



## Precisão, Veracidade e Acurácia: Sobre Erros e Incertezas

*Precision, Trueness and Accuracy: On the Errors and Uncertainties*

Vinicius Francisco Rofatto<sup>1</sup>, Marcelo Tomio Matsuoka<sup>2</sup>, Ivandro Klein<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Uberlândia, Monte Carmelo, Brasil. [vfrofatto@gmail.com](mailto:vfrofatto@gmail.com).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1453-7530>

<sup>2</sup>Universidade Federal de Uberlândia, Monte Carmelo, Brasil. [tomiomatsuoka@gmail.com](mailto:tomiomatsuoka@gmail.com).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2630-522X>

<sup>3</sup>Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC), Florianópolis, Brasil. [ivandroklein@gmail.com](mailto:ivandroklein@gmail.com).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>

Recebido: 08.2024 | Aceito: 10.2024

**Resumo:** Neste artigo, revisamos os conceitos de precisão, veracidade e acurácia à luz do Vocabulário Internacional de Metrologia. Muitas áreas do conhecimento ainda confundem acurácia com veracidade, o que pode levar a interpretações equivocadas dos resultados experimentais. Exploramos, por meio de exemplos ilustrativos, os conceitos de erro e incerteza, sendo esta última mais aplicável em medições práticas cotidianas, nas quais o valor verdadeiro da grandeza de interesse geralmente não está disponível. Além disso, apresentamos algumas métricas relacionadas à precisão, veracidade e acurácia, assim como uma abordagem para a análise da tendência em processos experimentais de medição, especialmente quando o valor de referência é desconhecido ou indisponível. Por fim, esperamos que este artigo proporcione ao leitor uma compreensão clara das métricas associadas aos conceitos discutidos, além de estimular o senso crítico ao lidar com certas definições e interpretações.

**Palavras Chave:** RMSE. Erro Aleatório. Erro Sistemático. Probabilidade de Abrangência. Intervalo de Abrangência.

**Abstract:** In this article, we review the concepts of precision, trueness, and accuracy in light of the International Vocabulary of Metrology. Many fields of knowledge still confuse accuracy with trueness, which can lead to misinterpretations of experimental results. Through illustrative examples, we also explore the concepts of error and uncertainty, the latter being more applicable to practical day-to-day measurements, where the true value of the quantity of interest is not often available. Furthermore, we present some metrics related to precision, trueness, and accuracy, as well as an approach to analyzing the bias in experimental measurement processes, especially when the reference value is unknown or unavailable. Finally, we hope this article provides the reader with a clear understanding of the metrics associated with the discussed concepts, as well as sharpens their critical thinking when faced with certain definitions and interpretations.

**Keywords:** RMSE. Random Error. Systematic Error. Coverage Probability. Coverage Interval.

## 1 INTRODUÇÃO

Embora a literatura especializada traga clareza sobre o uso dos termos acurácia e precisão (MONICO et al., 2009), estes ainda são empregados de forma equivocada em diversas áreas do conhecimento. É comum encontrar exemplos, como o popular ‘tiro ao alvo’ para ilustrar esses conceitos. No entanto, por definição, muitas vezes são apresentados de forma errada (Figura 1).

Figura 1 – Ilustração incorreta dos conceitos de precisão e acurácia.



Fonte: Os Autores (2024).

As interpretações equivocadas residem, principalmente, na compreensão das definições dos termos precisão, veracidade e acurácia. O termo veracidade (*trueness*, em inglês), menos comum nas ciências geodésicas e cartográficas, é frequentemente confundido com acurácia. Da mesma forma, há confusão entre os conceitos de erro e incerteza. Esses equívocos conceituais afetam não só o vocabulário, mas também a análise de qualidade dos resultados, comprometendo a interpretação e, consequentemente, a tomada de decisão em determinadas atividades.

Neste contexto, por meio de exemplos ilustrativos, mostramos como o conceito de incerteza se relaciona com o conceito de erro, além de demonstrarmos, de forma natural, como as métricas de precisão, veracidade e acurácia estão relacionadas a esses conceitos. Em seguida, retomamos a análise da Figura 1. Ademais, apresentamos uma abordagem baseada em inferência estatística para a análise da tendência para o caso em que o valor de referência não é conhecido.

## 2 SOBRE OS CONCEITOS DE ERRO E INCERTEZA

Para iniciarmos nossa discussão, é essencial termos em mente que, por mais cuidadoso e competente que seja o observador, e mesmo ao empregar o melhor instrumento disponível, além de técnicas rigorosas na aquisição de dados, uma medida nunca será completamente perfeita ou exata devido à presença inevitável de erros (GEMAEL, 1994).

O termo erro é comumente usado para indicar a diferença entre um valor estimado por um processo experimental de medição e o seu valor verdadeiro correspondente:

$$e_v = y - y_v \quad (1)$$

O termo  $y_v$  é o valor verdadeiro da grandeza medida  $y$ , e  $e_v$  representa o erro (verdadeiro) desta medida.

Embora classicamente o erro seja dividido em três componentes — aleatórios, sistemáticos e grosseiros —, este último foi excluído de nossas discussões por ser uma questão mais complexa e fora dos objetivos deste artigo. A questão sobre se o erro grosseiro deve ser tratado como uma variável aleatória ou um efeito sistemático será abordada em um próximo artigo. Uma discussão interessante sobre o conceito de erro grosseiro é apresentada por Suraci e Oliveira (2019). Portanto, aqui, focamos apenas nos componentes sistemático e aleatório do erro.

Pode-se observar pela Eq. (1) que, para determinar o erro verdadeiro de uma medida, é necessário conhecer o valor verdadeiro da grandeza (ou parâmetro) de interesse. Embora o valor verdadeiro seja geralmente

desconhecido, é possível utilizar um valor de referência com qualidade superior (um valor convencional para a grandeza em medição) (ABNT, 2018c). Na prática cotidiana, frequentemente não dispomos de um valor verdadeiro, mas podemos expressar o grau de imperfeição do processo de medição. Para isso, recorremos ao conceito de incerteza.

Vamos analisar dois exemplos simples para esclarecer os conceitos. No Exemplo (1), que é raramente encontrado nas ciências geodésicas, temos um cenário com apenas uma única medição disponível, sem observações repetidas ou redundância. No Exemplo (2), consideraremos uma série de observações.

## 2.1 AVALIAÇÃO DE INCERTEZA PARA O CASO DE UMA ÚNICA OBSERVAÇÃO

Suponha, por exemplo, que nosso objetivo seja determinar o tamanho de um besouro por meio de uma régua que fornece leituras na escala de milímetros (Figura 2). Uma vez decidido o que caracteriza o tamanho do besouro e tomados os cuidados necessários, podemos conduzir a medição.

Figura 2 – Exemplo de um processo de medição envolvendo uma única observação



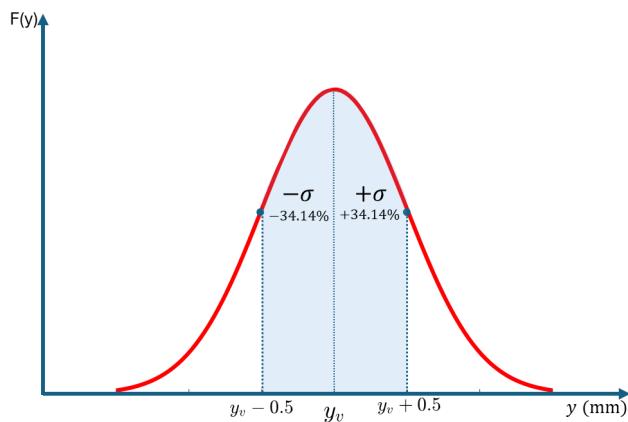
Fonte: Adaptada de (TABACNIKS, 2019)

Observe que, nesse caso, conseguimos ler exatamente os dígitos 15 mm (dígitos exatos). Entretanto, o próximo dígito à direita deve ser estimado (dígitos duvidosos). Veja que agora surgiu o conceito de estimar. Estimar significa atribuir um valor a um parâmetro (ou uma grandeza) desconhecido a partir de algum procedimento de medição ou coleta de dados. Poder-se-ia estimar 15,5 mm, mas também 15,4 mm ou mesmo 15,6 mm, entre outros possíveis valores.

Neste cenário de uma única medição, o tamanho do besouro poderia ser expresso como  $(15, \underline{x} \pm 0,5) \text{ mm}$ , onde  $\underline{x}$  corresponde ao dígito estimado e o 0,5 mm expressa a incerteza da estimativa. **A incerteza é o componente da medida que caracteriza o intervalo de valores no qual se pressupõe que o valor verdadeiro está** (BIPM et al., 2008). Do ponto de vista estatístico, o valor de  $15, \underline{x} \text{ cm}$  corresponde ao valor mais provável do tamanho do besouro – valor em que se pressupõe ter o menor erro – e, quanto mais nos afastamos desse valor (valores acima ('+') ou valores abaixo ('-') deste), mais improvável se torna a estimativa – valores que pressupõem erros maiores.

Uma outra forma de avaliar a incerteza do resultado da medição, nos casos em que temos uma única medição, é atribuir uma distribuição de probabilidade (BIPM et al., 2008). Se fosse assumida a distribuição normal para descrever a incerteza do sistema de medição, então poderíamos dizer que o desvio-padrão de 0,5 mm corresponde a um intervalo de abrangência de aproximadamente 68,28%, conforme ilustrado na (Figura 3). Neste caso, o sinal ' $\pm$ ' significa que este intervalo compreende  $\approx 34,14\%$  dos valores acima ('+') e  $\approx 34,14\%$  dos valores abaixo ('-') do valor mais provável.

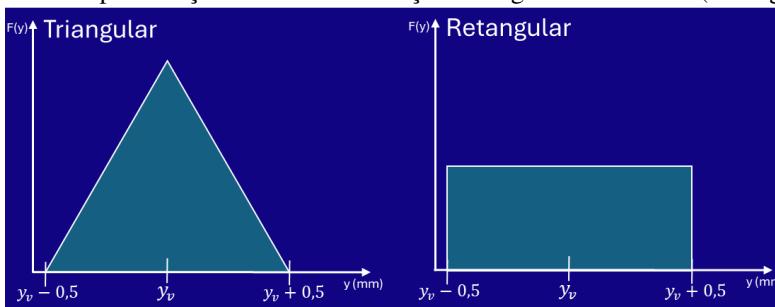
Figura 3 – Representação de uma Distribuição Normal.



Fonte: Os Autores (2024).

Em medições realizadas com instrumentos da família da régua, é comum escolher a distribuição uniforme ou triangular para descrever a incerteza (LIMA JÚNIOR et al., 2013), conforme ilustradas na Figura 4.

Figura 4 – Representação de uma Distribuição Triangular e Uniforme (Retangular).



Fonte: Os Autores (2024).

Os desvios-padrão das distribuições retangular e triangular relacionam-se com a largura da base  $L$  pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{(retangular)} = \frac{L}{2\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$\sigma_{(triangular)} = \frac{L}{2\sqrt{6}} \quad (3)$$

Como a menor divisão da régua é  $L = 1\text{mm}$  (resolução do instrumento), a incerteza seria de  $\pm 0,2\text{mm}$  para a distribuição triangular e  $\pm 0,3\text{mm}$  para a uniforme (retangular). No entanto, a prática de avaliar a incerteza como a metade da menor divisão da escala dos instrumentos analógicos ( $\pm 0,5\text{ mm}$ ) baseia-se na preferência por superestimar a incerteza, adotando uma abordagem mais conservadora, em vez de subestimá-la (VUOLO, 1992).

Outra forma de determinar a incerteza é consultar os certificados de fabricação e calibração do instrumento (BIPM et al., 2008). Como segundo exemplo de um cenário com apenas uma única medição, considere que o certificado de calibração de um medidor eletrônico de distância de uma Estação Total informa que sua incerteza é de  $2\text{mm} + 2\text{ppm}$  para um fator de abrangência  $K = 2$ , ou seja, para uma probabilidade de abrangência de 95,4% (considerando que a incerteza-padrão siga uma distribuição normal). A incerteza-padrão, ou simplesmente incerteza, é o intervalo cujo tamanho pode ser interpretado como mais ou menos um desvio-padrão. Logo, quando se aplicar um fator de abrangência, tem-se a incerteza expandida. Assim, se uma distância de  $1\text{km}$  fosse medida, poder-se-ia concluir que a incerteza dessa medida seria de aproximadamente  $\pm 2\text{mm}$ . Observe que a avaliação é muito simples: dividimos incerteza expandida  $2\text{mm} + 2\text{ppm}$  por dois ( $K = 2$ ) e recuperamos a informação desejada, ou seja, o desvio-padrão que caracteriza a incerteza sobre a distância medida ao nível de aproximadamente 68% de probabilidade de abrangência (LIMA JÚNIOR et al., 2013).

Note que muitos softwares e serviços de processamento de dados GNSS (*Global Navigation Satellite System*) fornecem um valor de incerteza expandida, como por exemplo, o relatório de saída do serviço IBGE-PPP (Posicionamento por Ponto Preciso), cuja probabilidade de abrangência é de 95% (IBGE, 2023). O profissional deve sempre atentar a estas questões. Importante destacar que muitas vezes a probabilidade (ou nível) de abrangência, é chamado de nível de confiança; entretanto, este último está associado ao conceito estatístico como complemento do nível de significância do teste estatístico. Para mais detalhes sobre incerteza expandida, fator de abrangência e probabilidade de abrangência, ver, por exemplo, (BIPM et al., 2008, 2012).

## 2.2 AVALIAÇÃO DE INCERTEZA PARA O CASO DE OBSERVAÇÕES REDUNDANTES

Embora não seja prático nem usual, o exemplo aqui proposto serve para ilustrar ao leitor como a análise de incerteza é abordada quando temos observações redundantes. Considere agora um cenário que envolve uma série de medições do tamanho do besouro. Suponha que 3 profissionais realizaram 3 medições cada sob condições especificadas de operação, totalizando nove observações ( $n = 9$ ) independentes e identicamente distribuídas (Tabela 1). A questão agora é encontrar um único valor (solução) para expressar o tamanho do besouro.

Tabela 1 – Exemplo de medições repetidas.

Operador	Medidas [mm]
Operador A	15,2
	15,3
	15,5
Operador B	15,4
	15,6
	15,5
Operador C	15,3
	15,4
	15,5

Fonte: Os autores (2024).

Com base no exemplo anterior e na amostra apresentada, um leitor mais atento poderia selecionar qualquer uma das medidas realizadas como uma possível solução. Entretanto, pode-se recorrer alguma técnica de otimização matemática que procura encontrar uma solução única (e ótima) para problemas onde o número de observações é redundante (excede o mínimo requerido para a solução).

O parâmetro de interesse a ser determinado é o tamanho do besouro, ou seja, temos apenas um único parâmetro, que aqui denotamos por  $u = 1$ . Entretanto, temos  $n - u = 9 - 1 = 8$  observações redundantes. Ao aplicar o conceito de erro pela Eq. (4), produzem-se  $n$  equações:

$$e_{v_i} = y_i - y_v, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

Para a solução única destes sistemas de equações redundantes, o critério mais adotado na Geodesia e áreas afins é o método dos mínimos quadrados (MMQ), ou seja, aquela solução para o parâmetro incógnito ( $y_v$ ) que minimiza a soma dos quadrados dos erros (GEMAEL, 1994; KLEIN, 2012). Dependendo da aplicação, outros métodos de otimização poderiam ser aplicados, tal como o método dos mínimos desvios absolutos, que minimiza a soma dos erros em módulo (SURACI; OLIVEIRA, 2020).

A soma dos quadrados dos erros é a função objetivo e dada por:

$$F(y_v) = \sum_{i=1}^n e_{v_i}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_v)^2 \quad (5)$$

Pela aplicação do Cálculo Diferencial, tem-se:

$$\frac{\partial F(y_v)}{\partial y_v} \bigg|_{y_v = \hat{x}} = 0 \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial^2 F(y_v)}{\partial y_v^2} \right|_{y_v = \hat{x}} > 0 \quad (7)$$

que resulta na média amostral (estimador), ou seja:

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad (8)$$

com a estimativa da sua incerteza dada pela raiz quadrada da variância:

$$\sigma_{\hat{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad (9)$$

onde  $\hat{\sigma}$  é o desvio-padrão amostral (em muitas literaturas é denotado por  $s$ ), dado por:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{x})^2}{n - 1}} \quad (10)$$

A Eq. (9) representa o estimador do desvio-padrão da média, que é coloquialmente chamado de erro padrão. O erro padrão é, por definição, o desvio-padrão da média quando o desvio-padrão é conhecido (desvio-padrão populacional). De forma simplificada, o erro padrão da média amostral é uma estimativa de quanto distante a média amostral provavelmente estará da média populacional, enquanto o desvio padrão da amostra, mostrado pela Eq. (10), indica o grau de variação das observações individuais em relação à média amostral.

O leitor deve observar que o valor verdadeiro foi substituído pela média amostral  $\hat{x}$ , que neste caso é o nosso estimador. Logo, o erro verdadeiro é automaticamente substituído pelo erro estimado (ou também denominado de aparente)  $\hat{e}$ , ou seja:

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{x}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

com suas correspondentes incertezas dadas por:

$$\sigma_{\hat{e}_i} = \hat{\sigma} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (12)$$

O desenvolvimento detalhado das equações pode ser encontrado em KLEIN (2012), e para mais detalhes ver Rofatto et al. (2020). Caso seja conhecido o desvio-padrão a partir de alguma informação disponível, a Eq. (10) pode ser suprimida, e basta substituir o desvio-padrão amostral  $\hat{\sigma}$  (a posteriori) pelo desvio-padrão conhecido ou a priori (denotado por  $(\sigma)$ ) nas Eq. (9) e Eq. (12).

Aplicando para o caso em que o desvio-padrão é conhecido a priori, e dado por  $\sigma = \pm 0,5\text{mm}$ , a incerteza da estimativa, segundo a Eq. (9), corresponde à  $0,5/\sqrt{9} = 0,2\text{mm}$ . Portanto, encontramos que a nossa estimativa para o tamanho do besouro é  $(15,4 \pm 0,2)\text{ mm}$ . Além disso, as estimativas dos erros, apresentadas na Tabela 2, têm as incertezas iguais a  $\sigma_{\hat{e}_i} = \pm 0,5\text{mm}$  em todos os casos (média não ponderada). O leitor deve atentar que os valores dos erros estimados são menores que suas respectivas incertezas, o que sugere que apenas erros aleatórios estão presentes nas observações. A definição desse componente aleatório do erro de medição será tratada no tópico seguinte.

Tabela 2 – Medições descritas na Tabela 1 e seus correspondentes erros estimados.

Operador	Medidas [mm]	Erro Estimado [mm]
Operador A	15,2	-0,2
	15,3	-0,1
	15,5	0,1
Operador B	15,4	0,0
	15,6	0,2
	15,5	0,1
Operador C	15,3	-0,1
	15,4	0,0
	15,5	0,1

Fonte: Os autores (2024).

Neste exemplo, o leitor deve ter notado que o conceito de incerteza difere do conceito de erro. O cálculo do erro depende do conhecimento do valor verdadeiro da grandeza (ou parâmetro) que estamos medindo. Em contrapartida, a incerteza pode (e deve) ser calculada mesmo quando não temos conhecimento do valor verdadeiro. Embora o conceito de erro seja essencial para entender como e por que as medições se desviam dos valores verdadeiros correspondentes, este tem pouco uso prático no cotidiano, pois o valor verdadeiro da maioria das grandezas de interesse experimental é sempre desconhecido a priori – a priori pode ser interpretada como “antes de realizar qualquer procedimento experimental”. Por isso, a incerteza é um conceito mais instrumental que o conceito de erro (LIMA JÚNIOR et al., 2013).

Vale destacar que a análise de incerteza quando não se dispõe de observações repetidas é conhecida como avaliação da Incerteza do Tipo B. Por outro lado, a análise de incerteza calculada a partir de procedimentos que envolvem observações repetidas (ou redundantes) é chamada de avaliação da Incerteza do Tipo A (BIPM et al., 2008).

### 2.3 O Erro Aleatório e as Flutuações Probabilísticas

O resultado da Tabela 1 mostra que, quando realizamos uma série de observações da mesma grandeza de interesse sob as mesmas condições (condições de repetibilidade), podemos obter resultados diferentes (ABNT, 2018a,b). Em um procedimento de observação cuidadoso, várias fontes de erro podem ser controladas ou eliminadas; contudo, como esse controle é imperfeito, o resultado da medição geralmente estará sujeito a alguma variabilidade, a qual, tradicionalmente, denominamos de flutuações probabilísticas (GEMAEL, 1994; KLEIN, 2012; LIMA JÚNIOR et al., 2013).

Se o erro aleatório é, por definição, o componente do erro de medição que varia entre observações repetidas sob as mesmas condições (ou em condições de reproduzibilidade), então, pode-se afirmar que os erros aleatórios produzem as flutuações probabilísticas (ABNT, 2018a). Quanto maior for o componente aleatório do erro, maior será a amplitude das flutuações probabilísticas. Do ponto de vista estatístico, os erros aleatórios são responsáveis por caracterizar uma medida como uma variável aleatória (randômica), estando assim intimamente relacionadas com a distribuição de probabilidade, que corresponde à probabilidade de a variável assumir um determinado valor.

Para ilustrar o erro aleatório, considere agora o exemplo simulado de estimar a posição de um dado objeto no plano. Para isso, a simulação pode ser realizada da seguinte forma:

- Atribuir um valor verdadeiro para a grandeza de interesse. Neste caso, consideramos  $x = 1,55m$  e  $y = 1,55m$ , como a posição verdadeira do objeto em um dado sistema de coordenadas (x, y);
- Vamos considerar que as posições do objeto foram registradas sob condições normais de operação, ou seja, para o caso em que somente erros aleatórios ( $e_a$ ) estão presentes no processo de medição. Portanto, o erro que iremos simular (erro verdadeiro) é composto apenas por sua parte aleatória, ou seja,  $e_v = e_a$ . Geralmente, lidamos com variáveis normalmente distribuídas. Assim, simulamos o erro aleatório como sendo uma variável aleatória que segue a distribuição normal, com os parâmetros média (valor esperado) igual a zero ( $\mu = 0$ ) e variância (dispersão) igual a ( $\sigma^2 = 0,05^2m^2$ ), ou seja:

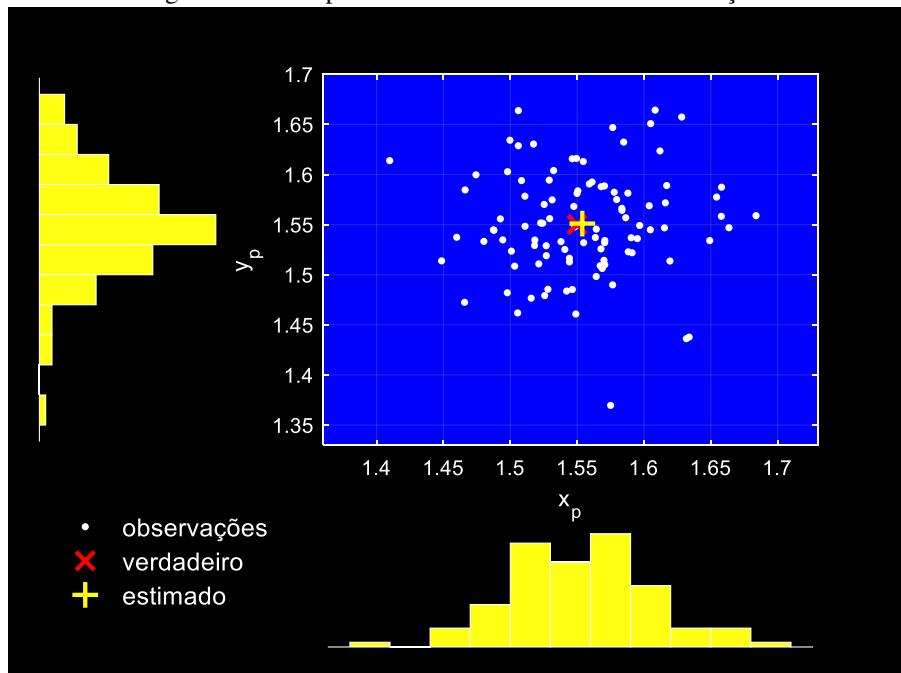
$$e_a \sim N(0; 0,05^2) \quad (13)$$

No software MATLAB, por exemplo, o leitor pode usar a função “normrnd” para gerar os erros aleatórios. Em nosso, exemplo, foram geradas 100 amostras aleatórias, conforme as definições em (a) e (b), ou seja, consideramos que a posição do objeto foi obtida 100 vezes. Trata-se de um sistema altamente redundante, muito comum, por exemplo, no posicionamento por satélites GNSS (*Global Navigation Satellite System*).

Conforme mostrado na Figura 5, muitas das observações individuais (pontos brancos) estão afastadas do centro do alvo (cruz vermelha, que indica a posição verdadeira do objeto). No entanto, em casos de observações redundantes, a média é uma forte candidata a fornecer a melhor estimativa. O leitor deve notar que a média é muito mais confiável (geralmente está mais próxima ao valor verdadeiro e flutua menos) que as observações individuais. Portanto, a média é uma boa estimativa, pois reduz a incerteza. Ademais, apesar da dispersão das

observações, a posição da média tende a ocorrer próxima à posição verdadeira. Isso ilustra por que motivo as médias tendem a ser mais confiáveis que observações individuais quando desejamos estimar o valor de uma grandeza (parâmetro) de interesse. No próximo tópico, demonstraremos matematicamente como o estimador de mínimos quadrados (média amostral) reduz a incerteza em relação as observações individuais.

Figura 5 – Exemplo simulado de uma série de observações.



Fonte: Os Autores (2024).

É importante destacar que a presença de flutuações nas observações está relacionada à precisão da medição. Medidas com melhor precisão flutuam menos, enquanto medidas com pior precisão flutuam mais. Portanto, a variabilidade está diretamente relacionada ao conceito de precisão (LIMA JÚNIOR et al., 2013).

Para avaliar o quanto o conjunto dos dados está afastado da nossa estimativa (média) usamos uma quantidade estatística muito importante chamada desvio-padrão, que foi apresentada nos tópicos anteriores Eq. (10). Quanto maior a flutuação probabilística das observações, ou seja, quanto maior for sua imprecisão, maior será o desvio-padrão. Note que existe o desvio-padrão das observações (que quantifica a dispersão dessas observações em torno da média), e, como já apresentado pela Eq. (9), tem-se também o desvio-padrão da média, que quantifica a variabilidade dessa média, ou seja, quantifica a incerteza de nossa estimativa. A própria comparação do desvio-padrão da média Eq. (9) com o desvio padrão da amostra Eq. (10) indica que a incerteza da média é menor que a incerteza de uma observação individual da amostra.

## 2.4 Erro de Tendência: O Componente Sistemático do Erro

Além dos erros aleatórios, as observações podem estar contaminadas pelos erros sistemáticos. Os erros sistemáticos apresentam, por definição, um comportamento determinístico, ou seja, não aleatório (não randômico). O erro sistemático é outro componente do erro de medição que nas medições replicadas (repetidas) permanece constante ou varia em uma maneira previsível, alterando sistematicamente o resultado de uma medição (KLEIN, 2012). Geralmente, o erro sistemático, quando identificado, é mitigado por meio de técnicas especiais de observação, pela aplicação de modelos pré-estabelecidos ou, alternativamente, parametrizado no modelo matemático.

Assim, as fontes de erro são classicamente separadas em um componente aleatório (flutuações probabilísticas –  $e_a$ ) e um componente sistemático ( $e_s$ ), como pode ser visto em GEMAEL (1994). Logo, a Eq. (1) pode ser reescrita como:

$$e_v = e_a + e_s = y - y_v \quad (14)$$

É importante informar ao leitor que, em algumas situações, o erro sistemático pode ser "multiplicativo" ou proporcional ao valor mensurado em vez de "aditivo" (por exemplo, a dilatação térmica de uma trena, que depende do valor da distância).

Para ilustrar o erro sistemático, considere que a régua utilizada para medir o tamanho do besouro no exemplo da Figura 2 possui uma imperfeição de fabricação que adiciona um milímetro a cada decímetro medido. Dessa forma, enquanto nossa leitura indica que o tamanho do besouro possui 15,4 mm, ele possuirá realmente algo em torno de 15,3 mm. Assim, note que todas as medidas feitas com essa régua apresentarão um efeito sistemático, ou seja, um erro constante, já que o instrumento adotado adiciona (proporcionalmente) um milímetro a cada decímetro. Naturalmente, se soubéssemos que a régua adiciona exatamente um milímetro a cada decímetro, teríamos que corrigir todas as medidas feitas com esse instrumento antes de publicá-las (LIMA JÚNIOR et al., 2013).

Sem exceder muito, vamos ver mais um exemplo para que o leitor tenha clareza de como o erro sistemático pode ser estimado. Considere que realizamos  $n = 5$  medidas (leituras/observações) de uma grandeza que desejamos determinar, todas realizadas sob as mesmas condições. Se temos o valor verdadeiro a nossa disposição, então temos o erro verdadeiro de "cada medida", como segue:

$$\begin{aligned} e_{v_1} &= e_{a_1} + e_s = y_1 - y_v \\ e_{v_2} &= e_{a_2} + e_s = y_2 - y_v \\ e_{v_3} &= e_{a_3} + e_s = y_3 - y_v \\ e_{v_4} &= e_{a_4} + e_s = y_4 - y_v \\ e_{v_5} &= e_{a_5} + e_s = y_5 - y_v \end{aligned} \quad (15)$$

Observe que, ao realizar medições sob as mesmas condições (inclusive ambientais), o erro sistemático permanece constante para cada medida, enquanto o erro aleatório é uma característica intrínseca de cada medição. Se aplicarmos o nosso estimador (média amostral), segundo a Eq. (8), então teremos:

$$\hat{x} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} = \frac{\sum_{i=1}^5 e_{a_i} + 5e_s + 5y_v}{5} \quad (16)$$

Como resultado, tem-se:

$$\hat{x} = y_v + e_s + \frac{\sum_{i=1}^5 e_{a_i}}{5} \quad (17)$$

O terceiro termo da Eq. (17) é a média dos erros aleatórios, e merece uma atenção especial. Sob condições normais de operação, os erros aleatórios irão se comportar como tendo uma distribuição simétrica de sinais positivos (+) e negativos (-). Logo, mesmo que não completamente neutralizadas, as flutuações probabilísticas são compensadas com a média. Caso contrário, se nas observações repetidas forem verificadas possíveis assimetrias (por exemplo, por meio da análise de histograma), é de se esperar que o nosso estimador baseado no MMQ perca a sua propriedade de ser imparcial, tornando-se, nesse caso, um estimador enviesado. Consequentemente, a média amostral não pode ser candidata a ser nossa estimativa. Logo, o observador deverá investigar as causas da assimetria, que muitas vezes tem origem na presença de medidas anômalas (outliers) no conjunto das observações. Estas questões fogem do escopo proposto neste artigo.

Considerando que os erros aleatórios verdadeiros apresentam uma proporção de 50% de valores com sinal (+) e 50% de valores com sinal (-), o terceiro termo da equação é anulado. Aqui, não importa se a distribuição é normal ou não, mas sim se há ou não uma proporção simétrica na distribuição dos erros.

O terceiro termo pode ser interpretado como esperança matemática do erro aleatório. Como visto, para que nosso estimador seja imparcial, espera-se que a soma de erros aleatórios seja zero, ou seja:

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{i=1}^5 e_{a_i} \right\} = 0 \quad (18)$$

O operador de esperança matemática  $\mathbb{E} \{ \cdot \}$  fornece o valor esperado que é a média aritmética dos valores possíveis que uma variável aleatória pode assumir, ponderada pela probabilidade desses resultados. O

resultado da Eq. (18) é para o caso especial em que todos os resultados possíveis são equiprováveis, ou seja, sem ponderações dos valores individuais. Ao aplicar o operador de esperança no terceiro termo, devemos aplicar em toda expressão (17). Se a esperança do nosso estimador  $\hat{x}$  corresponde ao valor verdadeiro contaminado pelo erro sistemático, isto é,

$$\mathbb{E}\{\hat{x}\} = y_v + e_s \quad (19)$$

então podemos expressar o erro sistemático estimado como:

$$\hat{e}_s = \hat{x} - y_v \quad (20)$$

O  $\hat{e}_s$  é o que chamamos de “erro médio”, obtido a partir da média de uma série de valores medidos. Portanto, adicionamos o símbolo “ $\wedge$ ” em  $e_s$ , pois trata-se de uma estimativa do erro sistemático (também chamado de viés/tendência, ou do inglês *bias*). Para verificar se a tendência calculada a partir da Eq. (20) é significativa ou não, o leitor é convidado a ver o exemplo 3.1 do trabalho de Monico et al. (2009). Se a tendência fosse estatisticamente insignificante, isto é,  $\mathbb{E}\{\hat{e}_s\} = e_s = 0$ , então a média seria estatisticamente igual ao valor verdadeiro  $\hat{x} = y_v$ , e neste caso, o erro seria composto apenas pelas inevitáveis flutuações probabilísticas. Detalhes sobre análise de tendência podem ser consultados, por exemplo, em ABNT (2018c,d).

### 3 REVENDO NOVAMENTE OS CONCEITOS: PRECISÃO, VERACIDADE E ACURÁCIA

Embora o conceito de precisão já tenha sido abordado ao longo do texto, os termos veracidade e acurácia ainda não foram devidamente discutidos.

Como visto, o termo precisão está intimamente ligado às flutuações probabilísticas, que são responsáveis por gerar erros aleatórios. A precisão geralmente é expressa por medidas de imprecisão, sendo o desvio-padrão uma das métricas mais frequentemente utilizadas para representá-la. O desvio-padrão é uma medida de dispersão que informa sobre o grau de concordância interna (ou proximidade) entre valores individuais medidos de forma independente em um conjunto de dados (amostra).

Outro conceito que aparece com menos frequência é a veracidade. Veracidade (*trueness*) refere-se à proximidade entre a média dos valores medidos, obtidos a partir de medições replicadas, e o valor de referência. Como envolve medições redundantes, espera-se que os erros aleatórios sejam desprezíveis, de modo que o terceiro termo da Equação (17) tende a zero, restando apenas o segundo termo, que corresponde ao erro sistemático. Por isso, o leitor deve encontrar na ABNT (2018c) a definição de veracidade como o grau de concordância entre a média aritmética de um **grande número de resultados** de ensaio e o valor de referência aceito.

Observe, portanto, que veracidade está relacionada apenas ao conceito de erro sistemático. Como vimos, o erro médio é uma métrica de tendência utilizada para estimar o erro sistemático. Uma medição é considerada ter melhor veracidade (*trueness*) quando apresenta um erro sistemático menor, o qual pode ser obtido por meio da estimativa do erro médio (*bias*). A veracidade não está relacionada a erros aleatórios, pois estes não afetam a média das medições, mas sim a dispersão dos resultados.

Se a média das medições estiver de acordo com o valor de referência, não há tendência (estatisticamente significativa) no conjunto das medições. No entanto, a veracidade não diz nada sobre a distribuição dos valores individuais da medição, ou seja, a sua dispersão. Isto é expresso por indicadores de precisão, conforme visto nas seções anteriores.

A acurácia, por outro lado, engloba os conceitos de precisão (relacionada aos erros aleatórios) e veracidade (associada aos erros sistemáticos). Assim, a acurácia envolve a análise da consistência entre medições repetidas (precisão) e a proximidade dessas medições em relação ao valor verdadeiro (veracidade).

Uma forma de avaliar a acurácia de um sistema de medição é por meio do cálculo da raiz quadrada do erro quadrático médio – RMSE (Root Mean Squared Error), dado por:

$$RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_v)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_{vi})^2} \quad (21)$$

O Erro Quadrático Médio (MSE) é frequentemente encontrado no processo de treinamento em algoritmos de aprendizado de máquinas (machine learning), especialmente em redes neurais. O MSE é usado como função objetivo – função da qual deseja-se encontrar os parâmetros do modelo que minimizam o MSE (ROFATTO et al., 2022). Além disso, é importante que o leitor esteja atento ao fato de que muitos softwares comerciais fornecem indicadores de precisão com a nomenclatura incorreta de RMSE, algo que é bastante comum no processamento de vetores GNSS, por exemplo.

Uma fórmula aproximada do RMSE pode ser obtida a partir da expressão (21), como:

$$RMSE \cong \sqrt{(\hat{e}_s^2 + \hat{\sigma}^2)} \quad (22)$$

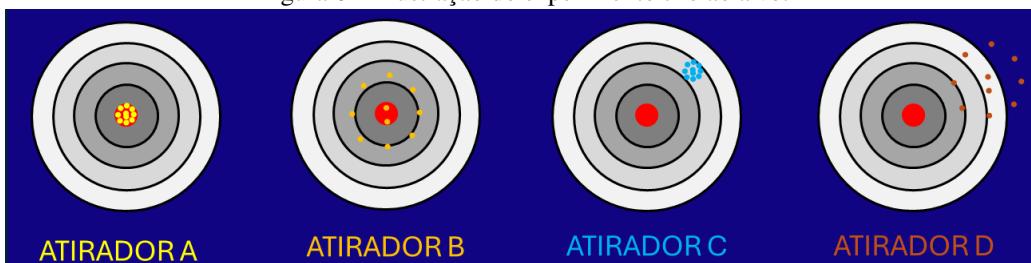
Se o erro de tendência for estatisticamente nulo ( $\hat{e}_s = 0$ ), ou seja, ausência de erros sistemáticos, a fórmula do RMSE pode ser aproximada pelo desvio-padrão amostral ( $RMSE \cong \hat{\sigma}$ ). Nesse caso, como o RMSE é substituído pelo desvio-padrão amostral, o resultado é dado pela Eq. (10) e, portanto, o denominador é dado por  $n - 1$  em vez de  $n$  como na Eq. (21).

Neste contexto, se a precisão não for adequada, a acurácia também não será. É importante destacar que, no caso em que não há tendência estatisticamente significativa, a incerteza da estimativa, expressa pela variância da média ( $\sigma_{\bar{x}}^2 = \hat{\sigma}^2/n$ ), é não enviesada e pode ser considerada uma métrica de acurácia do estimador (BIPM et al., 2012).

Note que tanto no caso de uma única medição quanto em um conjunto de medições da mesma grandeza física, quando não se tem um valor verdadeiro conhecido, a acurácia não pode ser avaliada. Porém, podemos avaliar a incerteza total do processo experimental de medição, como veremos no próximo tópico.

A partir daqui, podemos verificar que existem inconsistências na análise da Figura 1. Primeiro, não podemos analisar em termos de “tem (ou não) acurácia”, “tem (ou não) precisão” ou ainda, “é (ou não é) acurado”, “é (ou não é) preciso”. Com base na discussão exposta, não faz sentido usarmos os termos dessa forma. Portanto, vamos analisar a (Figura 1) à luz das definições fornecidas. Para isto, considere novamente o experimento de tiro ao alvo (Figura 6):

Figura 6 – Ilustração do experimento tiro ao alvo.



Fonte: Os Autores (2024).

- No caso do atirador (A), a amostra (pontos amarelos) apresenta uma baixa dispersão em torno de sua média, e a média nesse caso coincide (pelo menos visualmente) com o alvo (valor verdadeiro - centro em vermelho). Portanto, não há tendência significativa, apenas erros aleatórios (inevitáveis em qualquer medição).
- No segundo caso (atirador B), há uma dispersão maior da amostra do que o primeiro caso, mas a média também parece coincidir com o alvo. Portanto, o atirador B também não possui tendência.
- No caso do terceiro atirador (C), a dispersão dos pontos é bem parecida com aquela do primeiro caso, porém a média dos tiros está deslocada do alvo em um dado sentido. Portanto, há um erro sistemático

presente, uma vez que a média amostral está suficientemente afastada do valor verdadeiro (há tendência/está enviesado).

- d) No último caso (atirador D), conclui-se que é parecido com aquele observado no terceiro caso (atirador C), porém há uma dispersão maior. O atirador D tem a mesma dispersão em torno da média que o atirador B.

Desta forma, podemos concluir que:

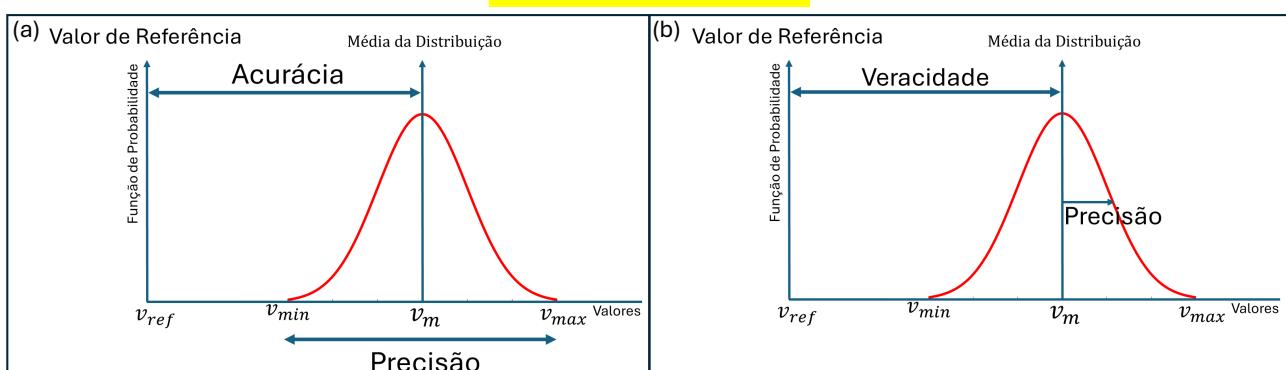
1. o atirador (A) tem melhor acurácia que todos os outros;
2. atirador (B), embora com pior precisão que o atirador (A), tem melhor acurácia que os atiradores (C) e (D);
3. tanto o (C), quanto o (D) possuem tendência significativa (erro sistemático). O pior caso (acurácia) é o (D). Importante destacar que a razão do Atirador (B) ter melhor acurácia que o (C) é porque o desvio-padrão deste é menor que a tendência do C. Se o Atirador (C) estivesse com tendência menor, poderia ter “melhor acurácia” que o (B).

Outras análises similares podem ser realizadas. Observa-se, portanto, que precisão, veracidade e acurácia são conceitos qualitativos, analisados de forma relativa (“melhor ou “pior”). O desvio-padrão, o erro médio e o RMSE são métricas quantitativas para expressar de forma absoluta o nível de precisão, veracidade e acurácia, respectivamente.

Sobre o mesmo tema do tópico, outra representação visual incorreta, que aparece com menos frequência, mas ainda assim vale a pena mencionar, é mostrada na Figura 7. Ela ilustra que os valores obtidos a partir de medições replicadas da mesma grandeza estão distribuídos entre os valores  $v_{min}$  e  $v_{max}$ , com uma distribuição de probabilidade representada pela curva em vermelho.

Figura 7 – Ilustração incorreta dos conceitos de acurácia, veracidade e precisão.

AMBOS INCORRETOS



Fonte: Os Autores (2024).

Os equívocos presentes na Figura 7 podem ser enumerados a seguir:

- a) A Figura 7(a) induz o leitor a interpretar que o afastamento do valor médio  $v_m$  (a média da distribuição) em relação ao valor de referência  $v_{ref}$  refere-se ao conceito de acurácia;
- b) A Figura 7(a) transmite a mensagem de que quanto maior o afastamento entre o valor médio  $v_m$  (a média da distribuição) em relação ao valor de referência  $v_{ref}$ , maior é a acurácia;
- c) Da mesma forma, transmite a ideia de que quanto maior a distância entre  $v_{min}$  e  $v_{max}$ , maior a precisão.

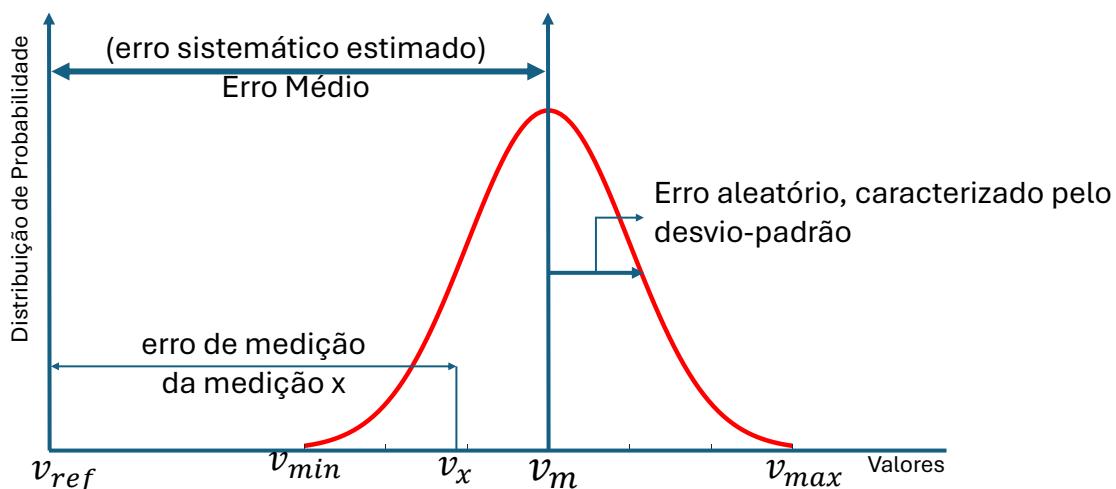
A Figura 7(b) apresenta o mesmo problema (b), bem como o problema (c), mas em relação à veracidade em vez de acurácia.

A Figura 8, que foi adaptada de Shirmohammadi, Mari e Petri (2021), apresenta a versão corrigida dessa forma de visualização, que trata dos componentes dos erros, assumindo que um valor de referência é conhecido de alguma forma. Além disso, o rótulo do eixo vertical passou a ser designado por distribuição de probabilidade para deixar claro que os valores de medição são definidos em uma escala discreta devido à resolução limitada dos instrumentos de medição.

Figura 8 – Versão Correta da Figura 7.

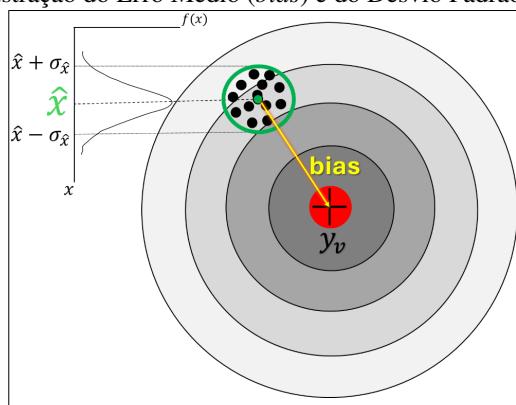
### Valor de Referência

### Média da Distribuição



Fonte: Os Autores (2024).

Dentro do contexto de tiro ao alvo, e com base na Figura 8 e nas discussões feitas até aqui, é possível ilustrar as métricas na Figura 9. Neste caso, pode-se observar que um conjunto de dados pode ter uma dispersão muito pequena (círculos pretos), mas pode estar completamente enviesado (afastamento do valor verdadeiro), ou seja, nem sempre boa precisão significa boa acurácia.

Figura 9 – Ilustração do Erro Médio (*bias*) e do Desvio Padrão Amostral ( $\sigma_{\hat{x}}$ ).

Fonte: Os Autores (2024).

## 4 EXEMPLO NUMÉRICO E ALGUMAS DISCUSSÕES SOBRE AVALIAÇÃO DE INCERTEZA E ACURÁCIA

O exemplo simulado é construído para o caso em que 20 medições de distância entre dois pontos são realizadas por cada uma das três Estações Totais (ETs), que apresentam as seguintes incertezas, conforme especificado pelo fabricante: ET A: 0,5 mm + 1 ppm; ET B: 1 mm + 1 ppm; ET C: 2 mm + 2 ppm (1 ppm = 1 mm por quilômetro). A distância verdadeira (simulada) entre os dois pontos é de 1000,00000m. Vamos imaginar que devido às condições de uso e armazenamento, a ET A desviou do seu estado original, perdendo sua calibração, de modo que para cada 100 m, seja acrescentado 1 mm na medida de distância. Logo, para

a distância de 1000,000 m, o erro sistemático simulado para ET A foi de +10mm. De forma similar à Eq. (13), os componentes aleatórios dos erros foram gerados sob a condição de que são distribuídos normalmente com médias iguais a zero e variâncias (dispersões) dadas pelas respectivas incertezas de cada instrumento, ou seja,  $e_{aET-A} \sim N(0, \sigma_A^2)$ ,  $e_{aET-B} \sim N(0, \sigma_B^2)$  e  $e_{aET-C} \sim N(0, \sigma_C^2)$ , com  $\sigma_A = 1,5$  mm,  $\sigma_B = 2,0$  mm e  $\sigma_C = 4,0$  mm, respectivamente.

A Tabela 3 fornece os valores das medições simuladas para cada instrumento. Ao final da tabela, são apresentados a média amostral e o desvio padrão amostral (DP) obtidos para cada um dos instrumentos.

Tabela 3 – Observações simuladas para ET A, B e C.

Identificador	ET A	ET B	ET C
1	1000,0112	1000,0008	999,9913
2	1000,0097	999,9955	1000,0006
3	1000,0104	999,9977	1000,0027
4	1000,0087	1000,0024	999,9966
5	1000,0068	999,9987	999,9998
6	1000,0101	1000,0007	1000,0012
7	1000,0086	1000,0030	999,9975
8	1000,0118	999,9982	999,9999
9	1000,0126	999,9981	1000,0016
10	1000,0094	999,9990	999,9963
11	1000,0118	1000,0009	1000,0033
12	1000,0114	999,9996	1000,0044
13	1000,0079	999,9980	1000,0013
14	1000,0099	999,9969	1000,0001
15	1000,0104	999,9993	999,9953
16	1000,0108	999,9996	1000,0020
17	1000,0110	999,9989	999,9951
18	1000,0110	999,9995	1000,0064
19	1000,0110	999,9978	1000,0021
20	1000,0095	1000,0011	1000,0011
Média ( $\hat{x}$ )	1000,0102	999,9993	999,9999
DP ( $\hat{\sigma}$ )	0,0014	0,0018	0,0036

Fonte: Os Autores (2024).

Dois cenários de análise são apresentados a seguir com o objetivo de aplicar e discutir os conceitos introduzidos. O primeiro cenário, mais comum, está associado à avaliação da incerteza, em que o valor de referência externo ao processo experimental de medição não é conhecido. O segundo cenário, por sua vez, trata da avaliação da acurácia, onde um valor de referência está disponível para comparação.

#### 4.1 Análise de Incerteza e Estimativa de Tendência na Ausência de Valor Externo Conhecido

Neste cenário, parte-se do pressuposto de que nenhuma informação sobre o valor verdadeiro é conhecida a priori, o que impossibilita a avaliação da acurácia, dado que não há um valor de referência para comparação. Portanto, a análise é realizada exclusivamente sob a ótica da avaliação da incerteza. Assim, o resultado do processo de medição de cada instrumento deve ser expresso pelo valor estimado e sua respectiva incerteza, que é dada pelo desvio padrão da média, conforme indicado na Equação (8). Geralmente, a incerteza é expressa por meio de sua forma expandida. A incerteza expandida é calculada multiplicando o desvio padrão da média por um fator de abrangência. A rigor, como a amostra é menor que 30, adota-se o fator a partir da distribuição t-Student bicaudal para um dado nível de abrangência e graus de liberdade ( $g.l.$ ) (GHILANI, 2017). Em nosso exemplo,  $g.l. = n - 1 = 20 - 1 = 19$ . Assim, temos o fator dado por  $t_{0,975;19} = 2,0930$  para o limite superior e  $t_{0,025;19} = -2,0930$  para o limite inferior, correspondentes ao nível de abrangência de 95%, resultando em:

- ET A:  $(1000,0102 \pm 0,0007)$  m, onde  $2,0930 \times \sigma_{\hat{x}} = 2,0930 \times 1,4/\sqrt{20} = 0,7$  mm;
- ET B:  $(999,9993 \pm 0,0008)$  m, onde  $2,0930 \times \sigma_{\hat{x}} = 2,0930 \times 1,8/\sqrt{20} = 0,8$  mm;
- ET C:  $(999,9999 \pm 0,0017)$  m, onde  $2,0930 \times \sigma_{\hat{x}} = 2,0930 \times 3,6/\sqrt{20} = 1,7$  mm.

Pode-se observar que o valor estimado para o experimento com a ET B está dentro do intervalo de incerteza expandida do resultado com a ET C ( $999,9982m \leq 999,9993m \leq 1000,0016m$ ), assim como o correspondente valor estimado para a ET C está contido no intervalo da ET B, i.e., ( $999,9985 \leq 999,9999 \leq 1000,0001$ ). Por outro lado, pode-se observar que a ET A se distancia de forma mais evidente em relação à ET B e à ET C, de modo que o valor estimado correspondente não está contido nem no intervalo da ET B, i.e.,  $1000,0102m \notin [999,9985; 1000,0001]$ , e nem no da ET C, ou seja,  $1000,0102m \notin [999,9982m; 1000,0016m]$ . De forma similar, os valores estimados da ET B ( $999,9993m$ ) e da ET C ( $999,9999m$ ) também não estão no intervalo de incerteza expandida da ET A [ $1000,0095m; 1000,0109m$ ]. Embora a ET A tenha a melhor precisão (menor desvio padrão), seu resultado é significativamente diferente dos obtidos com a ET B e a ET C para um nível de abrangência de 95%.

Embora seja raro na prática cotidiana ter três ETs distintas medindo simultaneamente a mesma grandeza, a combinação de diferentes soluções é especialmente relevante na área de informações geoespaciais, onde frequentemente não se conhece o valor verdadeiro da grandeza de interesse, veja por exemplo Rofatto, Sapucci e Monico (2015). Portanto, pode-se utilizar as medidas dos três instrumentos para fornecer uma única solução mais provável. Para isso, vamos recorrer à inferência estatística que combina estimação de parâmetros e testes estatísticos (TEUNISSEN, 2018). A partir deste ponto, o ajustamento de observações será realizado usando a notação matricial, frequentemente encontrada na literatura. Embora o leitor possa encontrar variações na notação em diferentes fontes, a essência do ajustamento pode ser consultada em obras como GEMAEEL (1994), Koch (1999), Teunissen (2006) e KLEIN (2012), entre outras.

A hipótese nula, denotada por  $\mathcal{H}_0$ , é formulada sob a condição de que os erros aleatórios são distribuídos normalmente com esperança zero. Em nosso caso, o modelo associado à hipótese nula  $\mathcal{H}_0$  consiste naquele em que se acredita ser livre de erros sistemáticos (tendências), ou seja:

$$\begin{aligned} y_1 &= x + e_{v_1} \\ y_2 &= x + e_{v_2} \\ y_3 &= x + e_{v_3} \\ &\vdots \\ y_{60} &= x + e_{v_{60}} \end{aligned} \tag{23}$$

onde  $y_i$  para  $i = 1, \dots, 60$  são as 60 medidas realizadas,  $x$  é o parâmetro que se deseja estimar, ou seja, a distância (nossa parâmetro incógnito), e  $e_{v_i}$  para  $i = 1, \dots, 60$  são os erros verdadeiros, também desconhecidos.

Quando se assume que é 'verdadeiro', este modelo é empregado para estimar os parâmetros desconhecidos, geralmente em uma abordagem de mínimos quadrados. Assim, a hipótese nula  $\mathcal{H}_0$  do modelo padrão de Gauss–Markov (modelo paramétrico) na forma linear é dada por (TEUNISSEN, 2006):

$$\mathcal{H}_0 : \mathbb{E}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{Ax}; \quad \mathbb{D}\{\mathbf{y}\} = \Sigma_y \tag{24}$$

onde  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  é o operador de esperança,  $\mathbb{D}\{\cdot\}$  é o operador de dispersão,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o vetor das observações,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times u}$  é a matriz Jacobiana (também chamada de matriz design ou matriz dos coeficientes) de posto completo  $u$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{u \times 1}$  é o vetor dos parâmetros desconhecidos (incógnitas), e  $\Sigma_y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz variância e covariância (MVC) das observações  $\mathbf{y}$  (positiva e definida).

Em nosso caso, as medidas realizadas por todos os instrumentos (Tabela 3) foram empilhadas no vetor das observações  $[\mathbf{y}]_{60 \times 1}$ . Por se tratar de observações diretas, ou seja,  $u = 1$ , a matriz design é reduzida a um vetor coluna cujos elementos são todos iguais a 1, i.e.,  $\mathbf{A} = [1]_{60 \times 1}$ . Logo, o vetor dos parâmetros incógnitos fica reduzido a um escalar  $x$ , conforme visto anteriormente pelas equações de observação Eq. (23). Considera-se que os componentes de variância sejam conhecidos, ou seja, a MVC das observações é conhecida a priori e dada pela variância de cada instrumento, como segue:

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 \mathbf{I}_{20 \times 20} & \mathbf{0}_{20 \times 20} & \mathbf{0}_{20 \times 20} \\ \mathbf{0}_{20 \times 20} & \sigma_B^2 \mathbf{I}_{20 \times 20} & \mathbf{0}_{20 \times 20} \\ \mathbf{0}_{20 \times 20} & \mathbf{0}_{20 \times 20} & \sigma_C^2 \mathbf{I}_{20 \times 20} \end{bmatrix} \tag{25}$$

sendo  $\sigma_A^2 = 0,0015^2 m^2$ ,  $\sigma_B^2 = 0,0020 m^2$  e  $\sigma_C^2 = 0,0040^2 m^2$  as variâncias assumidas conhecidas para as ETs A, B e C, respectivamente;  $I_{20 \times 20}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{0}_{20 \times 20}$  é uma matriz de zeros, ambas de ordem igual ao número de medidas realizadas por cada ET (no caso, 20 medidas). Por se tratar de medidas independentes, observa-se que a MVC é uma matriz diagonal, cujos elementos são as variâncias das observações. Assim, a matriz peso  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pode ser tomada como a inversa da MVC, como segue:

$$\mathbf{W} = \Sigma_y^{-1} \quad (26)$$

Ao aplicar o MMQ, conforme Eq. (5), Eq. (6) e Eq. (7) encontramos a solução:

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T \mathbf{W} A)^{-1} A^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (27)$$

O leitor deve perceber que a solução dada pela expressão (27) é a média amostral ponderada pelo inverso da variância, conforme Eq. (26).

O vetor das observações ajustadas  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  e o vetor dos erros estimados  $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , sob a hipótese nula, são dados respectivamente por:

$$\hat{\mathbf{y}} = A \hat{\mathbf{x}} \quad (28)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \quad (29)$$

A MVC do parâmetro estimado, denotada por  $\Sigma_{\hat{x}} \in \mathbb{R}^{u \times u}$ , das observações ajustadas  $\Sigma_{\hat{y}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e dos erros estimados  $\Sigma_{\hat{e}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  podem ser obtidas pela aplicação da lei de propagação de incertezas, como segue:

$$\Sigma_{\hat{x}} = (A^T \mathbf{W} A)^{-1} \quad (30)$$

$$\Sigma_{\hat{y}} = A \Sigma_{\hat{x}} A^T \quad (31)$$

$$\Sigma_{\hat{e}} = \Sigma_y - \Sigma_{\hat{y}} \quad (32)$$

O leitor deve observar que, neste caso, a raiz quadrada da MVC do parâmetro incógnito corresponde ao desvio padrão da média, i.e.,  $\sigma_{\hat{x}} = \sqrt{\Sigma_{\hat{x}}}$ . Considerando que somente erros aleatórios estão presentes, o MMQ é dito ser o melhor (no sentido de variância mínima) estimador linear (para modelos lineares) imparcial (sem tendência/viés/não enviesado), do inglês BLUE – Best Linear Unbiased Estimator. Assim, a distância encontrada seria  $1000,0057\text{m} \pm 0,3\text{mm}$ , sob a suposição da hipótese nula  $\mathcal{H}_0$  ser verdadeira. A variância estimada (amostral), denotado por  $\hat{\sigma}^2$  e comumente chamada de “variância a posteriori”, é obtida a partir da seguinte expressão:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}}}{n - u} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{x})^2}{n - u} \quad (33)$$

O denominador representa os graus de liberdade (redundância) do ajustamento, que neste exemplo resulta em  $n - u = 60 - 1 = 59$ . Assim, o desvio padrão estimado (amostral) é obtido extraindo a raiz quadrada da Eq. (33), ou seja,  $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ , que resulta em  $\hat{\sigma} = 6,2\text{mm}$ .

Ao analisar a Tabela 3, observa-se que o desvio padrão estimado da solução combinada é aproximadamente 5 vezes maior que o da solução individual com a ET A ( $\hat{\sigma} = 1,4\text{ mm}$ ), cerca de 3 vezes maior que o da solução com a ET B ( $\hat{\sigma} = 1,8\text{ mm}$ ), e aproximadamente 2 vezes maior que o desvio padrão da solução individual com a ET C ( $\hat{\sigma} = 3,6\text{ mm}$ ). Portanto, pode-se afirmar que a solução combinada apresentou uma precisão significativamente pior em comparação com os experimentos individuais, indicando possíveis inconsistências no processo de combinação das soluções. Pode-se levantar a hipótese de falta de confiabilidade do modelo sob a hipótese nula. Nesse sentido, um teste global do modelo (em inglês, *overall model test*), também chamado de

teste Qui-Quadrado ( $\chi^2$ ), é frequentemente utilizado para diagnosticar a presença de inconsistências no modelo proposto. Esse teste fornece informações sobre a confiabilidade do modelo sob a hipótese nula assumida, sem a necessidade de especificar e testar uma hipótese alternativa particular. A ideia do teste global é que este é construído considerando que seus graus de liberdade “ $q$ ” correspondem à redundância do ajustamento, ou seja, ao tomar  $q = n - u$  graus de liberdade, obtém-se a seguinte estatística de teste (TEUNISSEN, 2006):

$$T_q = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{e}} \quad (34)$$

Note que a estatística de teste é a soma ponderada dos quadrados dos erros estimados (aparentes), ou seja, o termo a ser minimizado na solução pelo MMQ no caso geral, ponderado pela matriz  $\mathbf{W}$ . A regra de decisão do teste consiste em:

$$\text{Rejeitar } \mathcal{H}_0 \text{ se } T_q > k \quad (35)$$

A constante  $k$  é o valor crítico que define as regiões de rejeição e não rejeição da hipótese nula  $\mathcal{H}_0$ , de acordo com o nível de significância  $\alpha$  estipulado. A distribuição de probabilidade resultante do teste de razão de verossimilhança com fator de variância conhecido a priori é a distribuição qui-quadrado central com  $q$  graus de liberdade  $\chi^2_{(q=n-u,\alpha)}$  (KLEIN, 2012). A escolha do nível de significância  $\alpha$  envolve um certo grau de subjetividade. No entanto, é possível selecionar um nível de significância  $\alpha$  mais apropriado utilizando o Método de Monte Carlo (ROFATTO et al., 2020), que não será abordado neste documento. Aqui, por convenção, adotamos o nível de significância  $\alpha = 0,05$  (5%), que resulta no valor crítico  $k = 77,9305$ . Como a estatística de teste (Eq. (34)) resultou em  $T_q = 476,9047$ , então existem evidências para rejeitar a hipótese nula, uma vez que  $T_q > k$ .

O teste global apenas detecta inconsistências no processo de ajustamento, mas não fornece informações sobre a origem dessas inconsistências. Como a confiança na hipótese nula  $\mathcal{H}_0$  está comprometida, é necessário identificar a possível fonte de inconsistência no modelo em  $\mathcal{H}_0$ . Isso implica em estipular hipóteses alternativas e selecionar aquela que melhor se ajusta aos dados. Como visto no resultado anterior, devido à inconsistência entre os resultados das ETs, pode-se estipular que existe um efeito sistemático atuando em uma das ETs, seja na ET A, na ET B ou na ET C. Neste caso, os modelos nas hipóteses alternativas, denotado por  $\mathcal{H}_A^{(i)}$ , são uma extensão do modelo descrito na Eq. (24), pois incluem o vetor desconhecido do parâmetro de tendência  $\nabla \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , conforme segue:

$$\mathcal{H}_A^{(i)} : \mathbb{E}\{y\} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \nabla; \quad \mathbb{D}\{y\} = \mathbf{\Sigma}_y, \quad i = A, B, C \quad (36)$$

O vetor canônico unitário  $\mathbf{c}_i$  consiste exclusivamente em elementos com valores 0 e 1. O elemento “1” indica a posição onde o efeito sistemático de magnitude  $\nabla$  atua nas observações, enquanto “0” indica as observações livres de erro sistemático. Assim, para cada experimento realizado por uma das ETs, teremos um vetor  $\mathbf{c}_i$  diferente. Portanto, o índice “ $i$ ” corresponde ao modelo alternativo correspondente, resultando em três modelos alternativos, como descritos a seguir:

- Para o caso de assumir que as observações da ET A estão com tendência, o vetor  $\mathbf{c}_{i=A}$  é dado por:

$$\mathbf{c}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{20 \times 1} \\ \mathbf{0}_{20 \times 1} \\ \mathbf{0}_{20 \times 1} \end{bmatrix} \quad (37)$$

- Para o caso de assumir que as observações da ET B estão com tendência, o vetor  $\mathbf{c}_{i=B}$  é dado por:

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{20 \times 1} \\ \mathbf{1}_{20 \times 1} \\ \mathbf{0}_{20 \times 1} \end{bmatrix} \quad (38)$$

- Para o caso de assumir que as observações da ET C estão com tendência, o vetor  $\mathbf{c}_{i=C}$  é dado por:

$$\mathbf{c}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{20 \times 1} \\ \mathbf{0}_{20 \times 1} \\ \mathbf{1}_{20 \times 1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

O vetor  $\mathbf{1}_{20 \times 1}$  é um vetor coluna composto por 20 elementos, todo com valor igual a 1, e  $\mathbf{0}_{20 \times 1}$  também é um vetor coluna composto por 20 elementos, mas todos com valor igual a 0.

A seleção do modelo é baseada na estatística de teste advinda do teste de razão de verossimilhança, mas agora para  $q = 1$ , como segue (KLEIN, 2012):

$$T_{q=1}^{(i)} = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{W} \mathbf{c}_i \left( \mathbf{c}_i^T \mathbf{W} \Sigma_{\hat{\mathbf{e}}} \mathbf{W} \mathbf{c}_i \right)^{-1} \mathbf{c}_i^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{e}}, \quad \text{para } i = A, B, C \quad (40)$$

Como resultado, as estatísticas obtidas foram:  $T_{q=1}^{(A)} = 427,7301$  para ET A,  $T_{q=1}^{(B)} = 312,4734$  para ET B,  $T_{q=1}^{(C)} = 46,1056$  para ET C. Assim, o modelo a ser selecionado é aquele que possui a maior estatística de teste, i.e.:

$$\max(T_{q=1}) = \max_{i \in \{A, \dots, C\}} T_{q=1}^{(i)} \quad (41)$$

O termo  $\max(T_{q=1})$  retorna o valor máximo das estatísticas calculadas pela Eq. (41). Assim, o modelo escolhido é aquele em que todas as medidas realizadas com a ET A estão contaminadas pelo mesmo erro sistemático (tendência), pois foi aquele que apresentou a maior estatística de teste segundo à Eq. (41), ou seja:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}x + \mathbf{c}_A \nabla_A = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{c}_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \nabla_A \end{pmatrix} \quad (42)$$

Agora, os parâmetros incógnitos a serem estimados são aqueles apresentados no modelo descrito em (42), ou seja, o valor médio  $x$  e a tendência  $\nabla_A$  para as medidas realizadas com ET A. Para isso, basta aplicar as equações de Eq. (27) a Eq. (33), considerando a matriz  $\mathbf{A}$  aumentada pela coluna referente ao parâmetro  $\nabla_A$ , ou seja, trocando  $\mathbf{A}$  por  $(\mathbf{A} \quad \mathbf{c}_A)$ .

O novo modelo passa a ser a nova hipótese nula  $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^{(A)}$  e, portanto, deve-se verificar se há ou não inconsistências no ajustamento. Isso significa que o teste global deve ser aplicado novamente para o novo modelo selecionado. Nota-se que agora os graus de liberdade do teste global ficam  $n - u = 60 - 2 = 58$ . A nova hipótese nula não é rejeitada a um nível de significância de  $\alpha = 0,05$ , pois agora  $T_q = 49,1746 < k = 76,7778$ . Portanto, o modelo apresentado na Eq. (42) é válido, e a solução final (e única) para a distância estimada e sua respectiva incerteza vale  $999,9994\text{m} \pm 0,4\text{mm}$ . Além disso, conclui-se que as medidas da ET A apresentam uma tendência significativa de  $10,8 \pm 0,5\text{mm}$  em relação à distância encontrada (solução combinada). O desvio padrão estimado (amostral), neste caso, passa a valer  $\pm 2,5\text{ mm}$ , ficando próximo à média dos desvios padrão individuais.

A solução combinada corresponde à média das médias individuais de cada experimento, ou seja, aproxima-se da definição de valor esperado (ou esperança matemática). Como resultado, a incerteza da solução combinada é menor do que a de cada uma das soluções individuais. Por isso, pode-se utilizá-la como solução final quando um valor de referência não está disponível. Se o objetivo fosse avaliar qual processo de medição teve melhor acurácia, seria necessário ter um valor verdadeiro (referência) da distância, por exemplo, por meio de um padrão de unidade metro conhecido, além de um número maior de ensaios (experimentos) para a estimativa do erro médio. No próximo tópico, apresentamos o caso em que se conhece o valor verdadeiro, e, por simplicidade, vamos nos restringir ao mesmo exemplo dos dados da Tabela 3, que será apresentado no tópico a seguir.

## 4.2 Avaliação da Acurácia

Agora, considere que o valor verdadeiro (referência) da distância entre os dois pontos seja 1000,0000 m — o que torna possível avaliar a acurácia de cada experimento realizado por cada ET. O RMSE representa

uma métrica associada à acurácia, que engloba os conceitos de precisão e veracidade. Este pode ser obtido a partir da Eq. (22) e, portanto, requer uma métrica de precisão e veracidade. Uma métrica de precisão é o desvio-padrão amostral, que pode ser obtido a partir da Eq. (10), cujos valores já estão indicados na Tabela 3. Em termos de veracidade, pode-se estimar o erro médio (tendência) a partir da aplicação da Eq. (20) — ou seja, fazendo a diferença entre o valor médio obtido em cada experimento para cada ET, cujos valores também já foram apresentados na Tabela 3, e o valor de referência. Os resultados são mostrados na Tabela 4.

Tabela 4 – Síntese da avaliação da acurácia.

Solução	Erro Médio Estimado [mm] (Tendência)	Desvio-Padrão [mm] (Flutuação Probabilística)	RMSE [mm] Tendência e Flutuação Probabilística
A	10,2	1,4	10,3
B	-0,7	1,8	1,9
C	-0,1	3,6	3,6

Fonte:Os Autores (2024).

Pode-se observar que, de fato, existe uma tendência significativa para a ET A de +10,2mm ao um nível de abrangência de 95%. Em outras palavras, o valor verdadeiro de 1000,0000m não está contido no intervalo de abrangência da ET A, i.e.,  $1000,000m \notin [1000,0095m; 1000,0109m]$ . Da mesma forma, o leitor deve observar que as tendências estimadas para ET B e ET C não são significativas para esse mesmo nível de abrangência. Isso significa que o valor verdadeiro está contido dentro do intervalo de incerteza de cada uma dessas ETs para um nível de 95%, como segue:  $1000,000m \subset [999,9985; 1000,0001]$  para ET B; e  $1000,000m \subset [999,9982; 1000,0016]$  para ET C.

Observe também que a verdadeira tendência simulada foi de +10mm. Essa diferença se deve ao efeito dos erros aleatórios em função do número de observações (tamanho da amostra). Se aumentássemos o tamanho da amostra ( $n > 20$ ), as médias se aproximariam progressivamente do valor de referência.

Como já foi destacado, quando temos o valor verdadeiro em mãos, somos obrigados a fazer a correção do erro sistemático. Assim, ao corrigir as medidas da tendência de +10,2 mm para ET A, o resultado do processo de medição com a ET A teria melhor acurácia que os demais instrumentos.

Entretanto, na prática cotidiana, dificilmente temos o valor verdadeiro de algo que estamos medindo. Portanto, destaca-se a importância da estratégia apresentada na seção anterior para a avaliação de incerteza, principalmente para detectar possíveis inconsistências. Aquele tipo de análise pode ainda ser estendido ao aplicar os conceitos da Teoria da Confiabilidade como forma de avaliar a acurácia esperada do sistema de medição (KLEIN; MATSUOKA; MONICO, 2013).

## 5 CONTRIBUIÇÕES

Vimos que a acurácia engloba os conceitos de veracidade e precisão. A veracidade está diretamente associada ao conceito de erro sistemático. O componente sistemático do erro altera o resultado de um processo de medição de forma previsível, fazendo com que o valor estimado de um resultado do processo de medição apresente tendência/viés/bias. O erro médio expressa numericamente essa tendência/viés/bias pela diferença entre o valor médio (valor estimado) do resultado do processo de medição e um valor de referência da grandeza de interesse. Quanto maior o erro sistemático, maior será o erro médio. Assim, um processo experimental de medição apresenta melhor veracidade quando apresenta o menor erro médio, ou seja, a menor tendência.

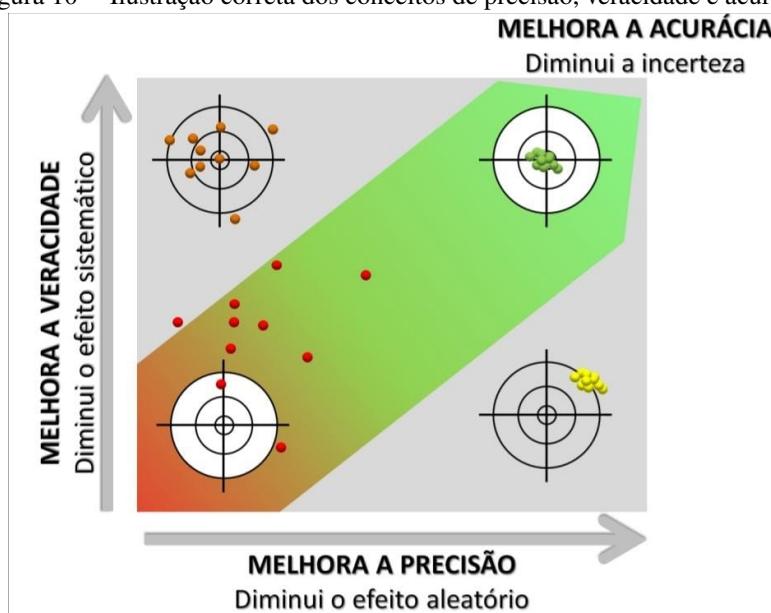
Ao contrário da veracidade, a precisão está associada ao componente aleatório do erro. As inevitáveis flutuações probabilísticas (variabilidade) são responsáveis por produzirem os erros aleatórios. Quanto maior as flutuações probabilísticas das observações, maiores serão os erros aleatórios. O desvio padrão amostral é um dos representantes utilizado para expressar a precisão de um processo de medição. Ele representa o desvio do conjunto de observações em torno do valor estimado (usualmente, a média amostral). Quanto maior é a flutuação das observações, quanto maior for sua imprecisão, maior será o desvio-padrão. Um sistema tem melhor precisão do que outro quando fornece o menor desvio-padrão. Em contraste com a veracidade, na precisão, apenas o

próprio conjunto de dados é considerado, ou seja, a análise é feita sem a influência de um valor “externo” de referência.

Uma métrica de avaliação da acurácia que captura tanto o componente aleatório quanto o sistemático é a raiz quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE). Portanto, um sistema tem melhor acurácia que outro quando apresenta o menor erro total, ou seja, o menor valor de RMSE. O leitor deve se atentar pelo fato de que a precisão e a veracidade fazem parte da definição de acurácia. Não faz sentido dizer que um valor acurado é preciso ou não (MONICO et al., 2009). Na ausência de efeitos sistemáticos, a avaliação de acurácia depende apenas do componente aleatório do erro, ou seja, apenas da precisão. Neste caso, se a precisão não é boa, a acurácia também não será.

De modo geral, a Figura 10 expressa de forma correta os conceitos de precisão, veracidade e acurácia, e a Figura 11 mostra as métricas associadas aos conceitos. Por fim, destaca-se que a avaliação de acurácia requer o conhecimento do valor verdadeiro para que os erros possam ser calculados. Em contraste, a análise da incerteza não exige essa informação. A incerteza pode (e deve) ser determinada mesmo na ausência do valor verdadeiro. Neste último caso, apresentamos uma forma de avaliar a tendência interna do processo de medição quando há redundância de soluções provenientes de diferentes sistemas de medição.

Figura 10 – Ilustração correta dos conceitos de precisão, veracidade e acurácia.



Fonte: Os Autores (2024).

Figura 11 – Componentes do Erro de Medição, Caracterização Qualitativa e Métricas.



Fonte: Os Autores (2024).

## Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Processos Nº 313699/2021-6 e 421278/2023-4).

## Contribuição dos Autores

Conceptualização: Rofatto, V. F.; Curadoria dos dados: Rofatto, V. F.; Análise formal, Investigação e Metodologia: Rofatto, V. F., Klein, I. e Matsuoka, M. T.; Software: Rofatto, V. F.; Validação: Klein, I. e Matsuoka, M. T. Redação-minuta inicial: Rofatto, V. F. Redação-revisão e edição: Rofatto, V. F., Klein, I. e Matsuoka, M. T.

## Conflitos de Interesse

Declaramos que inexistem conflitos de interesse.

## Referências

- ABNT. **Norma Brasileira NBR ISO 5725-1:2018. Exatidão (veracidade e precisão) dos métodos e dos resultados de medição - Parte 1: Princípios gerais e definições.** Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2018.
- \_\_\_\_\_. **Norma Brasileira NBR ISO 5725-2:2018. Exatidão (veracidade e precisão) dos métodos e dos resultados de medição - Parte 2: Método básico para a determinação da repetibilidade e da reproduzibilidade de um método-padrão de medição.** Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2018.
- \_\_\_\_\_. **Norma Brasileira NBR ISO 5725-4:2018. Exatidão (veracidade e precisão) dos métodos e dos resultados de medição - Parte 4: Métodos básicos para a determinação da exatidão de um método-padrão de medição.** Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2018.
- \_\_\_\_\_. **Norma Brasileira NBR ISO 5725-6:2018. Exatidão (veracidade e precisão) dos métodos e dos resultados de medição - Parte 6: Utilização prática dos resultados do ensaio de precisão.** Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2018.
- BIPM; IEC; IFCC; ILAC; ISO; IUPAC; IUPAP; OIML. **Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement.** [S.l.]: Joint Committee for Guides in Metrology, 2008. JCGM 100:2008. Disponível em: <[https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM\\_100\\_2008\\_E.pdf/cb0ef43f-baa5-11cf-3f85-4dcd86f77bd6](https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_100_2008_E.pdf/cb0ef43f-baa5-11cf-3f85-4dcd86f77bd6)>.
- \_\_\_\_\_. **International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM).** 3. ed. [S.l.]: Joint Committee for Guides in Metrology, 2012. JCGM 200:2012. Disponível em: <[https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM\\_200\\_2012.pdf/f0e1ad45-d337-bbeb-53a6-15fe649d0ff1](https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_200_2012.pdf/f0e1ad45-d337-bbeb-53a6-15fe649d0ff1)>.
- GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas.** 1. ed. Curitiba: Editora da UFPR, 1994.
- GHILANI, C. D. **Adjustment Computations: Spatial Data Analysis.** 6. ed. [S.l.]: John Wiley Sons, Ltd, 2017. ISBN 9781119390664.

- IBGE. **IBGE-PPP: Serviço on-line para Pós-Processamento de dados GNSS.** Rio de Janeiro, jun. 2023. Versão: Junho de 2023. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br>>.
- KLEIN, I. **Controle de qualidade no ajustamento de observações geodésicas.** 2012. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/38615>>.
- KLEIN, I.; MATSUOKA, M. T.; MONICO, J. F. G. Proposta para a estimativa da acurácia de redes geodésicas horizontais integrando análise de robustez e de covariância. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 19, n. 4, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1982-21702013000400001>>.
- KOCH, K. R. **Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models.** 2. ed. Berlin: Springer, 1999.
- LIMA JÚNIOR, P.; SILVA, M. T. X.; SILVEIRA, F. L.; VEIT, E. A. **Laboratório de mecânica: subsídios para o ensino de física experimental.** [S.l.]: UFRGS. Instituto de Física, 2013. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/90438>>.
- MONICO, J. F. G.; DAL PÓZ, A. P.; GALO, M.; SANTOS, M. C.; OLIVEIRA, L. C. Acurácia e precisão: revendo os conceitos de forma acurada. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 15, n. 3, 2009. Disponível em: <<https://revistas.ufpr.br/bcg/article/viewFile/15513/10363>>.
- ROFATTO, V. F.; BONIMANI, M. L. S.; MATSUOKA, M. T.; KLEIN, I.; CAMPOS, C. C. Resampling Methods in Neural Networks: From Point to Interval Application to Coordinate Transformation. **Journal Of Surveying Engineering**, 2022. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/10.1061/JSUED2.SUENG-1366>>.
- ROFATTO, V. F.; MATSUOKA, M. T.; KLEIN, I.; VERONEZ, M. R.; SILVEIRA, L. G. Jr. A Monte Carlo-Based Outlier Diagnosis Method for Sensitivity Analysis. **Remote Sensing**, v. 12, n. 5, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/rs12050860>>.
- ROFATTO, V. F.; SAPUCCI, L. F.; MONICO, J. F. G. Combinação de séries temporais de atraso zenital troposférico em tempo quase real: resultados preliminares. **Revista Brasileira de Cartografia**, v. 67, n. 1, 2015. DOI: 10.14393/rbcv67n1-44735.
- SHIRMOHAMMADI, S.; MARI, L.; PETRI, D. On the Commonly-Used Incorrect Visual Representation of Accuracy and Precision. **EEE Instrumentation Measurement Magazine**, v. 24, n. 1, 2021. DOI: 10.1109/MIM.2021.9345597.
- SURACI, S. S.; OLIVEIRA, L. C. Aplicação das normas L1 e L em redes altimétricas: identificação de outliers e construção do modelo estocástico. **Revista cartográfica**, n. 101, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.35424/rcarto.i101.669>>.
- \_\_\_\_\_. Outlier=Gross Error? Do Only Gross Errors Cause Outliers in Geodetic Networks? **Bulletin of Geodetic Sciences**, 2019.
- TABACNIKS, M. H. Guia para Expressão de Incertezas: Uma introdução à teoria de erros e incertezas. In: [s.l.]: IFUSP, 2019. Algarismos Significativos. Disponível em: <<http://www.cepa.if.usp.br/e-fisica/mecanica/universitario/elivro.php>>.
- TEUNISSEN, P. J. G. Distributional theory for the DIA method. **Journal of Geodesy**, v. 92, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00190-017-1045-7>>.
- \_\_\_\_\_. **Testing Theory.** [S.l.]: Delft University Press, 2006.
- VUOLO, J. H. **Fundamentos da teoria de erros.** [S.l.]: Edgard Blücher, 1992.

## Biografia do autor principal



Vinicio Francisco Rofatto nasceu em Limeira, São Paulo, no ano de 1986. Obteve seu doutorado em Sensoriamento Remoto pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), em 2020. Atualmente, ocupa cargo de professor na Universidade Federal de Uberlândia, Monte Carmelo, Minas Gerais. Tem atuado nas seguintes especialidades: teoria da estimativa, teoria da confiabilidade, controle de qualidade, inteligência artificial, Método Monte Carlo, GNSS/Meteorologia. Em 2021, recebeu Menção Honrosa no Prêmio CAPES de Tese, na área de GEOCIÊNCIAS. Atualmente, é membro do Grupo *Geodetic quality/integrity modelling, monitoring and design da Inter-Commission Committee on Theory (ICCT)* da *International Association of Geodesy (IAG)*.



Esta obra está licenciada com uma Licença [Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) – CC BY. Esta licença permite que outros distribuam, remixem, adaptem e criem a partir do seu trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que lhe atribuam o devido crédito pela criação original.