INICIAÇÃO À AEROTRIANGULAÇÃO SEMIANALÍTICA

1 – INTRODUÇÃO

O presente trabalho, "iniciação à aerotriangulação semianalítica", originalmente compõe-se de 42 páginas, onde no capítulo I tem-se o desenvolvimento literal da matriz de rotação e no capítulo II um exemplo numérico, referente a conexão de dois modelos adjacentes.

Abordou-se três caminhos de cálculo, com a finalidade de pesquisar a convergência dos valores, (assim distribuídos: 1º caso, 1º procedimento e 2º procedimento) que teoricamente deveriam levar a resultados compatíveis. Porém constatou-se que em um dos casos (1º procedimento) somente é viável quando os ângulos de rotação aproximam-se de zero, isto devido a erros numéricos produzidos pelas transformações sucessivas.

2 – FÓRMULAS GERAIS

a. Fórmula para transformação de coordenadas de aparelho em coordenadas terrestre.

$$\begin{matrix} E_p \\ N_p \\ Z_p \end{matrix} \qquad \begin{matrix} E_d \\ N_d \\ Z_d \end{matrix} \quad -F.M_{3x3} \cdot \begin{matrix} x_e - x_p \\ y_e - y_p \\ h_e - h_p \end{matrix}$$

onde:

$$M_{3x3} = \begin{matrix} \cos\emptyset \cos k & -\cos\emptyset \,\mathrm{sen}\, k & \mathrm{sen}\,\emptyset \\ \mathrm{sen}\,w \,\mathrm{sen}\,\emptyset \cos k + \cos w \,\mathrm{sen}\, k & -\mathrm{sen}\,w\,\mathrm{sen}\,\emptyset\,\mathrm{sen}\,k + \cos w \cos k & -\mathrm{sen}\,w \cos\emptyset \\ -\cos w \,\mathrm{sen}\,\emptyset \cos k + \mathrm{sen}\,w\,\mathrm{sen}\,k & \cos w\,\mathrm{sen}\,\emptyset\,\mathrm{sen}\,k \mp \mathrm{sen}\,w \cos k & \cos w \cos\emptyset \end{matrix}$$

E_d, N_d, Z_d = Coordenadas terrestre do centro de projeção da câmara direita do modelo transformado.

x_e, y_e, h_e = Coordenadas de aparelho do centro de projeção da câmara esquerda do modelo a ser transformado.

E_p, N_p, Z_p = Coordenadas transformadas no sistema terrestre.

F = Fator de escala.

b. Fórmula iterativa para determinação das incógnitas, F, W, Ø e K com a condição mínima de 2 pontos (apoio) planimétricos e 3 altimétricos.

$$\Delta x_{eq} df + O dw + \Delta h_{eq} d\emptyset - \Delta y_{eq} dk = (\Delta E_{dq} - \Delta x_{eq})$$
$$\Delta y_{eq} df - \Delta h_{eq} dw + O d\emptyset + \Delta x_{qe} dk = (\Delta N_{dq} - \Delta y_{eq})$$
$$\Delta h_{eq} df + \Delta y_{eq} dw - \Delta x_{eq} d\emptyset + O dk = (\Delta z_{dq} - \Delta h_{eq})$$
$$\Delta x_{er} df + O dw + \Delta h_{er} d\emptyset - \Delta y_{er} dk = (\Delta E_{dr} - \Delta x_{er})$$
$$\Delta y_{er} df - \Delta h_{er} dw + O d\emptyset + \Delta x_{er} dk = (\Delta N_{dr} - \Delta y_{er})$$
$$\Delta h_{er} df + \Delta y_{er} dw - \Delta x_{er} d\emptyset + O dk = (\Delta Z_{dr} - \Delta h_{er})$$

$f = 1 + df$
$F = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_n$

Obs.: "eq" indica coordenadas do ponto "e" menos coordenadas do ponto "q".
"er" indica coordenadas do ponto "e" menos coordenadas do ponto "r".
Os valores de dw, dØ e dk são obtidos em radianos.

c. Fórmulas aproximadas para obtenção de K e F.

$$K = (\mathrm{arctg}\,\frac{\Delta x}{\Delta y} - \mathrm{arctg}\,\frac{\Delta E}{\Delta N})$$

$$F = \frac{\sqrt{\Delta E^2 + \Delta N^2 + \Delta Z^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta h^2}}$$

d. Solução dos Sistemas de Equações

Para solucionar os sistemas de equações, utilizamos o método de CHOLESKY. Que consiste em determinar uma matriz T_I (Triangular Inferior) que multiplicada por uma T_S (Triangular Superior) resulta a matriz original.

Assim para um Sistema 3 x 3 (AX = B).

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad X = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$$

Teremos que determinar as matrizes T_I e T_S que:

$$\underbrace{(T_I \cdot T_S)}_{A} \cdot X = B$$

ou de forma mais conveniente:

$$T_I \cdot \underbrace{(T_S \cdot X)}_{Y} = B$$

Escrevendo na forma matricial

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{matrix} = \begin{matrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & t_{12} & t_{13} & Y_1 \\ 0 & 1 & t_{23} & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \end{matrix}$$

$$\quad A \qquad B \qquad\qquad T_I \qquad\qquad T_S \qquad Y$$

onde:

$a_{i,n+1} = b_i$ (última coluna da matriz aumentada A)

$t_{i,n+1} = y_i$ (última coluna da matriz aumentada T_S)

As fórmulas para determinar os elementos das matrizes triangulares são:

$$\ell_{i1} = a_{i1}$$

$$t_{1j} = \frac{a_{1i}}{a_{11}}$$

$$\ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} \ell_{ir} t_{rj}$$

$$t_{ij} = \frac{1}{\ell_{ii}} \quad a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} \ell_{ir} \cdot t_{rj}$$

Nos sistemas métricos ($a_{ij} = a_{ji}$) que é o nosso caso, a determinação da Matriz Triangular inferior é mais simples.

$$\ell_{ij} = t_{ji}\, \ell_{jj} \; (i \neq j)$$

Finalmente obtém-se os valores de x_1, x_2 e x_3 da seguinte forma:

$$\begin{matrix} 1 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 1 & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_3 = y_3 \\ x_2 = y_2 - t_{23}x_3 \\ x_1 = y_1 - t_{12}x_2 \; t_{13}x_3 \end{matrix}$$

onde:

$y_1 = t_{14}$

$y_2 = t_{24}$

$y_3 = t_{34}$

3. SÍNTESE DOS CÁLCULOS

a. Valores encontrados

	F	W	Ø	K	Nº de Iteraçõe
1º Caso	0,040586604	0°04'07,1"	-0°10'31,6"	-59°21'45,9"	4
1º Procedimento	0,040585780	-0°05'29,5"	-1°09'19,2"	-59°17'10,9"	4
2º Procedimento	0,040582047	0°03'28,0"	-0°10'33,5"	-59°21'26,0"	4
ACKERMANN*	0,40591	0°03'46,8"**	-0°10'48,0"	-59°21'18,0"**	–

b. Analisando o quadro dos valores encontrados, nota-se que para o mesmo número de iterações o 2º procedimento, fornece valores mais próximos aos calculados pelo programa PT-M43 (no cálculo pelo PT-M43 foram utilizados 4 pontos de apoio, enquanto nós calculamos somente com 3).

c.) Transformação de outros pontos

Utilizando os valores encontrados pelo 2º procedimento calculamos as coordenadas de campo dos pontos necessários a ligação dos modelos.

* Valores obtidos pelo programa versão PT-M43.

** Os valores angulares têm a precisão próximo do minuto, já que os valores foram obtidos na impressão, com centésimos de grado e posteriormente transformado em graus.

4. CONCLUSÃO

Pela concepção, do original deste trabalho, acreditamos termos apresentado alguns resultados, onde a rotina de cálculo pode oferecer pelo seu desenvolvimento lógico, um material didático de fácil compreensão, pois propositadamente repetimos várias vezes os mesmos passos a fim de atingir este objetivo.

GILBERTO CUGLER
Téc. Fotogrametrista
Bel. em Matemática