

Cálculo da Matriz de Rotação nas Transformações de Coordenadas

José Bittencourt de Andrade
Professor

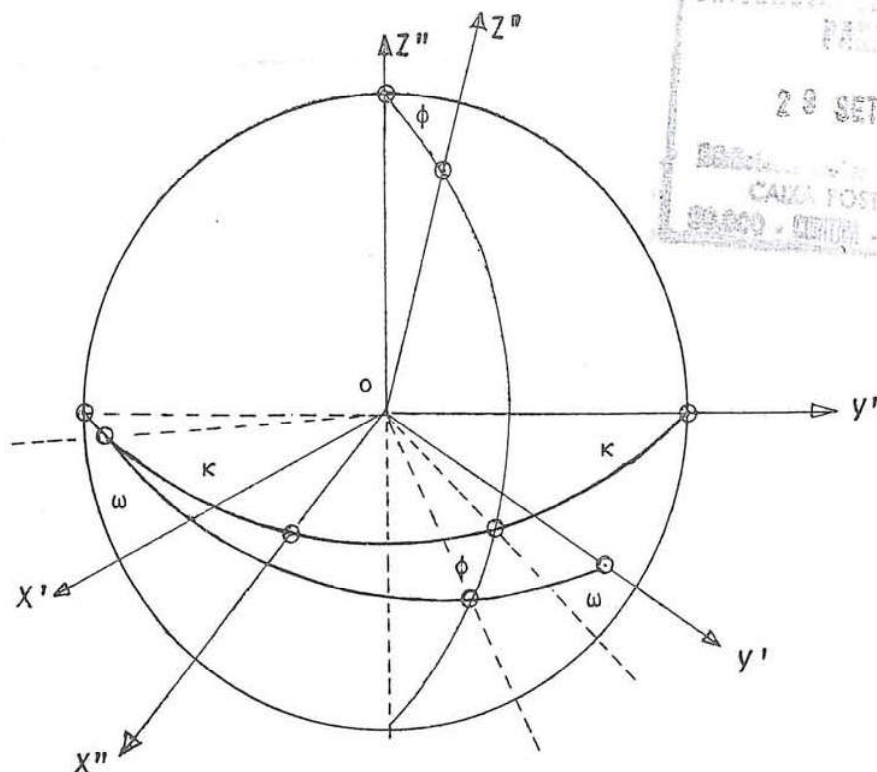
Em alguns trabalhos fotogramétricos, como a concatenação de modelos no método dos modelos independentes; a transformação das coordenadas de máquina em geodésicas nas estéreo-triangulações; a redução de placa nas estéreo-triangulações analíticas e no método fotogramétrico da geodésia celeste; surge o problema da determinação da matriz de rotação.

O propósito deste trabalho é o de expor uma metodologia de cálculo relativamente simples para atingir o objetivo de determinar os valores dos elementos da matriz de rotação.

Já foi demonstrado os | 1 | o quanto é possível ganhar

em precisão no tratamento das estéreo-triangulações, quando substituímos a abordagem tradicional de ajustar as faixas através de polinômios, por uma formulação isenta de erros sistemáticos provocados por modelo matemático inadequado. A mesma abordagem encontra aplicação em outros problemas como os descritos no início, que envolvem as transformações de coordenadas retilíneas, quando a matriz de rotação é a incógnita.

A figura seguinte dá a idéia gráfica da transformação de coordenadas, quando as origens dos sistemas coincidem, admitindo ser o par de termos cartesianos ortogonais e destrógiros.



Da figura; podemos ver que:

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \lambda \cdot R_3(\omega) R_1(-\phi) R_3(-k) \begin{pmatrix} x''_i \\ y''_i \\ z''_i \end{pmatrix} \quad (1)$$

onde λ é um fator de escala.

Podemos, ainda escrever:

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi & -\cos \phi \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k & 0 \\ \sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_i \\ y''_i \\ z''_i \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{ou} \quad \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_i \\ y''_i \\ z''_i \end{pmatrix}, \text{ onde} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_{11} &= \lambda (\cos \omega \cos k + \sin \omega \sin \phi \sin k) \\ u_{12} &= \lambda (-\cos \omega \sin k + \sin \omega \sin \phi \cos k) \\ u_{13} &= \lambda (-\sin \omega \cos \phi) \\ u_{21} &= \lambda (-\sin \omega \cos k + \cos \omega \sin \phi \sin k) \\ u_{22} &= \lambda (\sin \omega \sin k + \cos \omega \sin \phi \cos k) \\ u_{23} &= \lambda (-\cos \omega \cos \phi) \\ u_{31} &= \lambda (\cos \phi \sin k) \\ u_{32} &= \lambda (\cos \phi \cos k) \\ u_{33} &= \lambda (\sin \phi) \end{aligned} \quad (4)$$

Sendo medidas as coordenadas de n pontos e escrevendo a (3) em rotação matricial resumida:

$${}_3\bar{X}_n = {}_3U_3 {}_3X_n \quad (5)$$

Para resolver a (5) em U , teremos:

$${}_3\bar{X}_n {}_nX'_3 = {}_3U_3 {}_3X_n {}_nX'_3 \quad (6)$$

ou, finalmente:

$${}_3U_3 = {}_3\bar{X}_n {}_nX'_3 ({}_3X_n {}_nX'_3)^{-1} \quad (7)$$

Entretanto, em U aparecem nove incógnitas, quando, na realidade são apenas quatro:

- 1) o fator de escala λ
- 2) o ângulo k
- 3) o ângulo ϕ
- 4) o ângulo ω .

Será, pois, necessário encontrar as relações entre os elementos da matriz U , a fim de ajustá-los.

Assim teremos:

$$\frac{u_{13}}{u_{23}} = \operatorname{tg} \omega \quad (8)$$

$$\frac{u_{31}}{u_{32}} = \operatorname{tg} k \quad (9)$$

$$u_{13} = \lambda (-\sin \omega \cos \phi)$$

$$u_{23} = \lambda (-\cos \omega \cos \phi)$$

$$\frac{u_{13}}{\lambda \cos \phi} = -\sin \omega$$

$$\frac{u_{23}}{\lambda \cos \phi} = -\cos \omega$$

Quadrando as duas últimas e somando membro a membro:

$$\frac{u_{13}^2 + u_{23}^2}{\lambda^2 \cos^2 \phi} = 1$$

$$\lambda^2 = \frac{u_{13}^2 + u_{23}^2}{\cos^2 \phi}$$

$$\lambda^2 = \frac{u_{13}^2 + u_{23}^2}{1 - \sin^2 \phi}$$

$$\lambda^2 = \frac{u_{13}^2 + u_{23}^2}{1 - \left(\frac{u_{33}}{\lambda}\right)^2}$$

$$\lambda^2 \left(1 - \frac{u_{33}^2}{\lambda^2}\right) = u_{13}^2 + u_{23}^2$$

$$\lambda = \sqrt{u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2} \quad \text{e} \quad (10)$$

$$\text{sen } \phi = \frac{u_{33}}{|\sqrt{u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2}|} \quad (11)$$

O quadrante deve ser interpretado através dos valores aproximados dos ângulos e do sinal da função trigonométrica.

Com o intuito de ajustar 12 los valores dos elementos da matriz U, teríamos como modelo matemático as equações (4).

Desta forma, podemos escrever:

$${}_9L_{b1} = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

onde seus elementos são obtidos da solução da (7).

A matriz dos parâmetros aproximados pode ser então escrita:

$${}_4X_{01} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ k_0 \\ \phi_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

na qual os seus elementos são calculados através das (8), (9), (10) e (11).

A matriz dos valores numéricos das quantidades observadas, como função dos valores aproximados dos parâmetros, é calculada através dos (4):

$${}_9L_{01} = F(X_0) = \begin{bmatrix} u_{110} \\ u_{120} \\ u_{130} \\ u_{210} \\ u_{220} \\ u_{230} \\ u_{310} \\ u_{320} \\ u_{330} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Então

$${}_9L_1 = L_0 - L_b \quad (15)$$

Sendo unitária a matriz dos pesos, a matriz das correções aos valores aproximados dos parâmetros, será:

$${}_4X_1 = -({}_4A_9' {}_9A_4)^{-1} {}_4A_9' {}_9L_1 \quad (16)$$

onde

$${}_9A_4 = \frac{\partial F}{\partial X} \quad X = X_0, \text{ ou}$$

$${}_9A_4 = \begin{bmatrix} u_{110}/\lambda_0 & u_{120} & \lambda_0 (\text{sen } \omega_0 \cos \phi_0 \text{ sen } k_0) & u_{210} \\ u_{120}/\lambda_0 & -u_{110} & \lambda_0 (\text{sen } \omega_0 \cos \phi_0 \cos k_0) & u_{220} \\ u_{130}/\lambda_0 & 0 & \lambda_0 (\text{sen } \omega_0 \text{ sen } \phi_0) & u_{230} \\ u_{120}/\lambda_0 & u_{220} & \lambda_0 (\cos \omega_0 \cos \phi_0 \text{ sen } k_0) & -u_{110} \\ u_{220}/\lambda_0 & -u_{210} & \lambda_0 (\cos \omega_0 \cos \phi_0 \cos k_0) & -u_{120} \\ u_{230}/\lambda_0 & 0 & \lambda_0 (\cos \omega_0 \text{ sen } \phi_0) & -u_{130} \\ u_{310}/\lambda_0 & u_{320} & \lambda_0 (-\text{sen } \phi_0 \text{ sen } k_0) & 0 \\ u_{320}/\lambda_0 & -u_{310} & \lambda_0 (-\text{sen } \phi_0 \cos k_0) & 0 \\ u_{330}/\lambda_0 & 0 & \lambda_0 (\cos \phi_0) & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A matriz dos parâmetros ajustados, ficará:

$$X_a = X_0 + {}_4X_1 \quad (18)$$

e

$$L_a = F(X_a) \quad (19)$$

Podemos ainda calcular os resíduos, a somatória dos quadrados dos resíduos e a variância pelas expressões conhecidas:

$${}_9V_1 = {}_9A_4' {}_4X_1 + {}_9L_1 \quad (20)$$

$${}_1V_9' {}_9V_1 = {}_1X_4' {}_4A_9' {}_9L_1 + {}_1L_9' {}_9L_1 \quad (21)$$

$$m_0^2 = \frac{{}_1V_9' {}_9V_1}{n - u} = \frac{V' V}{9 - 4} \quad (22)$$

Desta forma, podemos calcular as novas coordenadas, pela equação matricial:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

ondê X, Y e Z são as coordenadas de um ponto no novo sistema (incógnitas)

U = matriz de transformação (calculada)

X₀ Y₀ e Z₀ são as coordenadas da origem no novo sistema (dados)

x, y e z são as coordenadas de um ponto no sistema antigo (dados)

x₀, y₀ e z₀ são as coordenadas da origem no sistema antigo (dados)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, José Bittencourt de. *O problema dos sistemas de coordenadas nas aerotriangulações*. Curitiba, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1973. [Tese de mestrado].
- GEMAEL, Camil. *Aplicações do cálculo matricial em geodésia*. 2. pt.: Ajustamento de observações. Curitiba, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974.