÃO

Embora o termo “*datum*” seja frequentemente utilizado nas áreas de Ciências Geodésicas e Cartográficas, a interpretação matemática do mesmo nem sempre é muito clara, sendo dificilmente abordada de forma didática e prática na literatura. Para início de discussão, é importante lembrar que a posição de qualquer objeto deve estar vinculada a um sistema de referência ou referencial. O estabelecimento de um sistema de referência envolve os conceitos de definição (nas publicações em inglês, comparece o termo *reference system*) e realização (*reference frame*), os quais já são bem descritos na literatura, como por exemplo, em Drewes (2009).

Segundo as convenções da Nota Técnica N° 36 (IERS, 2010), sistema de referência terrestre (*terrestrial reference system*) é um sistema de referência espacial que gira em torno da Terra em seu movimento diurno no espaço; enquanto o referencial terrestre realizado (*terrestrial reference frame*) consiste na materialização do sistema de referência terrestre por meio da realização de sua origem, orientação dos eixos, escala e evolução temporal. Atualmente, esta realização é obtida por meio da implantação de um conjunto de pontos de referência na superfície da Terra com coordenadas determinadas com alta precisão. O *datum* é um referencial realizado. Em Geodésia e levantamentos, um *datum* é um conjunto de pontos de referência na superfície da Terra e (frequentemente) um modelo associado do formato da Terra usado para definir um sistema de coordenadas. Detalhes em IERS (2010).

Neste contexto, a definição diz respeito às especificações matemáticas e físicas que um referencial deve possuir para atender determinadas aplicações. Para fins de exemplificação, considere um problema de determinação de coordenadas planimétricas, ou seja, em um espaço 2D qualquer, com as seguintes definições: a origem do sistema deve ser um ponto na superfície da Terra (X_0, Y_0) – origem topocêntrica; em termos de orientação, os eixos X e Y devem estar contidos no plano horizontal do observador (que é perpendicular à vertical do lugar), com o Eixo Y orientado na direção do norte geodésico (N_g) e perpendicular ao eixo X ($X \perp Y$), este último apontado para a direção leste; e, por fim, a escala como unidade de medida linear deve estar de acordo com a definição do metro [m]. Esse sistema é ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Sistema de coordenadas arbitrário no espaço 2D.



Fonte: Os autores (2025).

Após a definição do referencial, a etapa seguinte consiste na realização deste por meio da coleta de observações a partir de pontos sobre a região de interesse. De forma simplificada, um dos produtos da realização é uma lista de coordenadas e suas incertezas que materializam o sistema (redes de pontos de referência – *reference frame*). Entretanto, injunções no modelo matemático são necessárias para a determinação das coordenadas dos pontos da rede e suas incertezas. Como pode ser observado no exemplo da Figura 1, a obtenção das coordenadas (X, Y) de qualquer ponto neste sistema só será possível se existirem informações que proporcionem a origem, a orientação e a escala. Essas informações podem ser interpretadas como restrições de *datum*, responsáveis por vincular a definição à realização. Na falta de algumas dessas informações, recaí-se em um problema de deficiência de *datum*.

É muito comum, portanto, que o geodesista tenha que resolver o problema de *datum* no contexto do ajustamento de redes geodésicas. Para mais detalhes sobre o conceito de “*datum*”, o leitor é convidado a

recorrer a literatura relacionada ao tema, como por exemplo, Teunissen (1985); Kuang (1996, capítulo 4); e Drewes (2009). Além disso, assume-se que o leitor é familiarizado com o ajustamento de observações pelo modelo paramétrico, sendo Klein (2012) e Klein et al. (2011) referências indicadas como suporte ao tema. Nesta contribuição, considera-se o ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) aplicado ao modelo de Gauss-Markov – também denominado de modelo paramétrico ou “modelo das equações de observação”: $\hat{y} = F(\hat{x})$, onde $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das observações ajustadas e $\hat{x} \in \mathbb{R}^u$ é o vetor dos parâmetros estimados (com $n > u$), cujos elementos são as coordenadas de pontos a serem estimadas.

De forma geral, o ajustamento de observações envolve a mensuração de grandezas geométricas como ângulos e distâncias entre os vértices que compõem determinada rede geodésica em um referencial altimétrico (1D), planimétrico (2D) ou planialtimétrico (3D). Algumas dessas grandezas suprem a deficiência de *datum* em termos de origem, orientação e/ou escala do referencial, conforme a Tabela 1 (em vermelho: a deficiência de informação de *datum*; e em verde: as grandezas suprimidas de deficiência pela informação de *datum*). Para detalhes sobre a formulação das equações de observação correspondentes, ver, por exemplo, Ghilani (2010, capítulos 12, 15, 16 e 17) e Ogundare (2018, capítulo 5).

Tabela 1 – Deficiência de *datum* e grandezas relacionadas para um referencial qualquer 1D (*Z*), 2D (*X, Y*) ou 3D (*X, Y, Z*).

	Origem			Orientação			Escala
	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>	
Eixo cartesiano do sistema de coordenadas							
Coordenada conhecida no eixo <i>X</i>	✓				✓	✓	✓
Coordenada conhecida no eixo <i>Y</i>		✓		✓		✓	✓
Coordenada conhecida no eixo <i>Z</i>			✓	✓	✓		✓
Direções ou ângulos horizontais							
Azimutes						✓	
Ângulos zenitais				✓	✓		
Distâncias horizontais (2D) ou inclinadas (3D)							✓
Distâncias verticais / desníveis (1D)				✓	✓		✓
Componentes 3D de vetores GNSS ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$)				✓	✓	✓	✓

Fonte: Adaptado de Kuang (1996).

Note que a deficiência em origem (translação) é resolvida somente por meio de coordenadas conhecidas. A deficiência em escala ocorre apenas para redes formadas essencialmente por observações angulares como as antigas redes de triangulação, sendo que modernamente as redes geodésicas possuem medidas de distâncias (seja 1D, 2D ou 3D), não apresentando, portanto, deficiência em escala. As direções e ângulos horizontais não suprem nenhuma deficiência de *datum*, pois não possuem uma direção de referência, ao contrário dos azimutes (o “norte” do referencial adotado) e dos ângulos zenitais (a “vertical” do ponto de estação). De forma análoga, as distâncias horizontais (2D) ou inclinadas (3D) só suprem a deficiência em escala; enquanto as distâncias verticais (1D) e as componentes 3D de vetores GNSS (*Global Navigation Satellite System*) suprem deficiência em escala e orientação, pois cada distância é fornecida em determinada direção / eixo do sistema de coordenadas considerado.

No contexto atual da Geodésia, redes de nívelamento altimétrico e redes GNSS possuem deficiência apenas de origem (translação); enquanto redes 2D ou 3D com estação-total possuem deficiência de origem e orientação azimutal, a menos que sejam utilizados instrumentos auxiliares como giroscópios. A deficiência de *datum* resulta em singularidade da denominada matriz das equações normais $N \in \mathbb{R}^{u \times u}$. A singularidade da matriz N impossibilita a sua inversão e consequentemente a obtenção dos parâmetros estimados de interesse, em geral, coordenadas dos vértices da rede no referencial adotado.

Usualmente, o problema de deficiência do *datum* não suprido pelas observações é solucionado por meio de condições ou “injunções” das coordenadas de um ou mais vértices da rede (cf. Tabela 1), sejam estas injunções “absolutas” ou “relativas” como as “pseudo-observações”. Este tema é amplamente difundido na literatura relacionada, inclusive em âmbito nacional, como em Gamael et al. (2015, capítulos 5, 12, 14, 17).

Entretanto, a literatura nacional ainda carece de estudos abordando aspectos mais avançados deste tema, como o ajustamento por injunções mínimas internas (*inner constraints*), por meio das condições “*no net translation*” (NNT), “*no net rotation*” (NNR) e “*no net scale*” (NNS), amplamente utilizadas no monitoramento geodésico de estruturas e nas realizações do “*International Terrestrial Reference System*” (ITRS), ver Sillard; Boucher (2001) e Chatzinikos; Dermanis (2017). No cenário nacional, tem-se poucas e

importantes contribuições neste sentido, tais como Monico (1988, 2005, 2006). Além disso, até onde temos conhecimento, em âmbito nacional apenas Almeida (2018) trata da conversão ou atualização do *datum* do ajustamento por meio da denominada “Transformação-S”, proposta em Baarda (1973). Esta abordagem de cerca de meio século atrás é largamente difundida na literatura internacional. Por fim, não encontramos investigações no cenário nacional abordando as injunções mínimas internas “ponderadas” ou “generalizadas” propostas por Kotsakis (2013). Este tipo de injunção pode ser considerado o “estado da arte” na densificação de redes geodésicas de referência, como o Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) e as Redes de Referência Cadastrais Municipais (RRCM). Neste artigo, fornecemos exemplos numéricos inéditos neste contexto.

Desta forma, o objetivo deste artigo de revisão é abordar o problema da escolha do *datum* na Geodesia, especialmente os aspectos mais avançados ainda não tratados na literatura nacional. Para isto, inicialmente apresentamos uma revisão teórica do ajustamento pelo modelo de Gauss-Markov com injunções na Seção 2. Nesta revisão, demonstra-se que o uso de injunções para resolver a deficiência de *datum* ou singularidade da matriz N resulta em um estimador enviesado. Os resultados do ajustamento que são dependentes ou independentes da escolha do *datum*, bem como a Transformação-S para a conversão ou atualização do *datum* são apresentados na Seção 3. O caso do monitoramento geodésico multiépocas e as injunções mínimas internas são abordados na Seção 4. Nesta seção, demonstra-se ainda a propriedade “conforme” do ajustamento por injunções mínimas internas em relação a “forma” da rede original. Na seção 5, apresenta-se exemplos numéricos de uma rede de monitoramento por trilateração envolvendo os diversos conteúdos discutidos nas seções anteriores. O estado da arte na densificação das redes geodésicas de referência por meio das injunções mínimas internas ponderadas ou generalizadas é abordado na Seção 6; enquanto exemplos numéricos de densificação de uma rede altimétrica são apresentados na Seção 7. Por fim, a Seção 8 contém as principais conclusões e recomendações desta pesquisa.

2 AJUSTAMENTO PELO MODELO PARAMÉTRICO COM INJUNÇÕES

Inicialmente, considera-se o caso geral do modelo linearizado de Gauss-Markov:

$$\hat{v} = A\delta\hat{x} - l \quad (1)$$

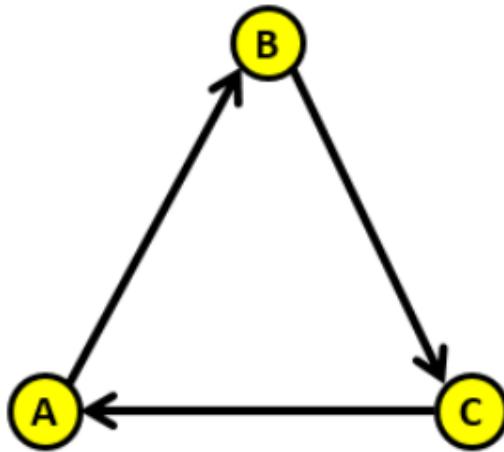
onde $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos resíduos estimados, $A \in \mathbb{R}^{n \times u}$ é a matriz *design* ou Jacobiana, $\delta\hat{x} \in \mathbb{R}^u$ é o vetor de correção aos parâmetros iniciais $x_0 \in \mathbb{R}^u$ e $l \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das observações reduzidas: $l = y - y_0$, sendo $y \in \mathbb{R}^n$ o vetor das observações originais e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ o vetor das observações aproximadas, resultante da aplicação de x_0 no sistema de equações de observação: $y_0 = F(x_0)$. Detalhes em Klein (2012, capítulo 2).

Em geral, $\text{rank}(A) = u - d$, onde “ d ” é a deficiência de posto (*rank*) da matriz A (sendo $d < u$). Logo, particionando a matriz A em duas sub-matrizes: $A_{(u-d)} \in \mathbb{R}^{n \times (u-d)}$ e $A_d \in \mathbb{R}^{n \times d}$, e, consequentemente, o vetor de correção aos parâmetros iniciais em duas componentes $\delta\hat{x}_{(u-d)} \in \mathbb{R}^{(u-d)}$ e $\delta\hat{x}_d \in \mathbb{R}^d$, resulta em:

$$A\delta\hat{x} = [A_{(u-d)} \quad A_d] \begin{bmatrix} \delta\hat{x}_{(u-d)} \\ \delta\hat{x}_d \end{bmatrix} = \hat{v} + l \quad (2)$$

Note que se $\text{rank}(A) = (u - d) \neq u$, há dependência linear entre as colunas da matriz A . No exemplo da rede altimétrica da Figura 2: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\text{rank}(A) = 3 - 1 = 2$. É fácil verificar que

a terceira coluna desta matriz é uma combinação linear das duas primeiras (e vice-versa): $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Em outras palavras, não é possível obter altitudes ajustadas a partir somente de desníveis observados, é necessária uma “referência de nível” para suprir a deficiência em origem do *datum* altimétrico.

Figura 2 – Exemplo de rede de nívelamento altimétrico com $n = 3$ desníveis e $u = 3$ altitudes incógnitas.

Fonte: Os autores (2025).

Portanto, pela álgebra linear, pode-se considerar uma matriz $L \in \mathbb{R}^{(u-d) \times d}$ tal que:

$$A_{(u-d)}L = A_d \quad (3)$$

Rearranjando a Eq. (3), resulta em:

$$A_{(u-d)}L - A_d = [A_{(u-d)} \quad A_d] \begin{bmatrix} L \\ -I_{d \times d} \end{bmatrix} = 0_{n \times d} \quad (4)$$

onde $I_{d \times d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é uma matriz identidade e $0_{n \times d} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ é uma matriz nula. Substituindo a Eq. (3) na Eq. (2) e rearranjando os termos, resulta em:

$$A_{(u-d)}\delta\hat{x}_{(u-d)} = \hat{v} + l - A_{(u-d)}L\delta\hat{x}_d \quad (5)$$

Uma forma de solucionar a Eq. (5) é considerar que “ d ” elementos de $\delta\hat{x}_d$ serão nulos, ou seja, que os respectivos parâmetros permanecerão fixos no processo de ajustamento, como “injunções absolutas”. Na literatura em inglês utiliza-se o termo “*absolutely constrained*” (ver, por exemplo, Ogundare, 2018, capítulo 4). No contexto de otimização matemática, a injunção absoluta é referenciada como restrição rígida (em inglês, *hard constraint*, ver, por exemplo, Matsuoka et al., 2020).

Nesse caso, se $\delta\hat{x}_d = 0_d \in \mathbb{R}^d$, então a Eq. (5) se reduz em $A_{(u-d)}\delta\hat{x}_{(u-d)} = \hat{v} + l$ e a solução para os termos incógnitos é dada por:

$$\delta\hat{x}_{(u-d)}^u = (A_{(u-d)}^T P A_{(u-d)})^{-1} A_{(u-d)}^T P l \quad (6)$$

onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz peso usualmente definida como a inversa da matriz de covariância das observações $\Sigma_y \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $P = \Sigma_y^{-1}$. Como a matriz de covariância das observações Σ_y é positiva definida, a inversa de $A_{(u-d)}^T P A_{(u-d)} \in \mathbb{R}^{(u-d) \times (u-d)}$ existe pois esta é uma matriz de posto completo: $\text{rank}(A_{(u-d)}^T P A_{(u-d)}) = \text{rank}(A_{(u-d)}) = u - d$.

Portanto, a solução com injunções absolutas é uma forma de contornar a deficiência de posto da matriz A condicionando $\delta\hat{x}_d = 0_d \in \mathbb{R}^d$, sendo equivalente a estratégia usual de deletar “ d ” colunas da matriz A (e, portanto, “ d ” elementos do vetor $\delta\hat{x}_d$). No exemplo da Figura 2, se fixarmos a altitude do ponto A como injunção absoluta, a matriz A se torna $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, sendo agora uma matriz de posto completo: $\text{rank}(A) = u = 2$. Note que neste caso a sua dimensão foi alterada de $A \in \mathbb{R}^{n \times u} = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ para $A \in \mathbb{R}^{n \times u} = \mathbb{R}^{3 \times 2}$.

Ressalta-se que no universo da álgebra linear outras soluções são possíveis, por exemplo, por meio do espaço nulo da matriz A . A condição NNT, que será vista posteriormente, é um exemplo neste sentido.

Considerando agora o caso geral das injunções no modelo de Gauss-Markov, deseja-se minimizar a soma ponderada do quadrado dos resíduos, mas impondo certas condições aos parâmetros (não restritas a injunções absolutas do tipo $\delta\hat{x}_d = 0_d$), o que resulta em:

$$\hat{v}^T P \hat{v} = \min, \quad D^T \delta\hat{x} = c \quad (7)$$

onde $D \in \mathbb{R}^{u \times d}$ é a denominada “matrix *datum*” do ajustamento, contendo condições linearmente independentes, ou seja, é uma matriz de posto completo: $\text{rank}(D) = d$, e $c \in \mathbb{R}^d$ é o vetor de termos constantes correspondentes. Aqui, optamos por uma demonstração matemática completa, mas o leitor interessado pode negligenciar as deduções matemáticas que julgar mais simples, conforme o seu critério.

Para encontrar o mínimo da função $\hat{v}^T P \hat{v}$ sujeita a restrição $D^T \delta\hat{x} = c$ na Eq. (7), pode-se recorrer a a técnica lagrangiana. Primeiramente, considerando a Eq. (1), têm-se:

$$\hat{v}^T P \hat{v} = (l^T - \delta\hat{x}^T A^T)P(l - A\delta\hat{x}) = l^T Pl - 2l^T PA\delta\hat{x} + \delta\hat{x}^T A^T PA\delta\hat{x} \quad (8)$$

A função de Lagrange correspondente é dada por $\Phi(\delta x, k) = f(\delta x) + k(g(\delta x) - c)$, com $f(\delta x) = (l^T - \delta\hat{x}^T A^T)P(l - A\delta\hat{x}) = \min$ e $g(\delta x) = D^T \delta x = c$, sendo $k \in \mathbb{R}^d$ o vetor dos denominados “multiplicadores de Lagrange”. As soluções estimadas $\delta\hat{x} \in \mathbb{R}^u$ e $\hat{k} \in \mathbb{R}^d$ para os termos incógnitos $\delta x \in \mathbb{R}^u$ e $k \in \mathbb{R}^d$ são obtidas encontrando o mínimo da função de Lagrange, ou seja:

$$\Phi(\delta x, k) = l^T Pl - 2l^T PA\delta\hat{x} + \delta\hat{x}^T A^T PA\delta\hat{x} + 2\hat{k}^T (D^T \delta\hat{x} - c) = \min \quad (9)$$

Note que o termo constante “2” foi adicionado a Eq. (9) apenas para simplificar o desenvolvimento restante do modelo matemático. A rigor, a função $g(\delta x)$ agora é dada por $g(\delta x) = 2D^T \delta\hat{x} = 2c$, o que não ocasiona nenhum problema na função de Lagrange, uma vez que se $2D^T \delta\hat{x} = 2c$, então $(D^T \delta\hat{x} - c) = 0$.

Para encontrar o mínimo da função de Lagrange na Eq. (9), iguala-se as respectivas derivadas parciais a zero, resultando em:

$$\frac{\partial \Phi(\delta\hat{x}, \hat{k})}{\partial \delta\hat{x}} = A^T PA\delta\hat{x} - A^T Pl - D\hat{k} = 0_u, \quad \frac{\partial \Phi(\delta\hat{x}, \hat{k})}{\partial \hat{k}} = D^T \delta\hat{x} - c = 0_d \quad (10)$$

com os vetores nulos $0_u \in \mathbb{R}^u$ e $0_d \in \mathbb{R}^d$. Para a segunda derivada parcial em relação a $\delta\hat{x}$, resulta em $A^T PA$, e, pela álgebra linear, a garantia de mínimo é satisfeita, pois todos os autovalores desta matriz são positivos se P é uma matriz simétrica e positiva definida. Agrupando a Eq. (10) em “submatrizes”, têm-se:

$$\begin{bmatrix} A^T PA\delta\hat{x} - A^T Pl + D\hat{k} \\ D^T \delta\hat{x} - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T PA & D \\ D^T & 0_{d \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\hat{x} \\ \hat{k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T Pl \\ c \end{bmatrix} = 0_{(u+d)} \quad (11)$$

com a matrix nula $0_{d \times d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ e o vetor nulo $0_{(u+d)} \in \mathbb{R}^{(u+d)}$. Rearranjando a Eq. (11), resulta em:

$$\begin{bmatrix} A^T PA & D \\ D^T & 0_{d \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\hat{x} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T Pl \\ c \end{bmatrix} \quad (12)$$

O sistema resultante na Eq. (12) possui $u + d$ equações a $u + d$ incógnitas (elementos de $\delta\hat{x}$ e \hat{k}). Portanto, se a matriz *datum* D for definida de tal forma que $\text{rank} \begin{bmatrix} A^T PA & D \\ D^T & 0_{d \times d} \end{bmatrix} = u + d$, ou seja, se A e D forem de posto completo e linearmente independentes, é possível obter a inversa da respectiva matriz-bloco, resultando na seguinte solução única para os termos incógnitos $\delta\hat{x}$ e \hat{k} :

$$\begin{bmatrix} \delta\hat{x} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T PA & D \\ D^T & 0_{d \times d} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T Pl \\ c \end{bmatrix} \quad (13)$$

Em geral, a matriz A não terá posto completo: $\text{rank}(A) = u - d \neq u$, e, além disso, se está interessado somente nos elementos de $\delta\hat{x}$, podendo-se reduzir o custo computacional da solução geral dada pela Eq. (13). Para isto, definimos a “matriz normal” $N \in \mathbb{R}^{u \times u}$ como $N = A^T PA$ e consideramos que $MM^{-1} = M^{-1}M = I$, sendo M^{-1} a inversa de uma matriz quadrada M e I a matriz identidade correspondente.

Portanto, podemos definir uma matriz em bloco $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$, $Q \in \mathbb{R}^{(u+d) \times (u+d)}$ como uma inversa para a matriz em bloco $\begin{bmatrix} A^T PA & D \\ D^T & 0_{d \times d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & D \\ D^T & 0_{d \times d} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(u+d) \times (u+d)}$, resultando em:

$$\begin{bmatrix} N & D \\ D^T & 0_{d \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{u \times u} & 0_{u \times d} \\ 0_{d \times u} & I_{d \times d} \end{bmatrix} \quad (14)$$

com as matrizes identidade $I_{u \times u} \in \mathbb{R}^{u \times u}$ e $I_{d \times d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ e as matrizes nulas $0_{d \times u} \in \mathbb{R}^{d \times u}$ e $0_{u \times d} \in \mathbb{R}^{u \times d}$.

Note ainda que $Q_{11} \in \mathbb{R}^{u \times u}$, $Q_{12} \in \mathbb{R}^{u \times d}$, $Q_{21} \in \mathbb{R}^{d \times u}$ e $Q_{22} \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Para definir as matrizes da matriz-bloco Q na Eq. (14), considerando que $\text{rank}(A) = u - d$, pode-se construir uma matriz $B \in \mathbb{R}^{u \times d}$ linearmente independente da matriz A e tal que $AB = 0_{n \times d}$ e $B^T A^T = 0_{d \times n}$. A matriz B não é única, mas uma solução possível, considerando a Eq. (4), é dada por $B = \begin{bmatrix} L \\ -I_{d \times d} \end{bmatrix}$. Neste caso, pré multiplicando ambos os termos da Eq. (3) pela matriz transposta de $A_{(u-d)}$, têm-se:

$$A_{(u-d)}^T A_{(u-d)} L = A_{(u-d)}^T A_d \quad (15)$$

Uma vez que $\text{rank}(A_{(u-d)}) = u - d$, a matriz quadrada $A_{(u-d)}^T A_{(u-d)} \in \mathbb{R}^{(u-d) \times (u-d)}$ possui inversa pois tem posto completo, sendo a matriz L dada por:

$$L = (A_{(u-d)}^T A_{(u-d)})^{-1} A_{(u-d)}^T A_d \quad (16)$$

Portanto, embora não necessário no desenvolvimento matemático aqui apresentado, a matriz B pode ser completamente especificada caso desejado. Desenvolvendo o produto matricial da Eq. (14), obtém-se as seguintes condições:

$$NQ_{11} + DQ_{21} = I_{u \times u}, \quad NQ_{12} + DQ_{22} = 0_{u \times d}, \quad D^T Q_{11} = 0_{d \times u}, \quad D^T Q_{12} = I_{d \times d} \quad (17)$$

Multiplicando ambos os lados da primeira condição da Eq. (17) pela transposta da matriz B , têm-se:

$$NB^T NQ_{11} + B^T DQ_{21} = B^T I_{u \times u} \quad (18)$$

Pela álgebra linear, se $B^T A^T = 0_{d \times n}$ e $N = A^T PA$, então $B^T N = B^T A^T PA = 0_{d \times u}$. Além disso, se as matrizes B e D tem posto completo, então a matriz $B^T D \in \mathbb{R}^{d \times d}$ também tem posto completo e possui inversa. Desta forma, isolando a matriz incógnita $Q_{21} \in \mathbb{R}^{d \times u}$ na Eq. (18), resulta em:

$$Q_{21} = (B^T D)^{-1} B^T \quad (19)$$

Note que $Q_{12} = Q_{21}^T = B(D^T B)^{-1} \in \mathbb{R}^{u \times d}$, pois, substituindo Q_{12} por $Q_{21}^T = B(D^T B)^{-1}$ na última condição da Eq. (17), temos: $D^T Q_{12} = D^T B(D^T B)^{-1} = I_{d \times d}$. Pela álgebra linear, se $B^T D \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é uma matriz quadrada que possui inversa, então a sua matriz transposta $D^T B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ também possui inversa.

Portanto, a única matriz ainda não especificada na Eq. (14) é Q_{22} . Substituindo $Q_{12} = Q_{21}^T = B(D^T B)^{-1}$ na segunda condição da Eq. (17), temos que: $NB(D^T B)^{-1} + DQ_{22} = 0_{u \times d}$. Uma vez que $AB = 0_{u \times d}$, então $NB = A^T PAB = 0_{u \times d}$. Logo: $DQ_{22} = 0_{u \times d}$, o que resulta em $Q_{22} = 0_{u \times d}$, pois D é uma matriz de posto completo: $\text{rank}(D) = d$.

Desta forma, embora todas as matrizes contidas na matriz-bloco Q da Eq. (14) tenham sido especificadas, necessitamos para isso definir a matriz $B \in \mathbb{R}^{u \times d}$, por exemplo, como $B = \begin{bmatrix} L \\ -I_{d \times d} \end{bmatrix}$, o que envolve o particionamento da matriz A para a obtenção da matriz L por meio da Eq. (16).

Para eliminar a necessidade de definição da matriz B , pós-multiplicando a Eq. (19) por D , obtem-se:

$$Q_{21}D = (B^T D)^{-1}B^T D = I_{d \times d} \quad (20)$$

Note que pela última condição da Eq. (17) e pela Eq. (20): $Q_{21}D = D^T Q_{12} = I_{d \times d}$. Considerando que $Q_{12} = B(D^T B)^{-1}$ e pré-multiplicando ambos os lados dessa igualdade por $(N + DD^T)$, resulta em:

$$(N + DD^T)Q_{12} = (N + DD^T)B(D^T B)^{-1} \quad (21)$$

Novamente recorrendo à álgebra linear: $NB = AB = 0_{u \times d}$, pois $N = A^T PA$. Portanto, temos que:

$$(N + DD^T)Q_{12} = DD^T B(D^T B)^{-1} = D \quad (22)$$

Desta forma, obtemos uma expressão para Q_{12} que independe da definição da matriz B : $Q_{12} = (N + DD^T)^{-1}D$. No caso, como N e D possuem posto completo, a matriz resultante $(N + DD^T) \in \mathbb{R}^{u \times u}$ possui posto completo: $\text{rank}(N + DD^T) = (u - d) + d = u$, e, portanto, a inversa $(N + DD^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{u \times u}$ existe. Como $Q_{12} = Q_{21}^T$, pela álgebra linear, tem-se: $Q_{21} = D^T(N + DD^T)^{-1}$, pois se $N = A^T PA$ e DD^T são matrizes simétricas, então $(N + DD^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{u \times u}$ é uma matriz simétrica.

Logo, resta agora obter uma expressão para Q_{11} independente da matriz B . Para isto, pós-multiplicamos a primeira condição da Eq. (17) por N , resultando em:

$$NQ_{11}N + DQ_{21}N = I_{u \times u}N = N \quad (23)$$

Uma vez que pela Eq. (19): $Q_{21} = (B^T D)^{-1}B^T$, e pela álgebra linear: $B^T N = B^T A^T PA = 0_{d \times u}$, temos que $DQ_{21}N = D(B^T D)^{-1}B^T N = 0_{u \times u}$ e, portanto, a Eq. (23) se reduz em: $NQ_{11}N = N$. Desta forma, a matriz Q_{11} é uma inversa generalizada da matriz N (ver, por exemplo, Teunissen, 1985; Caspary, 2000, capítulo 3; Ogundare, 2018, capítulo 14).

Pela terceira condição da Eq. (17): $D^T Q_{11} = 0_{d \times u}$, e, pela álgebra linear, temos que $DD^T Q_{11} = 0_{u \times u}$ se $D^T Q_{11} = 0_{d \times u}$. Considerando $NQ_{11}N = N$ e $DD^T Q_{11} = 0_{u \times u}$, resulta em:

$$NQ_{11}N + 0_{u \times u} = (N + DD^T)Q_{11}(N + DD^T) = N \quad (24)$$

Isolando a matriz Q_{11} na Eq. (24), obtem-se:

$$Q_{11} = (N + DD^T)^{-1}N(N + DD^T)^{-1} \quad (25)$$

Desta forma, especificamos todas as matrizes em bloco Q em função apenas de $N = A^T PA$, D e $0_{d \times d}$, podendo reescrever a Eq. (13) como:

$$\begin{bmatrix} \delta \hat{x} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T Pl \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + DD^T)^{-1}N(N + DD^T)^{-1} & (N + DD^T)^{-1}D \\ D^T(N + DD^T)^{-1} & 0_{d \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T Pl \\ c \end{bmatrix} \quad (26)$$

Portanto, a solução para $\delta\hat{x}$ é dada por:

$$\delta\hat{x} = (N + DD^T)^{-1}N(N + DD^T)^{-1}A^TPl + (N + DD^T)^{-1}Dc = Q_{11}A^TPl + (N + DD^T)^{-1}Dc \quad (27)$$

Destaca-se que até então nenhuma suposição sobre os erros de observação foi realizada. Se considerarmos somente erros aleatórios nas observações na Eq. (1), temos que $E\{\hat{v}\} = 0_n$ e, portanto, $E\{l\} = A\delta x$. Note que neste caso, o estimador será enviesado pelas injunções definidas, pois $E\{\delta\hat{x}\} = Q_{11}A^TPE\{l\} + (N + DD^T)^{-1}Dc = Q_{11}N\delta x + (N + DD^T)^{-1}Dc \neq \delta x$. O viés da solução permanece mesmo para $D^T\delta\hat{x} = c = 0_d$, pois Q_{11} é uma inversa generalizada (mas não ordinária) de N , e, portanto, o produto matricial $Q_{11}N$ não resulta na matriz identidade I_{uxu} . O viés seria nulo apenas se $\delta x = 0_u$, ou seja, não houvessem erros no vetor dos parâmetros iniciais x_0 . Detalhes em Grafarend e Schaffrin (1974).

Assumindo variância nula para o vetor de termos constantes c , pela lei de propagação de covariâncias na Eq. (27), temos que a matriz de covariância dos parâmetros estimados $\hat{x} \in \mathbb{R}^u$ é dada por $\Sigma_{\hat{x}} = G\Sigma_yG^T \in \mathbb{R}^{u \times u}$, com $G = Q_{11}A^TP \in \mathbb{R}^{u \times n}$. Logo, uma vez que $P = \Sigma_y^{-1}$, temos que:

$$\Sigma_{\hat{x}} = Q_{11}A^TP\Sigma_yPAQ_{11} = Q_{11}A^TPAQ_{11} \quad (28)$$

Conforme visto anteriormente: $Q_{11} = (N + DD^T)^{-1}N(N + DD^T)^{-1}$ é uma inversa generalizada da matriz $N = A^TPA$. Portanto, a Eq. (28) se torna:

$$\Sigma_{\hat{x}} = Q_{11} = (N + DD^T)^{-1}N(N + DD^T)^{-1} \quad (29)$$

Note que a Eq. (27) pode ser simplificada quando $D^T\delta\hat{x} = c = 0_d$ e considerando que $Q_{11}A^T = (N + DD^T)^{-1}A^T$ (ver CASPARY, 2000), resultando em:

$$\delta\hat{x} = Q_{11}A^TPl = (N + DD^T)^{-1}A^TPl \quad (30)$$

Uma condição do tipo $D^T\delta\hat{x} = c = 0_d$ pode ser obtida, por exemplo, fixando um ou mais elementos do vetor dos parâmetros iniciais $x_0 \in \mathbb{R}^u$. Por exemplo, no caso da rede de nívelamento da Figura 2, fixando a altitude do ponto B em seu valor inicial ($\hat{H}_B = H_B^0$), temos $D^T\delta\hat{x} = 0$ com $D^T = [0 \ 1 \ 0]$, resultando em:

$$[0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} \delta\hat{H}_A \\ \delta\hat{H}_B \\ \delta\hat{H}_C \end{bmatrix} = \delta\hat{H}_B = 0, \text{ isto é, a altitude do ponto B fixa (injunção absoluta).}$$

Quando o ajustamento possui $i = d = u - \text{rank}(A)$ condições ou injunções, é dito “minimamente injuncionado” (*minimally constrained*). No exemplo da Figura 2, uma vez que $u = 3$ e $\text{rank}(A) = 2$: $u - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1$. Portanto, se $d = 1$, como por exemplo, considerando a altitude de um ponto qualquer como injunção absoluta, temos um ajustamento minimamente injuncionado.

Entretanto, se o número de injunções é $i > u - \text{rank}(A)$, o ajustamento é dito “sobre-injuncionado” (*overconstrained*), pois possui mais condições do que o mínimo necessário: $i > d = u - \text{rank}(A)$. Esta situação ocorre, por exemplo, em problemas de densificação de redes geodésicas, conforme será discutido posteriormente. Uma vez que as observações não são valores “fixos”, mas sim grandezas a serem “ajustadas”, estas não “sobre-injuncionam” o sistema. Por exemplo, uma rede com diversas observações de distâncias não possui condições em excesso, mas isto ocorre se diversas distâncias forem injuncionadas como valores fixos no ajustamento. Detalhes em Kuang (1996, capítulo 4).

3 TRANSFORMAÇÃO OU ATUALIZAÇÃO DO DATUM DO AJUSTAMENTO

O vetor de correção aos parâmetros iniciais $\delta\hat{x}$ na Eq. (27) e, portanto, o vetor dos parâmetros estimados $\hat{x} = x_0 + \delta\hat{x}$, bem como a sua matriz de covariância $\Sigma_{\hat{x}}$ na Eq. (29) dependem do *datum* do ajustamento, isto é, da escolha da matriz D . Embora o estimador \hat{x} e a sua matriz de covariância $\Sigma_{\hat{x}}$

dependem da escolha da matriz *datum*, o vetor dos resíduos \hat{v} e a sua matriz de covariância $\Sigma_{\hat{v}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ independem de D quando $rank(D) = d = u - rank(A)$ e as matrizes A e D são linearmente independentes. Portanto, \hat{v} e $\Sigma_{\hat{v}}$ são ditos “*datum* independentes” ou invariantes (Caspari, 2000, capítulo 3; Leick et al., 2015, capítulo 2).

Logo, outros termos derivados de \hat{v} também são *datum* independentes, a saber: o vetor das observações ajustadas $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$: $\hat{y} = y + \hat{v}$ e a sua matriz de covariância $\Sigma_{\hat{y}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a função objetivo do MMQ: $\hat{v}^T P \hat{v}$, e também o denominado “fator de variância *a posteriori*”: $\hat{\sigma}^2 = \hat{v}^T P \hat{v} / (n - rank(A))$. No caso da Figura 2, embora $\delta \hat{x}$ e $\Sigma_{\hat{x}}$ dependam da escolha do ponto a ser injuncionado, qualquer escolha neste sentido resulta no mesmo vetor dos resíduos \hat{v} e, portanto, no mesmo valor para $\hat{v}^T P \hat{v}$ e $\hat{\sigma}^2$.

Para demonstrar isso, considere que um vetor qualquer $\hat{f} \in \mathbb{R}^n$ pode ser expresso como uma função linear do vetor $\delta \hat{x} \in \mathbb{R}^u$: $\hat{f} = F \delta \hat{x}$, com a respectiva matriz $F \in \mathbb{R}^{n \times u}$. Considerando que $E\{\delta \hat{x}\} = Q_{11} N \delta x + (N + D D^T)^{-1} D c$ e que $Q_{12} = (N + D D^T)^{-1} D$, resulta em:

$$E\{\hat{f}\} = E\{F \delta \hat{x}\} = F Q_{11} N \delta x + F Q_{12} c \quad (31)$$

Para que o vetor \hat{f} seja independente das injunções escolhidas, precisamos de duas condições: $F Q_{11} N = F$ e $F Q_{12} c = 0$, ou seja, independência tanto da matriz *datum* D quanto do vetor c na condição estipulada $D^T \delta \hat{x} = c$. Note que as matrizes Q_{11} e Q_{12} da Eq. (31) dependem da matriz D na Eq. (26).

Se considerarmos $Q_{12} = B(D^T B)^{-1}$ e a matriz F como uma combinação linear da matriz A , ou seja: $F = G A$, com a matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, temos para a segunda condição:

$$F Q_{12} c = G A B (D^T B)^{-1} c = 0 \quad (32)$$

Esta condição é satisfeita, pois, conforme já visto, $AB = 0_{n \times d}$. Para a condição $F Q_{11} N = F$ e pela primeira condição da Eq. (17): $N Q_{11} = I_{u \times u} - D Q_{21}$, temos que $Q_{11} N = I_{u \times u} - Q_{12} D$, pois $N Q_{11}$ é um produto de duas matrizes simétricas, e, portanto, uma matriz simétrica (note que $Q_{12} = Q_{21}^T = B(D^T B)^{-1}$).

Logo, temos para a primeira condição:

$$G A Q_{11} N = G A (I_{u \times u} - B(D^T B)^{-1} D) = G A \quad (33)$$

Esta condição também é satisfeita, pois novamente temos que $AB = 0_{n \times d}$. Portanto, o vetor dos resíduos, expresso como uma função linear de $\delta \hat{x}$: $\hat{v} = A \delta \hat{x} - l$, independe das condições escolhidas $D^T \delta \hat{x} = c$, quando $rank(D) = d = u - rank(A)$. Em outras palavras, dado um vetor dos resíduos $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$, temos infinitas possibilidades para o vetor $\delta \hat{x} \in \mathbb{R}^u$ na Eq. (1), pois temos um sistema resultante de n equações a u incógnitas, com $n > u$. Para detalhes e uma demonstração matemática mais ampla, incluindo os termos $\Sigma_{\hat{v}}$, \hat{y} , $\Sigma_{\hat{y}}$, $\hat{v}^T P \hat{v}$ e $\hat{\sigma}^2$, ver Caspari (2000, capítulo 3) e Leick et al. (2015, capítulo 2).

Desta forma, Grafarend e Schaffrin (1974) afirmam que quando $rank(A) < u$, os parâmetros e sua matriz de covariância não são “quantidades estimáveis”, pois são dependentes da escolha da matriz *datum* D , resultando em um estimador $\hat{x} = x_0 + \delta \hat{x}$ enviesado como visto na seção anterior, o que não ocorre, por exemplo, para “quantidades estimáveis” ou “*datum* independentes” como \hat{v} , $\Sigma_{\hat{v}}$ e \hat{y} , $\Sigma_{\hat{y}}$.

Embora o vetor dos parâmetros estimados \hat{x} e a sua matriz de covariância $\Sigma_{\hat{x}}$ dependem do *datum* (por exemplo, da escolha do ponto fixo), fazendo uso da chamada “Transformação-S” (Baarda, 1973), é possível converter o vetor de correção aos parâmetros iniciais $\delta \hat{x}$ de um ajustamento minimamente injuncionado para outro ajustamento minimamente injuncionado, bem como a respectiva matriz de covariância dos parâmetros estimados. O termo “transformação-S” refere-se a uma transformação de similaridade (“similarity”), também conhecida como transformação isogonal, conforme ou de Helmert, pois qualquer ajustamento minimamente injuncionado não induz deformação, isto é, preserva a “forma” (os ângulos entre os alinhamentos) da rede antes e após o ajustamento.

Portanto, se $i = d = u - rank(A)$, a rede geodésica é denominada “rede livre” (*free network*), uma vez que os resíduos independem da escolha do *datum*; enquanto se $i > d = u - rank(A)$, a rede geodésica

é denominada “rede condicionada” (*constrained network*), uma vez que as injunções em excesso induzem deformação na rede e afetam os resíduos. Estes conceitos podem ser compreendidos pelo exemplo a seguir.

Em um circuito fechado de nivelamento, não importa a escolha do ponto fixo e nem o valor da altitude atribuída ao mesmo ($i = u - \text{rank}(A) = 1$), ou, em outras palavras, não importa a “base computacional de variância nula” (*zero-variance computational base*), o erro de fechamento e os resíduos dependem somente das observações de desníveis realizadas. Entretanto, se um circuito de nivelamento inicia em um ponto conhecido e finaliza em outro ponto conhecido ($i = 2 > u - \text{rank}(A) = 1$), então o erro de fechamento e os resíduos dependem das injunções ou dos valores de altitude conhecidos no primeiro e no último vértice do circuito. Destaca-se que um ajustamento por injunções mínimas não possibilita controle ou identificação de erros nas próprias injunções, ao contrário de um ajustamento com injunções em excesso.

Neste contexto, será demonstrada a seguir como obter a denominada matriz S , considerando que temos uma solução minimamente injuncionada $\delta\hat{x}_i, \Sigma_{\hat{x}_i}$ (dada pela matriz datum D_i) e desejamos converter para outra solução minimamente injuncionada $\delta\hat{x}_j, \Sigma_{\hat{x}_j}$ (dada pela matriz datum D_j). Inicialmente, considerando a Eq. (29) para $\Sigma_{\hat{x}_j}$ e a relação $N = N\Sigma_{\hat{x}}N = N\Sigma_{\hat{x}_i}N$, válida para qualquer ajustamento minimamente injuncionado com $\text{rank}(D) = d = u - \text{rank}(A)$, temos que:

$$\Sigma_{\hat{x}_j} = (N + D_j D_j^T)^{-1} N (N + D_j D_j^T)^{-1} = (N + D_j D_j^T)^{-1} N \Sigma_{\hat{x}_i} N (N + D_j D_j^T)^{-1} \quad (34)$$

Uma vez que N e $D_j D_j^T$ são matrizes simétricas, pela álgebra linear: $[(N + D_j D_j^T)^{-1} N]^T = N(N + D_j D_j^T)^{-1}$ e, portanto, $\Sigma_{\hat{x}_j} = K_j \Sigma_{\hat{x}_i} K_j^T$, com $K_j = (N + D_j D_j^T)^{-1} N$, $K_j \in \mathbb{R}^{u \times u}$. Logo, se $\Sigma_{\hat{x}_j} = K_j \Sigma_{\hat{x}_i} K_j^T$, então pela lei de propagação de covariâncias: $\delta\hat{x}_j = K_j \delta\hat{x}_i$ (ver, por exemplo Ghilani, 2010, capítulo 6; Gemaal et al., 2015, capítulo 3). Para evitar a inversão da matriz $N + D_j D_j^T \in \mathbb{R}^{u \times u}$ no cálculo da matriz K_j , consideramos novamente que $D_j D_j^T Q_{11} = 0_{u \times u}$ e, pela primeira condição da Eq. (17), com $Q_{21} = (B^T D_j)^{-1} B^T$ dado pela Eq. (19), temos que:

$$N Q_{11} + 0_{u \times u} = (N + D_j D_j^T) Q_{11} = I_{u \times u} - D_j (B^T D_j)^{-1} B^T \quad (35)$$

Isolando a matriz Q_{11} na Eq. (35) com $Q_{11} = (N + D_j D_j^T)^{-1} N (N + D_j D_j^T)^{-1}$ dado pela Eq. (25):

$$Q_{11} = (N + D_j D_j^T)^{-1} N (N + D_j D_j^T)^{-1} = (N + D_j D_j^T)^{-1} [I_{u \times u} - D_j (B^T D_j)^{-1} B^T] \quad (36)$$

Eliminando o termo em comum $(N + D_j D_j^T)^{-1}$ na Eq. (36), resulta em:

$$N(N + D_j D_j^T)^{-1} = I_{u \times u} - D_j (B^T D_j)^{-1} B^T \quad (37)$$

Aplicando a transposição na Eq. (37), obtém-se:

$$(N + D_j D_j^T)^{-1} N = I_{u \times u} - B(D_j^T B)^{-1} D_j^T \quad (38)$$

Logo, temos que:

$$K_j = (N + D_j D_j^T)^{-1} N = I_{u \times u} - B(D_j^T B)^{-1} D_j^T \quad (39)$$

Note que a matriz K_j é um operador diferencial que atua no vetor de correção aos parâmetros iniciais: $\delta\hat{x}_j = K_j \delta\hat{x}_i$. Portanto, para fazer uso da transformação-S, o vetor dos parâmetros iniciais x_0 deve ser o mesmo em ambos os casos: $\hat{x}_j = x_o^j + \delta\hat{x}_j$ e $\hat{x}_i = x_o^i + \delta\hat{x}_i$ com $x_o^j = x_o^i = x_o$. A única condição

exigida para a matriz $B \in \mathbb{R}^{u \times d}$ é que $\text{rank}(B) = d = u - \text{rank}(A)$, com $AB = 0_{n \times d}$ e $B^T A^T = 0_{d \times n}$.

Como visto anteriormente, a matriz B não é única, e um exemplo de matriz que atende estas condições é $B = \begin{bmatrix} L \\ -I_{d \times d} \end{bmatrix}$, com a matriz $L \in \mathbb{R}^{(u-d) \times d}$ dada pela Eq. (16). Outro exemplo é $B = H$, sendo $H \in \mathbb{R}^{u \times d}$ a denominada “matriz de Helmert” que será introduzida na próxima seção. Neste caso, podemos considerar a matriz correspondente $S = K_j \in \mathbb{R}^{u \times u}$:

$$S = I_{u \times u} - H(D_j^T H)^{-1} D_j^T \quad (40)$$

Portanto, caso deseja-se converter a matriz *datum* da rede geodésica (de D_i para D_j), não é necessário repetir todo o ajustamento pela Eq. (27) e pela Eq. (29), basta aplicar $\delta\hat{x}_j = S\delta\hat{x}_i$ e $\Sigma_{\hat{x}_j} = S\Sigma_{\hat{x}_i}S^T$, onde $\delta\hat{x}_i$, $\Sigma_{\hat{x}_i}$ são os resultados do ajustamento original com a matriz *datum* D_i e a matriz S é dada pela Eq. (40). Ressalta-se que D_i e D_j devem ser relativas a ajustamentos com injunções mínimas: $\text{rank}(D) = d = u - \text{rank}(A)$ e deve ser utilizado o mesmo vetor dos parâmetros iniciais x_0 em ambos os casos.

Em alguns problemas mais complexos da Fotogrametria, da Geodésia espacial ou da Geodesia “4D” (“cinemática”), a definição de uma matriz B tal que $AB = 0_{n \times d}$ pode demandar outras estratégias, como a decomposição em valores singulares da matriz A . Para questões mais avançadas no tema, ver, por exemplo, Dermanis (1994); Sillard; Boucher (2001); Even-Tzur (2012); Aydin (2017) e Chatzinikos; Dermanis (2017).

4 O CASO DO MONITORAMENTO GEODÉSICO MULTIÉPOCAS

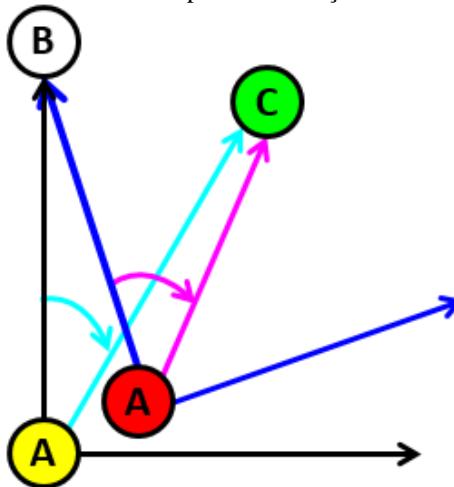
O monitoramento geodésico de estruturas naturais ou artificiais consiste em realizar observações periódicas (multitépocas) entre os vértices de uma rede de monitoramento. A análise de deformação ou possíveis deslocamentos de um ou mais vértices da rede é realizada por meio da comparação dos resultados obtidos em duas ou mais épocas de observação distintas, sendo Pelzer (1971) um dos trabalhos pioneiros no rigor da formulação matemática e estatística deste procedimento.

Neste contexto, é fundamental que as diferentes épocas de observação estejam no “mesmo *datum*”. Isso não é satisfeito, por exemplo, se um (ou mais) ponto(s) que compõe(m) o *datum* se deslocar(em) de uma época para outra. No exemplo de levantamento 2D com estação total da Figura 3, onde a deficiência de posto é 3 (duas translações e uma orientação), consideramos o ponto A como origem do sistema de coordenadas e a orientação do sistema dada pela direção do alinhamento do ponto A ao ponto B, sendo a escala fornecida pelas medidas de distâncias (ver a Tabela 1). Se houver deslocamento do ponto A de uma época de observação para outra, os dois levantamentos não estarão mais no mesmo *datum*, pois tanto a origem quanto a orientação do sistema de coordenadas se alterou com esse deslocamento. Isto resulta em diferenças tanto no azimute quanto na distância ao ponto visado C. Note que a escala é fornecida pelas medidas de distâncias de cada época, ou seja, a escala também se altera de uma época para outra (ver Even-Tzur, 2012).

4.1 Condição NNT

Para evitar esse problema, é necessário recorrer a uma definição de *datum* que não envolva diretamente a materialização física dos vértices da rede monitorada. Isso pode ser feito, por exemplo, utilizando o “centroide” da rede, obtido pela média das coordenadas contidas no vetor dos parâmetros iniciais $x_0 \in \mathbb{R}^u$. Se o ajustamento das duas épocas for realizado com o mesmo vetor dos parâmetros iniciais x_0 , temos o mesmo centroide, e, portanto, podemos definir o mesmo *datum* para ambas as épocas. Para isto, trocamos a definição usual de *datum* baseada nos vértices fisicamente materializados que compõem a rede por uma definição de *datum* baseada em um vértice “fictício” ou “virtual” como o centroide, que não está fisicamente materializado mas pode ser obtido matematicamente em função do vetor dos parâmetros iniciais.

Figura 3 – Deslocamento do ponto de estação A entre duas épocas.



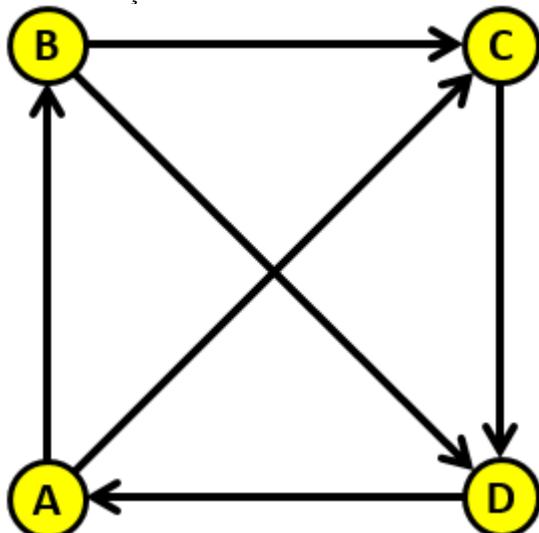
Fonte: Os autores (2025).

Portanto, no caso da deficiência em origem ou translação, ao invés de fixar um ponto da rede, podemos fixar o seu centroide, ou seja, o vetor dos parâmetros iniciais x_0 e o vetor dos parâmetros estimados \hat{x} irão possuir o mesmo ponto médio. No caso de uma rede 2D como da Figura 4, contendo “ k ” vértices (pontos), temos as seguintes condições:

$$\sum_{i=1}^k \delta\hat{x}_i = \delta\hat{x}_1 + \delta\hat{x}_2 + \dots + \delta\hat{x}_k = 0, \quad \sum_{i=1}^k \delta\hat{y}_i = \delta\hat{y}_1 + \delta\hat{y}_2 + \dots + \delta\hat{y}_k = 0 \quad (41)$$

onde $\delta\hat{x}_i$ é a correção na coordenada x do i -ésimo vértice da rede e $\delta\hat{y}_i$ é a correção na coordenada y do i -ésimo vértice da rede (para $i = 1, 2, \dots, k$). Esta condição é conhecida como “*no net translation*” (NNT) na literatura. Considerando injunções do tipo $D^T \delta\hat{x} = c = 0$ como na Eq. (7), a mesma condição é expressa na seguinte forma matricial:

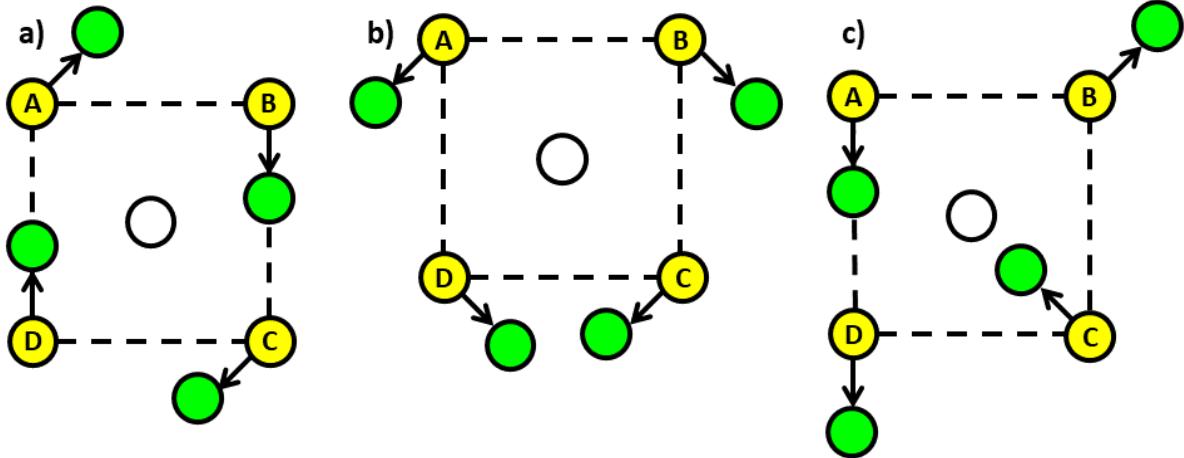
$$D^T \delta\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\hat{x}_1 \\ \delta\hat{y}_1 \\ \delta\hat{x}_2 \\ \delta\hat{y}_2 \\ \vdots \\ \delta\hat{x}_k \\ \delta\hat{y}_k \end{bmatrix} = 0 \quad (42)$$

Figura 4 – Exemplo de rede de trilateração 2D com $n = 6$ distâncias e $u = 8$ coordenadas x, y incógnitas.

Fonte: Os autores (2025).

Para visualizar a condição NNT, considere o exemplo de uma rede 2D com 4 vértices (A, B, C, D) da Figura 5a, onde os círculos em amarelo representam a posição inicial dos pontos A, B, C, D (vetor x_0), os círculos em verde representam a posição final dos pontos A, B, C, D (vetor \hat{x}) e o círculo em branco representa o centroide da rede. Neste exemplo, a rede 2D inicial é um quadrado e os deslocamentos são iguais em módulo, diferindo em direção e sentido. Desta forma, o deslocamento nordeste do ponto A é compensado pelo deslocamento sudoeste do ponto C; enquanto o deslocamento sul do ponto B é compensado pelo deslocamento norte do ponto D, mantendo assim a posição média dos pontos (centroide) inalterada(o).

Figura 5 – Exemplos de condição NNT (a), condição NNR (b) e condição NNS (c) em uma rede 2D.



Fonte: Os autores (2025).

4.2 Condição NNR

No caso da deficiência em orientação, ao invés de fixar a direção de um alinhamento entre dois vértices da rede, podemos fixar a direção média em relação ao seu centroide, ou seja, o vetor dos parâmetros iniciais x_0 e o vetor dos parâmetros estimados \hat{x} irão possuir o mesmo “azimute médio” em relação ao centroide. No caso de uma rede 2D como da Figura 4, o azimute (em radianos) da direção do centroide a um vértice i da rede é dado por:

$$Az = \text{atan}\left(\frac{x_i - x_c}{y_i - y_c}\right) + q \quad (43)$$

onde x_i, y_i são respectivamente as coordenadas x, y do vértice i (sejam as coordenadas iniciais x_i^0, y_i^0 ou as coordenadas estimadas $\hat{x}_i = x_i^0 + \delta\hat{x}_i, \hat{y}_i = y_i^0 + \delta\hat{y}_i$), x_c, y_c são respectivamente as coordenadas x, y do centroide, dadas por: $x_c = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^0$ e $y_c = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i^0$ e q é uma constante obtida em função da análise do quadrante (ver, por exemplo, Gemaal et al., 2015, capítulo 20).

Como o ajustamento neste caso é realizado pela linearização por série de Taylor em torno de x_0 , aplicando as derivadas parciais na Eq. (43), resulta em:

$$\frac{\partial Az(x_i, y_i)}{\partial x_i} = \frac{(y_i - y_c)}{DH^2}, \quad \frac{\partial Az(x_i, y_i)}{\partial y_i} = \frac{(x_c - x_i)}{DH^2} \quad (44)$$

onde DH é a distância horizontal ou 2D entre o centroide e o vértice i : $DH = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}$.

Visando melhor estabilidade numérica, podemos substituir as coordenadas x_i, y_i pelas respectivas coordenadas relativas ao centroide: $\bar{x}_i = x_i - x_c$, $\bar{y}_i = y_i - y_c$. A vantagem deste procedimento é que neste caso as coordenadas do centroide se tornam nulas: $\bar{x}_c = \bar{y}_c = 0$. Neste caso, as derivadas parciais da Eq. (44) se reduzem em:

$$\frac{\partial Az(\bar{x}_i, \bar{y}_i)}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\bar{y}_i}{(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)}, \quad \frac{\partial Az(\bar{x}_i, \bar{y}_i)}{\partial \bar{y}_i} = -\frac{\bar{x}_i}{(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)} \quad (45)$$

Portanto, considerando que o vetor dos parâmetros iniciais x_0 e o vetor dos parâmetros estimados \hat{x} devem possuir o mesmo “azimute médio” no caso de uma rede 2D como da Figura 4, temos a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\bar{y}_i}{(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)} \delta \hat{x}_i - \frac{\bar{x}_i}{(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)} \delta \hat{y}_i = \frac{\bar{y}_1}{(\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2)} \delta \hat{x}_1 - \frac{\bar{x}_1}{(\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2)} \delta \hat{y}_1 + \dots + \frac{\bar{y}_k}{(\bar{x}_k^2 + \bar{y}_k^2)} \delta \hat{x}_k - \frac{\bar{x}_k}{(\bar{x}_k^2 + \bar{y}_k^2)} \delta \hat{y}_k = 0 \quad (46)$$

Se considerarmos que as distâncias em relação ao centroide são aproximadamente iguais ($DH^2 = (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) \approx cte$), a Eq. (46) pode ser simplificada para:

$$\sum_{i=1}^k (\bar{y}_i \delta \hat{x}_i - \bar{x}_i \delta \hat{y}_i) = \bar{y}_1 \delta \hat{x}_1 - \bar{x}_1 \delta \hat{y}_1 + \bar{y}_2 \delta \hat{x}_2 - \bar{x}_2 \delta \hat{y}_2 + \dots + \bar{y}_k \delta \hat{x}_k - \bar{x}_k \delta \hat{y}_k = 0 \quad (47)$$

Esta condição é conhecida como “*no net rotation*” (NNR) na literatura. Considerando injunções do tipo $D^T \delta \hat{x} = c = 0$ como na Eq. (7), a mesma condição é expressa na seguinte forma matricial:

$$D^T \delta \hat{x} = [\bar{y}_1 \quad -\bar{x}_1 \quad \bar{y}_2 \quad -\bar{x}_2 \quad \dots \quad \bar{y}_k \quad -\bar{x}_k] \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_1 \\ \delta \hat{y}_1 \\ \delta \hat{x}_2 \\ \delta \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \delta \hat{x}_k \\ \delta \hat{y}_k \end{bmatrix} = 0 \quad (48)$$

Para visualizar a condição NNR, considere o exemplo de uma rede 2D com 4 vértices (A, B, C, D) da Figura 5b, onde os círculos em amarelo representam a posição inicial dos pontos A, B, C, D (vetor x_0), os círculos em verde representam a posição final dos pontos A, B, C, D (vetor \hat{x}) e o círculo em branco representa o centroide da rede. Neste exemplo, a rede 2D inicial é um quadrado e os deslocamentos são iguais em módulo, diferindo em direção e sentido. Desta forma, a redução do azimute do centroide ao ponto A é compensada pelo aumento do azimute do centroide ao ponto B; enquanto o aumento do azimute do centroide ao ponto C é compensado pela redução do azimute do centroide ao ponto D, mantendo assim o azimute médio do centroide a cada ponto da rede inalterado (neste exemplo simplificado para fins didáticos, desconsidera-se a alteração posicional do centroide após o ajustamento).

4.3 Condição NNS

No caso da deficiência em escala, ao invés de fixar a distância entre dois pontos da rede, podemos fixar a distância média em relação ao seu centroide, ou seja, o vetor dos parâmetros iniciais x_0 e o vetor dos parâmetros estimados \hat{x} irão possuir a mesma “distância média” em relação ao centroide. No caso de uma rede 2D como da Figura 4, a distância horizontal do centroide a um vértice i da rede é dada por:

$$DH = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} \quad (49)$$

Como o ajustamento neste caso é realizado pela linearização por série de Taylor em torno de x_0 , aplicando as derivadas parciais na Eq. (49), resulta em:

$$\frac{\partial DH(x_i, y_i)}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_c)}{DH}, \quad \frac{\partial DH(x_i, y_i)}{\partial y_i} = \frac{(y_i - y_c)}{DH} \quad (50)$$

Visando melhor estabilidade numérica, tal como no caso da orientação, podemos substituir as

coordenadas x_i, y_i pelas respectivas coordenadas relativas ao centroide: $\bar{x}_i = x_i - x_c, \bar{y}_i = y_i - y_c$.

Desta forma, as derivadas parciais da Eq. (50) resultam em:

$$\frac{\partial DH(\bar{x}_i, \bar{y}_i)}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\bar{x}_i}{\sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2}}, \quad \frac{\partial DH(\bar{x}_i, \bar{y}_i)}{\partial \bar{y}_i} = \frac{\bar{y}_i}{\sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2}} \quad (51)$$

Portanto, considerando que o vetor dos parâmetros iniciais x_0 e o vetor dos parâmetros estimados \hat{x} devem possuir a mesma “distância média” no caso de uma rede 2D com k vértices, temos a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\bar{x}_i}{\sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2}} \delta \hat{x}_i + \frac{\bar{y}_i}{\sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2}} \delta \hat{y}_i = \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2}} \delta \hat{x}_1 + \frac{\bar{y}_1}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2}} \delta \hat{y}_1 + \dots + \frac{\bar{x}_k}{\sqrt{\bar{x}_k^2 + \bar{y}_k^2}} \delta \hat{x}_k + \frac{\bar{y}_k}{\sqrt{\bar{x}_k^2 + \bar{y}_k^2}} \delta \hat{y}_k = 0 \quad (52)$$

Novamente, se considerarmos que as distâncias $DH = \sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2}$ em relação ao centroide são aproximadamente iguais, a Eq. (52) pode ser simplificada para:

$$\sum_{i=1}^k (\bar{x}_i \delta \hat{x}_i + \bar{y}_i \delta \hat{y}_i) = \bar{x}_1 \delta \hat{x}_1 + \bar{y}_1 \delta \hat{y}_1 + \bar{x}_2 \delta \hat{x}_2 + \bar{y}_2 \delta \hat{y}_2 + \dots + \bar{x}_k \delta \hat{x}_k + \bar{y}_k \delta \hat{y}_k = 0 \quad (53)$$

Esta condição é conhecida com “no net scale” (NNS) na literatura. Considerando injunções do tipo $D^T \delta \hat{x} = c = 0$ como na Eq. (7), a mesma condição é expressa na seguinte forma matricial:

$$D^T \delta \hat{x} = [\bar{x}_1 \quad \bar{y}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \bar{y}_2 \quad \dots \quad \bar{x}_k \quad \bar{y}_k] \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_1 \\ \delta \hat{y}_1 \\ \delta \hat{x}_2 \\ \delta \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \delta \hat{x}_k \\ \delta \hat{y}_k \end{bmatrix} = 0 \quad (54)$$

Para visualizar a condição NNS, considere o exemplo de uma rede 2D com 4 vértices (A, B, C, D) da Figura 5c, onde os círculos em amarelo representam a posição inicial dos pontos A, B, C, D (vetor x_0), os círculos em verde representam a posição final dos pontos A, B, C, D (vetor \hat{x}) e o círculo em branco representa o centroide da rede. Neste exemplo, a rede 2D inicial é um quadrado e os deslocamentos são iguais em módulo, diferindo em direção e sentido. Desta forma, a redução da distância do centroide ao ponto A é compensada pelo aumento da distância do centroide ao ponto D; enquanto o aumento da distância do centroide ao ponto B é compensado pela redução da distância do centroide ao ponto C, mantendo assim a distância média do centroide a cada ponto da rede inalterada (neste exemplo simplificado para fins didáticos, desconsidera-se a alteração posicional do centroide após o ajustamento).

Note que a condição NNS, ao contrário das condições NNT e NNR, não é necessária em uma rede de trilateração 2D como da Figura 4, uma vez as distâncias medidas suprem a deficiência em escala. Para as condições NNT, NNR e NNS em um caso geral 3D, ver, por exemplo, Kuang (1996, capítulo 4); Caspary (2000, capítulo 3), Sillard; Boucher (2001).

Desta forma, podemos definir uma matriz *datum* D que cumpra as condições NNT, NNR e NNS com $D^T \delta \hat{x} = 0$. Esta matriz é denominada de “matriz de Helmert” $H \in \mathbb{R}^{u \times d}$. Para o caso 2D, temos que:

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \bar{y}_1^0 & -\bar{x}_1^0 & \bar{y}_2^0 & -\bar{x}_2^0 & \dots & \bar{y}_k^0 & -\bar{x}_k^0 \\ \bar{x}_1^0 & \bar{y}_1^0 & \bar{x}_2^0 & \bar{y}_2^0 & \dots & \bar{x}_k^0 & \bar{y}_k^0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Quando o ajustamento é realizado com a matriz *datum* $D = H$, é denominado ajustamento por injunções mínimas internas (*inner constraints*), conforme os trabalhos pioneiros na “teoria do erro interno” (*inner error theory*) de Meissl (1969) e Blaha (1971). Neste caso, o *datum* da rede é fornecido pelo centroide desta, ou, em outras palavras, pelos elementos de x_0 . Desta forma, ajustamentos de observações em diferentes épocas, como no caso do monitoramento geodésico, mas com o mesmo vetor dos parâmetros iniciais x_0 , estarão no mesmo “*datum*”, desde que os pontos instáveis sejam removidos das condições NNT, NNR e NNS.

Em geral, atualmente a condição NNS não será necessária uma vez que as distâncias medidas suprem a deficiência em escala da rede (ver a Tabela 1). Neste sentido, quando as observações fornecem parte do *datum*, por exemplo, a escala e a orientação fornecida pelas componentes 3D de vetores GNSS, pode-se fazer uso do ajustamento da “rede livre extendida” (“*extended free net adjustment*”) proposto por Papo (1985) para remover ou “filtrar” a contribuição do *datum* fornecida pelas observações. Desta forma, o *datum* pode ser fornecido exclusivamente pelos elementos do vetor dos parâmetros iniciais x_0 . Detalhes neste tema fogem do escopo desta contribuição, mas podem ser obtidos, por exemplo, em Papo (1985) e Even-Tzur (2012).

É importante destacar que a vantagem de assumir distâncias iguais ao centroide, simplificando as condições da Eq. (46) e da Eq. (52) para as condições da Eq. (47) e da Eq. (53), respectivamente, é que a matriz H da Eq. (55) se torna uma matriz ortogonal, isto é, o produto escalar entre duas linhas quaisquer h_i e h_j de H será sempre nulo: $h_i^T h_j = h_j^T h_i = 0$ para $i \neq j$. Portanto, a condição $\text{rank}(H) = d$ é garantida independente da configuração espacial da rede, isto é, das coordenadas dos vértices. Para esta condição ser satisfeita, devemos adotar as coordenadas \bar{x}_i, \bar{y}_i relativas ao centroide, com $\bar{x}_c = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_0^i = 0$ e $\bar{y}_c = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{y}_0^i = 0$. Outra vantagem dessa simplificação é evitar a ponderação excessiva de alguns vértices da rede em função das respectivas distâncias ao centroide da rede: $DH = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} = \sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2}$.

Além disso, visando melhor estabilidade numérica, uma matriz *datum* como a matriz de Helmert pode ser “normalizada” em uma matriz unitária $\bar{D} \in \mathbb{R}^{u \times d}$, isto é, a norma de suas linhas resulta na unidade: $\|\bar{d}_i\| = \sqrt{\bar{d}_i^T \bar{d}_i} = 1$, de tal forma que: $\bar{D}^T \bar{D} = I_{d \times d}$. Pela álgebra linear, essa matriz é obtida fazendo: $\bar{D}^T = (\sqrt{D^T D})^{-1} D^T$, com $D^T D = \sqrt{D^T D} (\sqrt{D^T D})^T$. No caso da matriz de Helmert, a matriz resultante: $\bar{D}^T = \bar{H}^T = (\sqrt{H^T H})^{-1} H^T$, com $H^T H = \sqrt{H^T H} (\sqrt{H^T H})^T$ será ortogonal e normal, ou seja, $\bar{H} \in \mathbb{R}^{u \times d}$ será uma matriz ortonormal. Detalhes em Caspary (2000, capítulo 3).

4.4 A propriedade conforme das injunções mínimas internas

Uma vantagem do ajustamento por injunções mínimas internas é que este possui a propriedade conforme, isto é, preserva a “forma” da rede original. Em outras palavras, o ajustamento resulta em uma transformação isogonal do vetor dos parâmetros iniciais x_0 para o vetor dos parâmetros estimados $\hat{x} = x_0 + \delta\hat{x}$. Para demonstrar essa propriedade, inicialmente consideramos o modelo matemático da transformação conforme ou isogonal 2D:

$$\hat{x}_i = \lambda(\cos \theta x_i^0 + \sin \theta y_i^0) + \Delta x, \quad \hat{y}_i = \lambda(-\sin \theta y_i^0 + \cos \theta x_i^0) + \Delta y \quad (56)$$

onde \hat{x}_i, \hat{y}_i e x_i^0, y_i^0 são respectivamente as coordenadas x, y estimadas e iniciais do i -ésimo ponto (para $i = 1, 2, \dots, k = u/2$) e os demais termos são os quatro parâmetros de transformação estimados: λ é o fator de escala, θ é o ângulo de rotação, Δx é a translação no eixo x e Δy é a translação no eixo y (ver, por exemplo, Ghilani, 2010, capítulo 18). Neste caso, o vetor das “observações” originais $w \in \mathbb{R}^u$ corresponde ao vetor das coordenadas iniciais: $w = w_0 = x_0$, enquanto o vetor das “observações” estimadas $\hat{w} \in \mathbb{R}^u$ corresponde ao vetor das coordenadas estimadas: $\hat{w} = \hat{x} = x_0 + \delta\hat{x}$. Logo, o vetor dos resíduos desta transformação é dado por: $\hat{w} - w = \hat{x} - x_0 = \delta\hat{x}$.

Considerando o vetor dos parâmetros estimados da transformação como $\hat{z} = [\Delta x \quad \Delta y \quad \theta \quad \lambda]^T$, $\hat{z} \in \mathbb{R}^4$, e linearizando por série de Taylor a Eq. (56) em torno de um vetor de parâmetros de transformação iniciais $z_0 = [\Delta x^0 \quad \Delta y^0 \quad \theta^0 \quad \lambda^0]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$, $z_0 \in \mathbb{R}^4$, pelo modelo de Gauss-Markov, temos que $F(\hat{z}) - F(z_0) = \hat{w} - w_0 = J\delta\hat{z}$, com os vetores $\hat{w} = F(\hat{z}) \in \mathbb{R}^u$, $w_0 = F(z_0) \in \mathbb{R}^u$, a respectiva matriz *design* ou jacobiana $J \in \mathbb{R}^{u \times 4}$ e o vetor de correção aos parâmetros de transformação iniciais $\delta\hat{z} = [\delta\Delta x \quad \delta\Delta y \quad \delta\theta \quad \delta\lambda]^T$, $\delta\hat{z} \in \mathbb{R}^u$. Note que neste caso: $\hat{w} - w_0 = \begin{bmatrix} \hat{x}_i - x_i^0 \\ \hat{y}_i - y_i^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\hat{x}_i \\ \delta\hat{y}_i \end{bmatrix}$.

Para a obtenção da matriz jacobiana $J \in \mathbb{R}^{u \times 4}$, considerando $\cos \theta^0 = \cos 0^\circ = 1$ e $\sin \theta^0 = \sin 0^\circ = 0$, temos as seguintes derivadas parciais do modelo da Eq. (56) em relação aos 4 parâmetros de transformação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \Delta x} &= 1, & \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \Delta y} &= 0, & \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \theta} &= y_i^0, & \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \lambda} &= x_i^0 \\ \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \Delta x} &= 0, & \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \Delta y} &= 1, & \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \theta} &= -x_i^0, & \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \lambda} &= y_i^0 \end{aligned} \quad (57)$$

Portanto, o sistema de equações do modelo de Gauss-Markov correspondente $\hat{w} - w_0 = J\delta\hat{z}$ pode ser expresso na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta\hat{x}_i \\ \delta\hat{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i^0 & x_i^0 \\ 0 & 1 & -x_i^0 & y_i^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\Delta x \\ \delta\Delta y \\ \delta\theta \\ \delta\lambda \end{bmatrix} \quad (58)$$

Expandindo a Eq. (58) para os “ k ” vértices da rede e considerando que $\delta\hat{z} = \hat{z} - z_0$, resulta em:

$$\begin{bmatrix} \delta\hat{x}_1 \\ \delta\hat{y}_1 \\ \vdots \\ \delta\hat{x}_k \\ \delta\hat{y}_k \end{bmatrix} = J\delta\hat{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1^0 & x_1^0 \\ 0 & 1 & -x_1^0 & y_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & y_k^0 & x_k^0 \\ 0 & 1 & -x_k^0 & y_k^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \theta \\ \lambda - 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Evitando a ponderação entre as coordenadas dos vértices da rede, ou seja, considerando uma matriz peso P identidade neste caso: $P = I_{u \times u}$, $P \in \mathbb{R}^{u \times u}$, temos a seguinte condição do ajustamento pelo modelo de Gauss-Markov (ver, Klein, 2012, seção 2.2; Klein et al., 2011): $J^T(\hat{w} - w) = 0$. Portanto, neste caso, a referida condição resulta em: $J^T(\hat{w} - w) = J^T\delta\hat{z} = 0$. Considerando a matriz J da Eq. (59) para os k vértices da rede, essa condição é dada por:

$$J^T\delta\hat{z} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \delta\hat{x}_i \\ \sum_{i=1}^k \delta\hat{y}_i \\ \sum_{i=1}^k y_i^0 \delta\hat{x}_i - x_i^0 \delta\hat{y}_i \\ \sum_{i=1}^k x_i^0 \delta\hat{x}_i + y_i^0 \delta\hat{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Note que estas são exatamente as mesmas condições NNT, NNR e NNS contidas na matriz de Helmert: $J^T \delta\hat{x} = H^T \delta\hat{x} = 0$. Desta forma, demonstra-se matematicamente a propriedade conforme do ajustamento por injunções mínimas internas, quando a matriz *datum* é definida como $D = H$.

Embora os elementos de $\Sigma_{\hat{x}}$ dependam da escolha da matriz D , Caspary (2000) demonstra que se $\text{rank}(D) = d = u - \text{rank}(A)$ e $AD = 0_{n \times d}$, condição satisfeita quando $D = H$, então $\text{trace}\{\Sigma_{\hat{x}}\} = \min$, ou seja, a soma das variâncias dos elementos de \hat{x} é mínima, resultando em um estimador ótimo em termos de incerteza resultante. Além disso, Caspary (2000) também demonstra que quando as injunções são definidas de tal forma que $\text{rank}(D) = d = u - \text{rank}(A)$, $AD = 0_{n \times d}$ e $D^T \delta\hat{x} = c = 0_d$, condição também satisfeita quando $D = H$, então $\|\delta\hat{x}\| = \sqrt{\delta\hat{x}^T \delta\hat{x}} = \min$, ou seja, a norma euclidiana (módulo) do vetor $\delta\hat{x}$ é mínima(o), resultando em um estimador ótimo em termos de menor correção aos parâmetros iniciais x_0 .

É importante destacar que dentre as infinitas possibilidades de inversas generalizadas da matriz $N = A^T PA$, o ajustamento por injunções mínimas internas (com $D = H$) fornece o mesmo resultado obtido utilizando a denominada “pseudo-inversa” ou “inversa de Moore-Penrose” $N^+ \in \mathbb{R}^{u \times u}$ da matriz $N \in \mathbb{R}^{u \times u}$ (ver, por exemplo, Teunissen, 1985; Ogundare, 2018, capítulo 14; Rodríguez et al., 2020), sendo o trabalho do geodesista Bjerhammar (1951) um dos pioneiros na teoria das inversas generalizadas.

Destaca-se que caso um vértice da rede apresente deslocamento, isto é, seja identificado como “instável” de uma época de observação para outra, o mesmo deve ser removido do *datum* da rede, e, portanto, as suas coordenadas iniciais no vetor x_0 deixam de contribuir para as condições NNT, NNR e/ou NNS. Para isto, pode-se definir uma matriz *datum* $D_j = E_j H$, onde $E_j \in \mathbb{R}^{u \times u}$ é uma matriz diagonal contendo a unidade nos elementos da diagonal principal das coordenadas que compõem o *datum* da rede e zero nas demais. Se as coordenadas de todos os vértices contribuem para o *datum*, E_j é uma matriz identidade: $E_j = I_{u \times u}$.

Note a importância da Transformação-S neste contexto: ao invés de refazer todo o ajustamento de ambas as épocas com a nova matriz *datum*, basta obter a matriz S_j pela Eq. (40) com $D_j = E_j H$ para atualizar os resultados de ambas as épocas de observação: $\delta\hat{x}_j = S_j \delta\hat{x}_i$ e $\Sigma_{\hat{x}_j} = S_j \Sigma_{\hat{x}_i} S_j^T$, onde $\delta\hat{x}_i$, $\Sigma_{\hat{x}_i}$ são os resultados do ajustamento original, isto é, quando inicialmente todos os pontos são considerados estáveis e contribuem para o *datum* ($D_i = H$), e $\delta\hat{x}_j$, $\Sigma_{\hat{x}_j}$ são os resultados do ajustamento removendo o ponto identificado como instável do conjunto de pontos estáveis que compõem o *datum*.

Detalhes sobre a identificação de pontos instáveis são obtidos, por exemplo, em Duchnowski; Wiśniewski (2012) e Nowel (2020). Destaca-se que a aplicação das injunções mínimas internas abrange outros campos além do monitoramento geodésico de estruturas, como a Fotogrametria, a Geodinâmica e as realizações do ITRS, ver, por exemplo, Sillard; Boucher (2001), Dermanis (1994), Monico (2005, 2006), Chatzinikos; Dermanis (2017). Por fim, note que os exemplos de condições NNT, NNR e NNS da Figura 5 não preservam a “forma” da rede original, sendo a sua finalidade meramente ilustrativa do ponto de vista didático, desconsiderando o rigor matemático envolvido.

5 EXEMPLO NUMÉRICO: REDE DE MONITORAMENTO POR TRILATERAÇÃO

Como exemplo numérico, demonstramos o caso de uma rede de monitoramento por trilateração como da Figura 4. O objetivo deste exemplo é demonstrar as matrizes envolvidas nas diversas definições de *datum* possíveis. No caso da Figura 4, considerando as derivadas parciais das seis equações de distância horizontal $DH_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$, temos a seguinte estrutura para a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times u} = \mathbb{R}^{6 \times 8}$:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-(x_B^0 - x_A^0)}{DH_{AB}^0} & \frac{-(y_B^0 - y_A^0)}{DH_{AB}^0} & \frac{(x_B^0 - x_A^0)}{DH_{AB}^0} & \frac{(y_B^0 - y_A^0)}{DH_{AB}^0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(x_C^0 - x_B^0)}{DH_{BC}^0} & \frac{-(y_C^0 - y_B^0)}{DH_{BC}^0} & \frac{(x_C^0 - x_B^0)}{DH_{BC}^0} & \frac{(y_C^0 - y_B^0)}{DH_{BC}^0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(x_D^0 - x_C^0)}{DH_{CD}^0} & \frac{-(y_D^0 - y_C^0)}{DH_{CD}^0} & \frac{(x_D^0 - x_C^0)}{DH_{CD}^0} & \frac{(y_D^0 - y_C^0)}{DH_{CD}^0} \\ \frac{(x_A^0 - x_D^0)}{DH_{DA}^0} & \frac{(y_A^0 - y_D^0)}{DH_{DA}^0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(x_A^0 - x_D^0)}{DH_{DA}^0} & \frac{-(y_A^0 - y_D^0)}{DH_{DA}^0} \\ \frac{-(x_C^0 - x_A^0)}{DH_{AC}^0} & \frac{-(y_C^0 - y_A^0)}{DH_{AC}^0} & 0 & 0 & \frac{(x_C^0 - x_A^0)}{DH_{AC}^0} & \frac{(y_C^0 - y_A^0)}{DH_{AC}^0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(x_D^0 - x_B^0)}{DH_{BD}^0} & \frac{-(y_D^0 - y_B^0)}{DH_{BD}^0} & 0 & 0 & \frac{(x_D^0 - x_B^0)}{DH_{BD}^0} & \frac{(y_D^0 - y_B^0)}{DH_{BD}^0} \end{bmatrix}$$

Considerando que as coordenadas iniciais x, y dos vértices são dadas respectivamente por: $A(0,0), B(0,100), C(100,100), D(100,0)$, ou seja, que o vetor dos parâmetros iniciais $x_0 \in \mathbb{R}^u = \mathbb{R}^8$ é dado por: $x_0 = [x_A^0 \ y_A^0 \ x_B^0 \ y_B^0 \ x_C^0 \ y_C^0 \ x_D^0 \ y_D^0]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 100 \ 100 \ 100 \ 100 \ 0]^T$, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Para a matriz *datum* $D \in \mathbb{R}^{u \times d}$, temos diversas soluções possíveis, uma vez que a rede possui deficiência de posto: $u - \text{rank}(A) = 8 - 5 = 3$. Como a rede possui medidas de distância, de acordo com a Tabela 1, as deficiências são em origem (translação) e orientação, mas não em escala. Desta forma, se fixarmos as coordenadas x, y do ponto A para resolver a deficiência em origem e a coordenada x do ponto B , ou, neste caso, o azimute do alinhamento AB como $Az = 0^\circ$ para resolver a deficiência em orientação, a matriz *datum* $D \in \mathbb{R}^{u \times d} = \mathbb{R}^{8 \times 3}$ resulta nas seguintes condições ou injunções $D^T \delta \hat{x} = 0_d \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_A & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_B & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_A \\ \delta \hat{y}_A \\ \delta \hat{x}_B \\ \delta \hat{y}_B \\ \delta \hat{x}_C \\ \delta \hat{y}_C \\ \delta \hat{x}_D \\ \delta \hat{y}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_A \\ \delta \hat{y}_A \\ \delta \hat{x}_B \\ \delta \hat{y}_B \\ \delta \hat{x}_C \\ \delta \hat{y}_C \\ \delta \hat{x}_D \\ \delta \hat{y}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, as correções para as coordenadas iniciais x_A^0, y_A^0, x_B^0 serão nulas como condicionado: $\delta \hat{x}_A = \delta \hat{y}_A = \delta \hat{x}_B = 0$. Neste caso, o produto matricial $D^T A^T \in \mathbb{R}^{d \times n} = \mathbb{R}^{3 \times 6}$ resulta em:

$$D^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

ou seja, conforme esperado a condição $D^T A^T = 0_{d \times n}$ não é satisfeita, pois a matriz *datum* é diferente da matriz de Helmert: $D \neq H$.

Desta forma, outra solução possível para a matriz D seria por meio das condições NNT: $\sum_{i=1}^k \delta\hat{x}_i = \sum_{i=1}^k \delta\hat{y}_i = 0$ e NNR: $\sum_{i=1}^k (\bar{y}_i \delta\hat{x}_i - \bar{x}_i \delta\hat{y}_i) = 0$, com $\bar{x}_i = x_i^0 - x_c$ e $\bar{y}_i = y_i^0 - y_c$ para $i = A, B, C, D$. Neste caso, considerando as coordenadas do centroide da rede como $x_c = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_0^i = 50$ e $y_c = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_0^i = 50$ para $k = 4$ e $i = A, B, C, D$, a matriz $D = H \in \mathbb{R}^{u \times d} = \mathbb{R}^{8 \times 3}$ se torna:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \bar{y}_A^0 & -\bar{x}_A^0 & \bar{y}_B^0 & -\bar{x}_B^0 & \bar{y}_C^0 & -\bar{x}_C^0 & \bar{y}_D^0 & -\bar{x}_D^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 50 & -50 & -50 & -50 & -50 & -50 & 50 & 50 \end{bmatrix}$$

Desta forma, o produto matricial $D^T A^T \in \mathbb{R}^{d \times n} = \mathbb{R}^{3 \times 6}$ resulta em:

$$D^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{3 \times 6},$$

ou seja, conforme esperado a condição $D^T A^T = 0_{d \times n}$ é satisfeita, pois $D = H$ e $d = u - \text{rank}(A) = 3$.

Caso fosse desejado transformar a matriz *datum* em uma matriz ortonormal para melhor estabilidade numérica, fazendo $\bar{D}^T = (\sqrt{D^T D})^{-1} D^T$, com $D^T D = \sqrt{D^T D} (\sqrt{D^T D})^T$, temos que:

$$\bar{D}^T = (\sqrt{D^T D})^{-1} D^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} \end{bmatrix}$$

Portanto, temos que $\bar{d}_i^T \bar{d}_i = 1$, $\bar{d}_i^T \bar{d}_j = 0 \forall i \neq j$ e $\bar{D}^T \bar{D} = I_{d \times d}$ como desejado, sendo, portanto, $\bar{D} \in \mathbb{R}^{u \times d} = \mathbb{R}^{8 \times 3}$ uma matriz “ortonormal”. Note que não é necessário que todos os pontos façam parte da definição do *datum* da rede. Por exemplo, considerando que somente os vértices B e D irão compor as condições NNT e NNS, a matriz $D \in \mathbb{R}^{u \times d} = \mathbb{R}^{8 \times 3}$ se torna:

$$D^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{y}_B^0 & -\bar{x}_B^0 & 0 & 0 & \bar{y}_D^0 & -\bar{x}_D^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -50 & -50 & 0 & 0 & 50 & 50 \end{bmatrix}$$

Note que a condição $D^T A^T = 0_{d \times n}$ não é mais satisfeita nesse caso, pois, embora $\text{rank}(D) = u - \text{rank}(A) = 3$, agora $D \neq H$.

Vamos supor que deseja-se converter os resultados do ajustamento por injunções mínimas internas ($D = D_i$) para o primeiro caso apresentado ($D = D_j$), onde são fixadas as coordenadas iniciais x_A^0, y_A^0, x_B^0 por

meio das condições: $\delta\hat{x}_A = \delta\hat{y}_A = \delta\hat{x}_B = 0$. Neste caso, considerando $D_j^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

na Eq. (40), temos a respectiva matriz $S \in \mathbb{R}^{u \times u} = \mathbb{R}^{8 \times 8}$:

$$S = I_{u \times u} - H(D_j^T H)^{-1} D_j^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simulando erros considerando desvios-padrões de $\sigma = 2 \text{ mm}$ para cada distância, o ajustamento por injunções mínimas internas resultou em: $\delta\hat{x}_{(D_i)}^T = [\delta\hat{x}_A \quad \delta\hat{y}_A \quad \delta\hat{x}_B \quad \delta\hat{y}_B \quad \delta\hat{x}_C \quad \delta\hat{y}_C \quad \delta\hat{x}_D \quad \delta\hat{y}_D]^T =$

$[0,19 \ 0,13 \ 0,82 \ 0,65 \ -1,6 \ -0,4 \ 0,6 \ -0,4]^T$ (valores em mm). É fácil verificar que, desprezando os erros numéricos de arredondamento, as condições NNT e NNR são satisfeitas. Por exemplo, para a condição NNT no eixo x , temos: $\sum_{i=1}^k \delta\hat{x}_i = \frac{1}{4}(0,19 + 0,82 - 1,6 + 0,6) = 0,01 \text{ mm}$. Para converter os resultados para a primeira definição de *datum* considerada, basta fazer $\delta\hat{x}_{(D_j)} = S\delta\hat{x}_{(D_i)}$, resultando em:

$$\delta\hat{x}_{(D_j)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,13 \\ 0,82 \\ 0,65 \\ -1,6 \\ -0,4 \\ 0,6 \\ -0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,52 \\ -2,42 \\ 0,1 \\ 0,41 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma vez que os três primeiros termos de $\delta\hat{x}_{(D_j)}$ são nulos, temos as condições da primeira definição de *datum* satisfeitas: $\delta\hat{x}_A = \delta\hat{y}_A = \delta\hat{x}_B = 0$. Este exemplo demonstra a importância prática da Transformação-S na conversão direta de resultados entre ajustamentos minimamente injuncionados.

Note que se a matriz *datum* for definida pelas condições NNT, NNR e NNS: $\sum_{i=1}^k (\bar{x}_i \delta\hat{x}_i + \bar{y}_i \delta\hat{y}_i) = 0$, ou seja, $D = H$, mas agora com $i = 4 > d = 3$ condições, temos que:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \bar{y}_A^0 & -\bar{x}_A^0 & \bar{y}_B^0 & -\bar{x}_B^0 & \bar{y}_C^0 & -\bar{x}_C^0 & \bar{y}_D^0 & -\bar{x}_D^0 \\ \bar{x}_A^0 & \bar{y}_A^0 & \bar{x}_B^0 & \bar{y}_B^0 & \bar{x}_C^0 & \bar{y}_C^0 & \bar{x}_D^0 & \bar{y}_D^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 50 & -50 & -50 & -50 & -50 & -50 & 50 & 50 \\ -50 & -50 & -50 & 50 & 50 & 50 & 50 & -50 \end{bmatrix}$$

Neste caso, o produto matricial $D^T A^T \in \mathbb{R}^{d \times n} = \mathbb{R}^{4 \times 6}$ resulta em:

$$D^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 100\sqrt{2} & 100\sqrt{2} \end{bmatrix} \neq 0_{4 \times 6},$$

ou seja, a condição $D^T A^T = 0_{d \times n}$ não é satisfeita pois neste caso $i = 4 > u - \text{rank}(A) = 3$. Em outras palavras, a condição NNS não é necessária, pois, a rede possui medidas de distâncias e, portanto, não apresenta deficiência em escala. Caso fosse desejado remover a escala fornecida pelas observações, deveria-se aplicar o ajustamento da “rede livre extendida” (ver, por exemplo, Papo, 1985; Even-Tzur, 2012).

Vamos supor agora que a matriz *datum* tenha sido definida com as condições NNT e NNR, e se identificou o ponto *C* como instável de uma época de observação para outra, devendo portanto ser removido do conjunto de pontos estáveis que compõem o *datum* da rede. Neste caso, como visto na seção 4, a nova matriz *datum* $D_j \in \mathbb{R}^{u \times d} = \mathbb{R}^{8 \times 3}$ pode ser obtida pela relação: $D_j = E_j D$, com $E_j \in \mathbb{R}^{u \times u} = \mathbb{R}^{8 \times 8}$, resultando para $D_j = E_j D$:

$$D_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{x_A} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{y_A} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{x_B} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{y_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & -50 \\ 1 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -50 \\ 0 & 1 & -50 \\ 1 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & -50 \\ 1 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -50 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{x_C} & \underline{0} & \underline{x_C} \\ 0 & \underline{y_C} & \underline{y_C} \\ 1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 50 \end{bmatrix}$$

Desta forma, neste caso o ponto C identificado como instável de uma época para outra foi devidamente removido das condições NNT e NNR que compõem o *datum* da rede, conforme desejado.

6 O CASO DA DENSIFICAÇÃO DE REDES GEODÉSICAS DE REFERÊNCIA

Referenciais geodésicos globais devem ser periodicamente atualizados por meio das realizações do ITRS (ver, por exemplo, Drewes, 2009; Altamimi et al., 2023). O caso da densificação de redes geodésicas referenciadas ao ITRS, como por exemplo, o Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) e as Redes de Referência Cadastrais Municipais (RRCM), é completamente diferente do caso do monitoramento geodésico multiépocas. Neste contexto, têm-se pontos de referência pré-existentes em uma dada realização (ex: SIRGAS2000 na realização vigente do SGB) e deseja-se densificar a rede de referência a nível regional ou local com a inclusão e o ajustamento de novos vértices (ex: novas estações do SGB ou RRCM).

Neste caso, em geral o problema será sobre-injuncionado, ou seja, teremos mais pontos de referência pré-existentes do que o mínimo necessário: $i > d = u - \text{rank}(A)$. Conforme visto, isto resulta em deformação da rede original, pelo uso de condições em excesso (*constrained network*). Além disso, desejamos propagar as incertezas dos pontos de referência pré-existentes sobre os novos vértices a serem densificados, ver, por exemplo, Kuang (1996, capítulo 4); Ghilani (2010, capítulo 20). Note que o ajustamento por injunções mínimas internas convencional não possibilita isso, uma vez que não são feitas ponderações estocásticas entre os vértices que compõem o *datum* da rede.

Desta forma, uma solução adotada na literatura consiste em inicialmente ajustar as coordenadas dos pontos em um sistema local minimamente injuncionado. Depois, é realizada a transformação de Helmert para converter estas coordenadas de um sistema local para o *datum* desejado, utilizando os pontos de referência pré-existentes neste processo. Note que as coordenadas dos pontos de referência pré-existentes apresentarão resíduos com a estimativa dos parâmetros de transformação, mas isto é simplesmente negligenciado e o procedimento é denominado “*forgetful Helmert transformation*”. Logo, o fato do problema ser sobreinjuncionado, bem como, a necessidade de propagar as incertezas dos pontos de referência pré-existentes, tornam o problema de densificação de redes geodésicas de referência um tema de pesquisa ainda em aberto. Detalhes, por exemplo, em Schaffrin e Navratil (2012).

Nesta seção, será brevemente apresentada a solução geral proposta em Kotsakis (2013), que visa contornar ambas as limitações expostas. Inicialmente, considerando que a matriz de covariância $\Sigma_{\hat{x}} \in \mathbb{R}^{u \times u}$ das coordenadas dos pontos ajustados é afetada tanto pelas incertezas das observações quanto pelas incertezas dos pontos de referência pré-existentes, temos que:

$$\Sigma_{\hat{x}} = \Sigma_{\hat{x}}^{F(y)} + \Sigma_{\hat{x}}^{F(D)} = \sigma_0^2 (A^T P A + \sigma_0^2 D \Sigma_D^{-1} D^T)^{-1} \quad (61)$$

onde $\Sigma_{\hat{x}}^{F(y)} \in \mathbb{R}^{u \times u}$ é a contribuição das incertezas do vetor das observações y sobre $\Sigma_{\hat{x}}$, $\Sigma_{\hat{x}}^{F(D)}$ é a

contribuição das incertezas do *datum*, isto, é, dos pontos de referência pré-existentes sobre $\Sigma_{\hat{x}}$, σ_0^2 é o fator de variância (*a priori* quando se conhece a incerteza das observações ou *a posteriori* quando deve ser estimada), $\Sigma_D \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é a matriz de covariância contendo as incertezas do *datum* e as demais matrizes (A, P, D) são análogas as seções anteriores.

A matriz $\Sigma_D \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é obtida pela seguinte expressão:

$$\Sigma_D = D_i^T \Sigma_x^0 D_i \quad (62)$$

onde $D_i \in \mathbb{R}^{i \times d}$ é a sub-matriz da matriz $D \in \mathbb{R}^{u \times d}$ relativa aos pontos de referência pré-existentes e $\Sigma_x^0 \in \mathbb{R}^{i \times i}$ é a respectiva matriz de covariância das coordenadas dos pontos de referência pré-existentes. Note que i neste caso corresponde ao número total de injunções: coordenadas dos k pontos de referência pré-existentes. Para redes 1D como redes de nivelamento altimétrico ou gravimétrico: $i = k$, para redes 2D como redes horizontais ou de trilateração: $i = 2k$, e para redes 3D como redes GNSS ou planialtimétricas com estação total: $i = 3k$.

As matrizes A, P e Σ_x^0 são conhecidas *a priori*, sendo que o desafio consiste na definição da matriz D na Eq. (61) e na sua respectiva submatrix D_i na Eq. (62), de tal forma que $\Sigma_{\hat{x}}$ apresente traço mínimo, ou seja, a soma das variâncias dos elementos de \hat{x} é mínima, resultando em um estimador ótimo em termos de incerteza resultante. Kotsakis (2013) demonstra matematicamente que a solução ótima para D_i , dentro do contexto de injunções mínimas, ou seja, preservando a forma da rede original (*free network*), é dada por:

$$D_i = (\Sigma_x^0 + \sigma_0^2 M_i)^{-1} H_i \quad (63)$$

onde $H_i \in \mathbb{R}^{i \times d}$ é uma matriz obtida em função da matriz de Helmert $H \in \mathbb{R}^{u \times d}$: $H_i = K^T H$, com $K \in \mathbb{R}^{u \times i}$ sendo formada por uma matriz identidade $I_{i \times i} \in \mathbb{R}^{i \times i}$ e uma matriz nula $0_{(u-i) \times i} \in \mathbb{R}^{(u-i) \times i}$: $K = \begin{bmatrix} I_{i \times i} \\ 0_{(u-i) \times i} \end{bmatrix}$. A matriz $M_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ é uma sub-matriz da matriz simétrica $M = (A^T P A + H H^T)^{-1}$, $M \in \mathbb{R}^{u \times u}$, relativa somente as “ i ” coordenadas dos “ k ” pontos pré-conhecidos. Note que a matriz H neste caso é definida de tal forma que: $AH = 0_{n \times d}$. Portanto, se a rede possui medidas de distância, a condição NNS não é necessária, e se a rede for formada por vetores GNSS, as condições NNR e NNS não são necessárias.

Uma vez que a matriz D_i é obtida pela Eq. (63), a matriz $D \in \mathbb{R}^{u \times d}$ é dada por $D = \begin{bmatrix} D_i \\ 0_{(u-i) \times d} \end{bmatrix}$, com $0_{(u-i) \times d} \in \mathbb{R}^{(u-i) \times d}$ sendo uma matriz nula. Portanto, o ajustamento da densificação da rede geodésica de referência resulta em:

$$\delta\hat{x} = (A^T P A + DD^T)^{-1} A^T P l, \Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 (A^T P A + \sigma_0^2 D \Sigma_D^{-1} D^T)^{-1} \quad (64)$$

Esta solução é “ótima” porque fornece traço mínimo para $\Sigma_{\hat{x}}$ considerando as incertezas do *datum* e não apenas das medições, além de ser uma solução por injunções mínimas que preserva a forma da rede original, ao contrário do caso sobreinjunctionado com $i > d = u - \text{rank}(A)$ (*constrained network*). Além disso, estas condições podem ser interpretadas como injunções mínimas internas “ponderadas” ou “generalizadas” (*weighted or generalized minimal inner constraints*), pois as condições NNT e/ou NNR e/ou NNS do tipo: $D^T \delta\hat{x} = H_i^T \delta\hat{x}_i = 0$ são ponderadas na Eq. (63) pela matriz $P_i = (\Sigma_x^0 + \sigma_0^2 M_i)^{-1}$, $P_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$, ou seja:

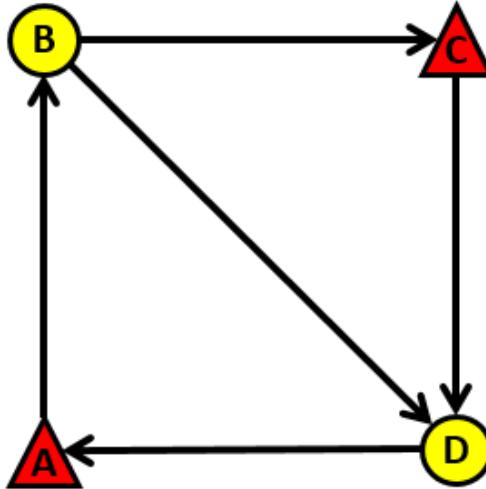
$$H_i^T P_i \delta\hat{x}_i = H_i^T (\Sigma_x^0 + \sigma_0^2 M_i)^{-1} \delta\hat{x}_i = 0 \quad (65)$$

onde $\delta\hat{x}_i \in \mathbb{R}^i$ é um subvetor de $\delta\hat{x} \in \mathbb{R}^u$ referente as coordenadas dos pontos de referência pré-existentes que compõem o *datum*. Detalhes e outras formulações para a matriz peso P_i são obtidos em Kotsakis (2013).

7 EXEMPLO NUMÉRICO: DENSIFICAÇÃO DE REDE ALTIMÉTRICA

Considere o exemplo de densificação de uma rede altimétrica com $k = 2$ pontos de referência pré-existentes conforme a Figura 6. Neste exemplo, vamos considerar que os desniveis observados $\Delta H = H_j - H_i$ entre dois vértices de altitudes H_j e H_i possuem desvio-padrão de $\sigma_{\Delta H} = 5 \text{ mm}$ e três cenários possíveis para os desvios-padrões das altitudes H_{inj} dos dois pontos de referência pré-existentes A e C (injunções): $\sigma_{H_{inj}} = 1 \text{ mm} < \sigma_{\Delta H} = 5 \text{ mm}$ (caso 1); $\sigma_{H_{inj}} = 5 \text{ mm} = \sigma_{\Delta H} = 5 \text{ mm}$ (caso 2); e $\sigma_{H_{inj}} = 10 \text{ mm} > \sigma_{\Delta H} = 5 \text{ mm}$ (caso 3). Caspary (2000, capítulo 3) mostra um exemplo similar, mas com apenas $k = 1$ ponto de referência, sem a abordagem de Kotsakis (2013) e sem o uso de simulações numéricas por Monte-Carlo.

Figura 6 – Densificação de rede altimétrica com $n = 5$ desniveis e $k = 2$ pontos de referência pré-existentes.



Fonte: Os autores (2025).

Note que neste exemplo a deficiência de *datum* (d) vale $u - rank(A) = 4 - 3 = 1$ (deficiência apenas em origem), uma vez que os desniveis observados ΔH suprem a escala e a orientação (ver a Tabela 1). Cinco soluções possíveis serão consideradas, três por injunções mínimas ($i = d = 1$) e duas com condições em excesso ($i = k = 2 > 1$). As soluções por injunções mínimas ($i = d = 1$) serão:

- condição NNT para todos os vértices: *NNT_all*;
- condição NNT apenas para os dois vértices pré-existentes A e C: *NNT_inj*; e
- condição NNT apenas para os dois vértices pré-existentes, mas por meio da abordagem ponderada ou generalizada de Kotsakis (2013): *NNT_gen*.

As soluções sobre-injuncionadas ($i = 2 > d = 1$) serão:

- injunções absolutas (fixas) das altitudes de A e de C: *INJ_abs*; e
- injunções relativas (ponderadas) das altitudes de A e de C: *INJ_rel*.

Ordenando o vetor dos parâmetros iniciais $x_0 \in \mathbb{R}^{u=4}$ (valores em m) como $x_0 = [H_A^0 \ H_C^0 \ H_B^0 \ H_D^0]^T = [1 \ 3 \ 2 \ 4]^T$, ou seja, contendo primeiro os $k = 2$ pontos de referência previamente existentes (A e C), resulta na seguinte matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times u} = \mathbb{R}^{5 \times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{H_A} & \color{red}{H_C} & \color{red}{H_B} & \color{red}{H_D} \\ \widehat{-1} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para as soluções *NNT_all* e *NNT_inj* a matriz *datum* $D \in \mathbb{R}^{u \times d} = \mathbb{R}^{4 \times 1}$ é dada respectivamente por:

$$D_{NNT_all} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_{NNT_inj} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a solução NNT_gen , a matriz *datum* $D \in \mathbb{R}^{u \times d} = \mathbb{R}^{4 \times 1}$ é dada por:

$$D_{NNT_gen} = \begin{bmatrix} D_i \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde a matriz $D_i \in \mathbb{R}^{i \times d} = \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é dada pela Eq. (63). Conforme já visto, as injunções absolutas (*hard constraints*) podem ser definidas tanto por meio da matriz D quanto deletando as colunas correspondentes da matriz A (e, portanto, os respectivos elementos do vetor x_0), fornecendo os mesmos resultados em ambos os casos quando $i = d = u - rank(A)$. Neste exemplo com injunções absolutas em excesso: $i = 2 > u - rank(A) = 1$, deletou-se as duas primeiras colunas da matriz A , relativas aos vértices A e C, resultando na respectiva matriz $A_{(u-d)} \in \mathbb{R}^{n \times (u-d)} = \mathbb{R}^{n=5 \times 2}$:

$$A_{(u-d)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_B & \mathbf{H}_D \\ \hat{1} & \hat{0} \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para as injunções relativas ou ponderadas (*soft or weighted constraints*), considera-se a matriz peso dos parâmetros $P_x \in \mathbb{R}^{u \times u}$ alterando a condição da Eq. (7) para: $\hat{v}^T P \hat{v} + \delta \hat{x}^T P_x \delta \hat{x} = min$. Similar a matriz peso das observações, se todos os parâmetros incógnitos possuem valores pré-conhecidos no vetor dos parâmetros iniciais x_0 e uma respectiva matriz de covariância *a priori* $\Sigma_{x_0} \in \mathbb{R}^{u \times u}$, a matriz peso dos parâmetros é dada por $P_x = \Sigma_{x_0}^{-1}$.

Se apenas uma parte dos parâmetros iniciais possuem valores pré-conhecidos (exemplo: as i coordenadas relativas aos k pontos de referência) e uma respectiva matriz de covariância *a priori* $\Sigma_x^0 \in \mathbb{R}^{i \times i}$, a matriz peso nesse caso é dada por: $P_x = \begin{bmatrix} (\Sigma_x^0)^{-1} & 0_{i \times (u-i)} \\ 0_{(u-i) \times i} & 0_{(u-i) \times (u-i)} \end{bmatrix}$, com as matrizes nulas: $0_{i \times (u-i)} \in \mathbb{R}^{i \times (u-i)}$, $0_{(u-i) \times i} \in \mathbb{R}^{(u-i) \times i}$ e $0_{(u-i) \times (u-i)} \in \mathbb{R}^{(u-i) \times (u-i)}$.

A solução para $\delta \hat{x}$ é dada por $\delta \hat{x} = (N + P_{\hat{x}})^{-1} A^T P l$ e a matriz de covariância dos parâmetros estimados é dada por $\Sigma_{\hat{x}} = (N + P_{\hat{x}})^{-1}$. Detalhes sobre as injunções relativas são obtidos, por exemplo, em Gemaal et al. (2015, capítulo 14); Leick et al. (2015, capítulo 2) e Ogundare (2018, capítulos 5 e 6).

Neste exemplo, onde $u = 4$ e $i = k = 2$ (rede de nivelamento altimétrico 1D), assumindo covariâncias nulas entre as altitudes previamente conhecidas de A e C, a matriz $P_x \in \mathbb{R}^{u \times u} = \mathbb{R}^{4 \times 4}$ se torna:

$$P_x = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{H_A}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{H_C}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $\sigma_{H_A} = \sigma_{H_C} = 0,001 \text{ m}$ (caso 1); $\sigma_{H_A} = \sigma_{H_C} = 0,005 \text{ m}$ (caso 2) e $\sigma_{H_A} = \sigma_{H_C} = 0,01 \text{ m}$ (caso 3).

Nos três casos definidos, serão analisadas as seguintes métricas: $\sqrt{\text{trac}(\Sigma_{\hat{x}})}$, $\|\delta \hat{x}\| = \sqrt{\delta \hat{x}^T \delta \hat{x}}$ e $\hat{v}^T P \hat{v}$, ou seja, será analisado a incerteza total resultante ($\sqrt{\text{trac}(\Sigma_{\hat{x}})}$), a norma ou módulo do vetor de

correções $\delta\hat{x}$ ($\|\delta\hat{x}\| = \sqrt{\delta\hat{x}^T \delta\hat{x}}$), e a soma ponderada do quadrado dos resíduos ($\hat{v}^T P \hat{v}$).

Desta forma, a matriz de covariância dos parâmetros estimados ($\Sigma_{\hat{x}}$) é dada por $\Sigma_{\hat{x}} = (A_{(u-d)}^T P A_{(u-d)})^{-1}$ para a solução *INJ_abs*, por $\Sigma_{\hat{x}} = (N + P_{\hat{x}})^{-1}$ para a solução *INJ_rel*, pela Eq. (64) para a solução *NNT_gen*, e pela Eq. (29) para as soluções *NNT_all* e *NNT_inj*, sendo os resultados obtidos apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores em mm para $\sqrt{\text{traço}(\Sigma_{\hat{x}})}$ para cada solução e em cada caso analisado.

Solução	Caso 1: $\sigma_{H_{inj}} < \sigma_{\Delta H}$	Caso 2: $\sigma_{H_{inj}} = \sigma_{\Delta H}$	Caso 3: $\sigma_{H_{inj}} > \sigma_{\Delta H}$
<i>NNT_all</i>	5,0	5,0	5,0
<i>NNT_inj</i>	5,6	5,6	5,6
<i>NNT_gen</i>	5,8	9,0	15,2
<i>INJ_abs</i>	4,3	4,3	4,3
<i>INJ_rel</i>	4,7	8,8	15,2

Fonte: Os autores (2025).

Os resultados mostrados na Tabela 2 revelam que a solução *NNT_all* apresenta $\sqrt{\text{traço}(\Sigma_{\hat{x}})} = \min$ entre todas as soluções minimamente injuncionadas conforme esperado, embora as soluções sobre-injuncionadas *INJ_rel* (caso 1) e *INJ_abs* (todos os casos) apresentem menor $\sqrt{\text{traço}(\Sigma_{\hat{x}})}$ do que a solução *NNT_all*. Além disso, conforme visto, as únicas soluções que propagam as incertezas dos pontos de referência pré-existentes são as soluções *NNT_gen* e *INJ_rel*.

Para as demais métricas analisadas ($\sqrt{\delta\hat{x}^T \delta\hat{x}}$ e $\hat{v}^T P \hat{v}$), foram gerados erros aleatórios tanto no vetor das observações (desníveis) quanto nas altitudes (parâmetros iniciais) dos pontos de referência pré-existentes A e C de acordo com os desvios-padrões assumidos em cada caso. O vetor $\delta\hat{x}$ é dado pela Eq. (6) para a solução *INJ_abs*, por $\delta\hat{x} = (N + P_{\hat{x}})^{-1} A^T Pl$ para a solução *INJ_rel*, e por $\delta\hat{x} = (N + DD^T)^{-1} A^T Pl$ para as demais soluções, enquanto o vetor dos resíduos associado é dado por $\hat{v} = A\delta\hat{x} - l$.

As simulações numéricas foram realizadas 200.000 vezes e os resultados médios obtidos dessas simulações são apresentados na Tabela 3 para $\sqrt{\delta\hat{x}^T \delta\hat{x}}$ e na Tabela 4 para $\hat{v}^T P \hat{v}$. Detalhes sobre simulações por Monte-carlo em redes de nivelamento são obtidos, por exemplo, em Suraci, Oliveira e Klein (2019).

Tabela 3 – Valores médios em mm para $\|\delta\hat{x}\| = \sqrt{\delta\hat{x}^T \delta\hat{x}}$ para cada solução e em cada caso analisado.

Solução	Caso 1: $\sigma_{H_{inj}} < \sigma_{\Delta H}$	Caso 2: $\sigma_{H_{inj}} = \sigma_{\Delta H}$	Caso 3: $\sigma_{H_{inj}} > \sigma_{\Delta H}$
<i>NNT_all</i>	4,7	7,1	11,8
<i>NNT_inj</i>	5,3	8,1	13,6
<i>NNT_gen</i>	5,3	8,1	13,6
<i>INJ_abs</i>	3,9	5,6	9,0
<i>INJ_rel</i>	3,9	7,0	12,9

Fonte: Os autores (2025).

Analizando os resultados da Tabela 3, nota-se que os valores de $\|\delta\hat{x}\| = \sqrt{\delta\hat{x}^T \delta\hat{x}}$ aumentam conforme se aumenta a incerteza das injunções para todas as soluções, conforme esperado. Entretanto, apenas as soluções *NNT_gen* e *INJ_rel* consideram a incerteza das injunções na métrica $\sqrt{\text{traço}(\Sigma_{\hat{x}})}$ da Tabela 2. Dentre as soluções com injunções mínimas, *NNT_all* apresenta os menores valores para $\|\delta\hat{x}\| = \sqrt{\delta\hat{x}^T \delta\hat{x}}$ conforme esperado. Entretanto, a solução *INJ_rel* apresenta menores valores para $\|\delta\hat{x}\| = \sqrt{\delta\hat{x}^T \delta\hat{x}}$ do que a solução *NNT_all* quando $\sigma_{H_{inj}} < \sigma_{\Delta H}$ (caso 1) e praticamente iguais quando $\sigma_{H_{inj}} = \sigma_{\Delta H}$ (caso 2).

Além disso, a solução *INJ_abs* apresenta menores valores para $\|\delta\hat{x}\| = \sqrt{\delta\hat{x}^T \delta\hat{x}}$ do que a solução *NNT_all* em todos os casos considerados. Este resultado é devido ao fato que a solução *INJ_abs* possui apenas $u = 2$ parâmetros (altitudes dos vértices B e D), ao contrário das demais soluções com $u = 4$ parâmetros ao todo. Destaca-se que após a convergência das iterações em modelos linearizados, o valor de $\|\delta\hat{x}\|$ tende a zero.

Tabela 4 – Valores médios (adimensionais) para $\hat{v}^T P \hat{v}$ para cada solução e em cada caso analisado.

Solução	Caso 1: $\sigma_{H_{inj}} < \sigma_{\Delta H}$	Caso 2: $\sigma_{H_{inj}} = \sigma_{\Delta H}$	Caso 3: $\sigma_{H_{inj}} > \sigma_{\Delta H}$
<i>NNT_all</i>	2,0	2,0	2,0
<i>NNT_inj</i>	2,0	2,0	2,0
<i>NNT_gen</i>	2,0	2,0	2,0
<i>INJ_abs</i>	3,1	5,0	11,0
<i>INJ_rel</i>	2,9	2,3	2,1

Fonte: Os autores (2025).

Analizando os resultados da Tabela 4, nota-se que todas as soluções por injunções mínimas apresentam valores médios para $\hat{v}^T P \hat{v}$ iguais a 2 em todos os casos considerados, ao contrário das soluções *INJ_abs* e *INJ_rel*. Este resultado também é esperado, pois, da literatura relacionada, sabe-se que $E\{\hat{v}^T P \hat{v}\} = n - rank(A)$, e, neste caso, $n - rank(A) = 5 - 3 = 2$. Entretanto, destaca-se que é assumido observações contaminadas somente por erros aleatórios, conforme simulado nos experimentos Monte-Carlo. Se houverem erros sistemáticos e/ou grosseiros nas observações, os valores de $\hat{v}^T P \hat{v}$ devem exceder o valor esperado em todas as soluções e em todos os casos analisados.

Em relação a solução *INJ_abs*, conforme se aumenta a incerteza das injunções ($\sigma_{H_{inj}}$), se aumenta o valor médio de $\hat{v}^T P \hat{v}$, o que não ocorre para as soluções por injunções mínimas. Este resultado demonstra a “deformação” na rede causada pelo uso de injunções em excesso: quanto maior a incerteza das injunções, maiores os resíduos das observações para satisfazer essas condições “rígidas” (valores fixos ou absolutos nas altitudes dos vértices A e C), e, portanto, maior o valor médio de $\hat{v}^T P \hat{v}$ nas simulações numéricas.

Em contrapartida, conforme se aumenta a incerteza das injunções ($\sigma_{H_{inj}}$), se reduz o valor médio de $\hat{v}^T P \hat{v}$ da solução *INJ_rel*. Analisando e comparando os resultados das Tabelas 3 e 4, as injunções relativas tendem a fornecer menores resíduos para as observações (e, portanto, maiores correções para os parâmetros iniciais), conforme se aumenta a incerteza das injunções ($\sigma_{H_{inj}}$), ou, em outras palavras, conforme se reduz o seu peso em relação às observações por meio da redução dos respectivos valores da matriz P_x .

Um exemplo de densificação do SGB onde a incerteza das injunções será maior que a incerteza das observações é o caso da rede altimétrica, onde as referências de nível em geral possuem incerteza vertical centimétrica e os desníveis observados em geral possuem incerteza milimétrica, mesmo por diversos quilômetros de nivelamento. Entretanto, um contra-exemplo é a densificação da rede GNSS do SGB, onde as estações da RBMC (Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo) em geral possuem incerteza posicional milimétrica e os vetores GNSS, da ordem de várias dezenas ou centenas de km, em geral possuem incerteza milimétrica ou centimétrica. Nestes casos, o uso de injunções relativas deve apresentar valores para $\hat{v}^T P \hat{v}$ maiores do que o esperado, mesmo com apenas erros aleatórios nas componentes dos vetores GNSS.

Portanto, conclui-se que de fato a solução apresentada por Kotsakis (2013), denominada *NNT_gen* neste exemplo, é a melhor solução para a densificação de redes geodésicas de referência, pois considera tanto as incertezas das injunções nos valores para $\sqrt{trace(\Sigma_{\hat{x}})}$ quanto fornece resultados esperados para $\hat{v}^T P \hat{v}$ quando somente erros aleatórios contaminam o vetor das observações, independente dos valores das incertezas das injunções. Além disso, trata-se de uma solução por injunções mínimas, que não causa “deformação” na rede original ao contrário das soluções sobre-injuncionadas. Destaca-se que no conhecimento dos autores, esta é a primeira publicação a apresentar resultados numéricos e exemplos comparativos da abordagem proposta em Kotsakis (2013) contra outros tipos de injunções.

Por fim, destaca-se que as soluções minimamente injuncionadas (*NNT_all*, *NNT_inj* e *NNT_gen*) apresentam não apenas valores médios numericamente iguais para $\hat{v}^T P \hat{v}$, mas também os mesmos valores individuais de cada elemento de \hat{v} , confirmando assim a independência do *datum* nestes casos. Além disso, as soluções *NNT_inj* e *NNT_gen* também apresentaram os mesmos valores para os elementos individuais de $\delta\hat{x}$, devido ao mesmo peso de ambas as injunções. Se os pesos das injunções forem diferentes, as soluções *NNT_inj* e *NNT_gen* apresentam resultados diferentes para $\delta\hat{x}$. O leitor interessado pode verificar essas questões em seus próprios experimentos, uma vez que os algoritmos de todos os exemplos aqui apresentados (realizados no software gratuito *Scilab*) estão publicamente disponíveis em: <https://data.mendeley.com/datasets/dnw4kg3tcx/1>.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta contribuição, foi apresentada uma revisão teórica sobre o problema da escolha do *datum* na Geodesia em um caso geral pelo ajustamento de observações por meio do modelo paramétrico ou de Gauss-Markov. Em particular, se mostrou que quando $\text{rank}(A) = u - d < u$, situação que em geral ocorre na Geodesia, a escolha das injunções para resolver a deficiência de *datum* resulta em um estimador enviesado.

Além disso, foram discutidas as grandezas que dependem ou independem da escolha do *datum* no caso de um ajustamento por injunções mínimas, bem como foi apresentada a Transformação-S, que realiza a conversão dos resultados *datum* dependentes de uma solução por injunções mínimas para outra.

O caso do monitoramento geodésico de estruturas, onde todas as épocas de observação devem estar no “mesmo *datum*”, sendo solucionado via injunções mínimas internas por meio das condições NNT, NNR e NNS, além de suas propriedades: $\|\delta\hat{x}\| = \sqrt{\delta\hat{x}^T \delta\hat{x}} = \min$ e $\text{traço}(\Sigma_{\hat{x}}) = \min$ também foram devidamente abordados. Em particular, demonstrou-se matematicamente que a solução por injunções mínimas internas, como qualquer outra solução minimamente injuncionada, preserva a “forma” da rede original, sendo denominada “rede livre”, o que não ocorre para ajustamentos sobre-injuncionados (“rede condicionada”).

O caso da densificação de redes geodésicas de referência como o SGB e as RRCM, onde em geral temos mais pontos de referência pré-existentes (injunções) do que o mínimo necessário e devemos ainda propagar as incertezas dos pontos de referência sobre os novos vértices da rede também foi tratado por meio das “injunções mínimas internas ponderadas ou generalizadas” propostas por Kotsakis (2013).

Por fim, diversos exemplos numéricos foram apresentados em uma rede de monitoramento por trilateração 2D e na densificação de uma rede altimétrica 1D. Na rede de trilateração 2D, demonstrou-se as diversas possibilidades de definição da matriz *datum*. No caso da rede altimétrica 1D, demonstrou-se por simulações Monte-Carlo que a solução proposta por Kotsakis (2013) é a mais adequada para a densificação de redes geodésicas de referência. Portanto, visando suprir uma deficiência na literatura nacional relacionada ao tema, o objetivo deste artigo de revisão foi fornecer uma referência atualizada, em Português e de acesso gratuito ao problema da escolha do *datum* na Geodesia, considerando alguns dos aspectos mais avançados deste tema de pesquisa na área da Geodesia.

Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se investigações a nível nacional sobre o ajustamento da “rede livre extendida” quando parte do *datum* é fornecida pelas observações conforme a Tabela 1. Nestes casos, é necessário “esterilizar” o conteúdo do *datum* das observações, por exemplo, a escala da rede em função das distâncias medidas, para garantir que as diferentes épocas de observação estejam de fato no mesmo *datum* (Papo, 1985; Even-Tzur, 2012). Recomenda-se também estudos sobre a densificação do SGB por meio da abordagem proposta em Kotsakis (2013), podendo ser considerada o atual “estado da arte” sobre o tema, considerando ainda que nenhum estudo de caso real foi encontrado na literatura.

Além disso, apenas o monitoramento geodésico de estruturas e a densificação de redes geodésicas a partir de pontos de referência pré-existentes foram abordados nesta contribuição, mas a própria realização ou atualização de um referencial geodésico também envolve o problema da escolha do *datum* (ver, por exemplo, Sillard; Boucher, 2001; Chatzinikos; Dermanis, 2017; Altamimi et al., 2023). Portanto, mais estudos desse tema no cenário nacional são necessários, por exemplo, para atualização do *datum* altimétrico das referências de nível e/ou na realização do SGB para o posicionamento geodésico 3D (atualmente: SIRGAS2000).

Referências

- Almeida, K. B. O. *Estratégias de ajustamento aplicadas ao monitoramento de deslocamentos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2018. 76 p.
- Altamimi, Z.; Rebischung, P.; Collilieux, X.; Métivier, L.; Chanard, K. ITRF2020: an augmented reference frame refining the modeling of nonlinear station motions. *Journal of Geodesy*, v. 97, n. 5, 2023.
- Aydin, C. Effects of displaced reference points on deformation analysis. *Journal of Surveying Engineering*, v. 143, n. 3, 2017.
- Baarda, W. S-transformations and criterion matrices. *Publications on Geodesy*, v. 5, n. 1, Delft, 1973.

- Bjerhammar, A. Rectangular reciprocal matrices with special references to geodetic calculations. *Bulletin Géodésique*, v. 20, p. 188-220, 1951.
- Blaha, G. *Inner adjustment constraints with emphasis on range observations*. Reports of the Department of Geodetic Science No. 148, The Ohio State University, Columbus, 1971.
- Caspary, W. F. *Concepts of network and deformation analysis*. 3 ed. Monograph 11, School of Geomatic Engineering, The University of New South Wales, Sydney, 2000.
- Chatzinikos, M.; Dermanis, A. A coordinate-invariant model for deforming geodetic networks: understanding rank deficiencies, non-estimability of parameters, and the effect of the choice of minimal constraints. *Journal of Geodesy*, v. 91, p. 375–396, 2017.
- Dermanis, A. The photogrammetric inner constraints. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, v. 49, n. 1, 25-39, 1994.
- Drewes, H. Reference systems, reference frames, and the geodetic datum. In: SIDERIS, M. (Ed.). *Observing our changing Earth*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. p. 3-9.
- Duchnowski, R.; Wiśniewski, Z. Estimation of the shift between parameters of functional models of geodetic observations by applying M_{split} estimation. *Journal of Surveying Engineering*, v. 138, n. 1, p. 1-8, 2012.
- Even-Tzur, G. Extended S-transformation as a tool for deformation analysis. *Survey Review*, v. 44, n. 327, p. 315–318, 2012.
- Gemael, C.; Machado, A. M. L.; Wandresen, R.. *Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas*. 2 ed. Curitiba: Editora UFPR, 2015.
- Ghilani, C. *Adjustment computations: spatial data analysis*. 5 ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010.
- Graffarend, E. W.; Schaffrin, B. Unbiased Free Net Adjustment. *Survey Review*, v. 22, n. 171, p. 200–218, 1974.
- IERS. International Earth Rotation and Reference Systems Service. *IERS Conventions (2010)*. Technical Note N° 36, PETIT, G.; LUZUM, B. (eds.), 2010.
- Klein, I. *Controle de qualidade no ajustamento de observações geodésicas*. Dissertação (Mestrado em Sensoriamento Remoto) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. 322 p.
- Klein, I.; Matsuoka, M. T.; Souza, S. F. D.; Veronez, M. R. Ajustamento de observações: uma interpretação geométrica para o método dos mínimos quadrados. *Boletim de Ciências Geodésicas*, v. 17, n. 2, p. 272-294, 2011.
- Kotsakis, C. Generalized inner constraints for geodetic network densification problems. *Journal of Geodesy*, v. 87, p. 661-673, 2013.
- Kuang, S. *Geodetic network analysis and optimal design: concepts and applications*. Chelsea: Ann Arbor Press, 1996.
- Leick, A.; Rapoport, L.; Tatarnikov, R. *GPS satellite surveying*. 4 ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2015.
- Matsuoka, M. T.; Rofatto, V. F.; Klein, I.; Veronez, M. R.; Da Silveira Jr, L. G.; Neto, J. B. S.; Alves, A. C. R. Control Points Selection Based on Maximum External Reliability for Designing Geodetic Networks. *Applied Sciences*, v. 10, n. 2(687), 2020.
- Meissl, P. Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehlertheorie eines Punkthaufens. *Beitrage zur Theorie der Geodatischen Netze im Raum*, DGK, v. A61, p. 8-21, 1969.
- Monico, J. F. G. Fundamentos matemáticos envolvidos na realização do ITRS. *Boletim de Ciências Geodésicas*, v. 12, n. 2, p. 337-351, 2006.
- Monico, J. F. G. As condições NNT e NNR na realização de um referencial. *Boletim de Ciências Geodésicas*, v. 11, n. 1, p. 45-52, 2005.
- Monico, J. F. G. *Ajustamento e Análise Estatística de Observações Aplicados na detecção de deformações*. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1988.
- Nowel, K. Specification of deformation congruence models using combinatorial iterative DIA testing procedure. *Journal of Geodesy*, v. 94, n. 12, 2020.
- Ogundare, J. C. *Understanding least squares estimation and geomatics data analysis*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2018.
- Papo, H. B. Extended free net adjustment constraints. *Bulletin Géodésique*, v. 59, p. 378-390, 1985.
- Pelzer, H. *Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen*. DGK, Reihe C, Nr. 164, München, 1971.

- Rodríguez, F. A. C.; De Medeiros, L. I. B.; Klein, I.; Veiga, L. A. K. Free network adjustment: Minimum inner constraints and Pseudo-inverse approaches. *UD y la Geomática*, v. 15, 2020.
- Schaffrin, B.; Navratil, G. On Reproducing Linear Estimators within the Gauss–Markov Model with Stochastic Constraints. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 41, n. 13-14, p. 2570-2587, 2012.
- Sillard, P.; Boucher, C. A review of algebraic constraints in terrestrial reference frame datum definition. *Journal of Geodesy*, v. 75, p. 63–73, 2001.
- Suraci, S. S.; Oliveira, L. C. D.; Klein, I. Two aspects on L1-norm adjustment of leveling networks. *Revista Brasileira de Cartografia*, v. 71, n. 2, p. 486-500, 2019.
- Teunissen, P. J. G. Zero Order Design: Generalized Inverses, Adjustment, the Datum Problem and S-Transformations. In: GRAFARENDE, E. W., SANSÒ, F. (Eds). *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Processos N° 313699/2021-6 e 421278/2023-4).

Contribuição dos Autores

Conceptualização, análise formal e redação - minuta inicial: I Klein; Investigação, metodologia, software e validação: I Klein, MT Matsuoka e VF Rofatto; Redação - revisão e edição: MT Matsuoka e VF Rofatto.

Conflitos de Interesse

Declaramos que inexistem conflitos de interesse.

Biografia do autor principal



Ivandro Klein é natural de Porto Alegre/RS (1987). Engenheiro Cartógrafo (2009), Mestre (2012) e Doutor (2014) em Sensoriamento Remoto pela UFRGS. Atualmente é professor do Curso Técnico de Agrimensura do IFSC e membro permanente externo do Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da UFPR. Desenvolve pesquisas nas áreas de planejamento, ajustamento e controle de qualidade de redes geodésicas. Possui diversas videoaulas gratuitas em www.youtube.com/ivandroklein1 e www.youtube.com/AgrimensuraIFSC (playlist de Geodésia e Ajustamento: <https://surl.li/bulpjs>). “Ainda estamos aqui!”



Esta obra está licenciada com uma Licença [Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) – CC BY. Esta licença permite que outros distribuam, remixem, adaptem e criem a partir do seu trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que lhe atribuam o devido crédito pela criação original.