

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS, UMA ALTERNATIVA

Eng.^o Cart. Luiz Felipe Coutinho da Silva

O objetivo final dos levantamentos geodésicos é determinar a posição relativa entre pontos da superfície terrestre. A estes pontos são geralmente associados coordenadas curvilíneas, mas, na prática, costuma-se representá-los no plano de uma carta em um sistema de coordenadas planas retangulares.

O relacionamento entre os pontos determinados em campos e o posicionamento de seus correspondentes na carta é feito por meio de sistemas de projeção. Entre as que mais se aplicam no campo da geodésia, dá-se preferência às projeções conformes devido ao fato de não apresentarem distorções angulares e a escala de distorção linear ser igual em todas as direções.

De todas as projeções conformes a mais consagrada é a Projeção conforme de Gauss-Krüger, também conhecida como Transversa de Mercator. Nesta, considera-se um cilindro, tangente a um certo meridiano e cujo eixo é perpendicular ao eixo de rotação do elipsóide.

Com a finalidade de se reduzir os efeitos das distorções inerentes ao desenvolvimento plano de uma superfície elipsóidica são considerados sistemas parciais (fusos) e um coeficiente de redução de escala para o meridiano central do fuso. Este último fator provocará ao invés da tangência, a situação de secância entre o elipsóide e o cilindro e conseqüentemente o aumento de uma para duas as linhas representadas em verdadeira grandeza. A escolha da amplitude dos fusos bem como o valor do coeficiente de escala determinará diversos sistemas de projeção entre os quais o mais conhecido é o Universal Transverso de Mercator – UTM.

Para o cálculo da transformação de coordenadas planas do Sistema de Projeção UTM ou qualquer variante LTM em coordenadas curvilíneas geodésicas φ e λ , a maioria dos métodos, descritos na bibliografia clássica, pressupõe o uso de tabelas e formulários para interpolação, ou processos iterativos.

O Problema básico consiste na determinação, inicialmente do valor da latitude aproximada φ' , como visto na figura 1.

Os valores N' e E' são obtidos ao se expurgar das coordenadas planas N e E , os valores das constantes do Sistema de Coordenadas (10.000.000 m para o Equador e 500.000 para o meridiano central do fuso, no caso UTM) e, posteriormente, restabelecer a tangência do cilindro ao elipsóide. Esta última condição é mediante aplicação do fator de escala K_0 do meridiano central. Por exemplo, considerando

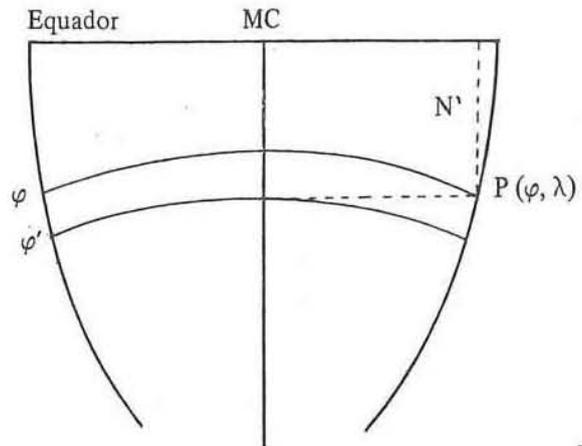


Figura 1

para o conjunto cilindro-elipsóide, um fator igual a 0,9996 significa considerar o raio do cilindro como sendo 99,96% do raio de curvatura, em cada ponto, do meridiano central sobre o elipsóide (elipse meridiana).

Tem-se assim que o valor N' para a latitude é dado por:

$$N'_\varphi = \frac{N - \text{Cte}}{K_0} \quad (1)$$

Uma vez que o cilindro possui agora a condição de tangência, ao elipsóide, no meridiano central, este será representado em verdadeira grandeza.

Pode-se, com base nesta situação, afirmar que o valor N'_φ , calculado anteriormente e que corresponde à latitude φ , é numericamente igual ao comprimento do arco de meridiano central compreendido entre a latitude φ' e o Equador. Então:

$$B\varphi' = N'_\varphi \quad (2)$$

onde $B\varphi'$ é dado por:

$$B\varphi' = \int_0^{\varphi'} a(1-e^2)(1-e^2 \sin^2 \varphi')^{-3/2} d\varphi' \quad (3)$$

ou

$$B\varphi' = a(1-e^2) [A_0 \varphi' + A_2 \sin^2 \varphi' + A_4 \sin^4 \varphi' + \dots] \quad (4)$$

sendo a , o semi-eixo maior do elipsóide e A_0, A_2, A_4 etc. ..., constantes dependentes, exclusivamente, da primeira excentricidade do mesmo elipsóide (e).

Em termos práticos, $B\varphi'$ pode-se ser obtido com suficiente aproximação utilizando-se apenas os 4 primeiros termos (até $A_6 \text{ sen}^6 \varphi'$).

$$A_0 = \left[1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11.025}{16.384} e^8 + \frac{43.659}{65.536} e^{10} + \dots \right] \quad (5)$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2.205}{2.048} e^8 + \frac{72.765}{65.536} e^{10} + \dots \right] \quad (6)$$

$$A_4 = \frac{1}{4} \left[\frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2.205}{4.096} e^8 + \frac{10.395}{16.384} e^{10} + \dots \right] \quad (7)$$

$$A_6 = -\frac{1}{6} \left[\frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8 + \frac{31.185}{131.072} e^{10} + \dots \right] \quad (8)$$

$$A_8 = \frac{1}{8} \left[\frac{315}{16.384} e^8 + \frac{3.465}{65.536} e^{10} + \dots \right] \quad (9)$$

$$A_{10} = -\frac{1}{10} \left[\frac{693}{131.072} e^{10} + \dots \right] \quad (10)$$

Existem tabelas relacionando valores de latitudes aos correspondentes arcos de meridiano contados até o Equador. O Army Map Service, através de seus manuais técnicos, publicou as referidas tabelas, para diversos elipsóides, entre os quais, o Nacional Australiano, muito semelhante ao UGGI-67, usado no Brasil, o Internacional de Hayford, o de Everest, o de Bessel e os de Clarke de 1866 e 1880.

O inconveniente do uso deste método é, justamente, a necessidade de se gerar tabelas grandes e volumosas, tornando-as pouco práticas para o manuseio diário.

São pouco utilizadas hoje em dia, quase que apenas com fins didáticos.

Outro processo de determinação da latitude φ' é por processo iterativo com auxílio de (4), e descrito em [6].

Para valor de inicialização, torna-se

$$\varphi'_1 = \frac{B\varphi'}{aA_0(1-e^2)} = \frac{N'\varphi}{aA_0(1-e^2)} \quad (11)$$

São então calculados;

$$\Delta N'_i = N'\varphi - B\varphi'_i \quad (12)$$

$$\Delta\varphi'_i = \frac{\Delta N'_i}{aA_0(1-e^2)} \quad (13)$$

$$\varphi'_i{}^{+1} = \varphi'_i - \Delta\varphi'_i \quad (14)$$

até que $|\Delta\varphi'_i| < \epsilon$, sendo ϵ definido em função da precisão requerida na transformação.

Outro processo para se chegar as transformações é pelo método de aproximações sucessivas, descrito em [7] e [8].

A metodologia a seguir apresentada propõe uma alternativa na determinação da latitude φ' com uma rápida convergência do valor.

Considere-se uma esfera auxiliar, tangente ao elipsóide no Equador e, conseqüentemente, de raio igual ao semi-eixo maior do elipsóide. (Esfera de Jacobi).

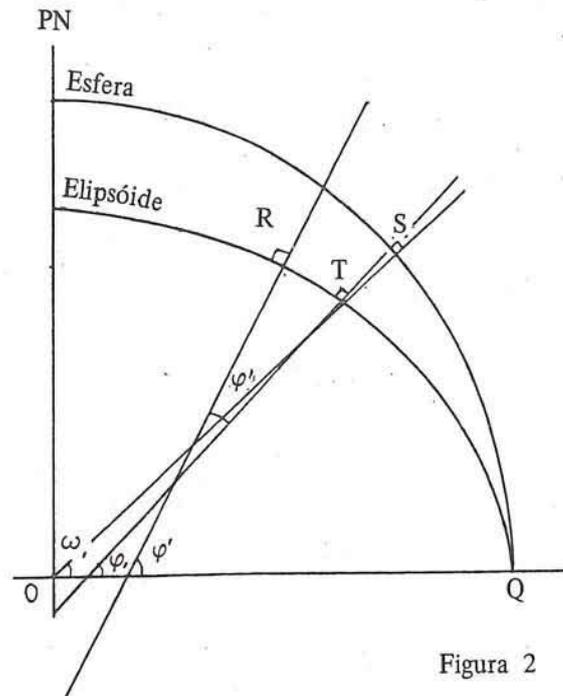


Figura 2

A figura nº 2 representa, esquematicamente, a seção do meridiano central no elipsóide e sua correspondente na esfera.

$\overline{OQ} = a =$ semi-eixo maior = raio da esfera

R é um ponto do elipsóide, que possui latitude φ' , logo, o comprimento do arco \widehat{QR} pode ser escrito como:

$$\widehat{QR} = B\varphi' = N'\varphi \quad (15)$$

Considere-se, agora, sobre a esfera, o arco de círculo \widehat{QS} , cujo comprimento é igual ao arco de elipse \widehat{QR}

$$\widehat{QS} = \widehat{QR} \quad (16)$$

Pela figura nº 2, nota-se que o raio vetor \overline{OS} intercepta a elipse meridiana no ponto T, que por sua vez possui latitude geodésica φ_1 .

Ao arco \widehat{QS} , está associado o ângulo central ω_1 , o qual corresponde também à latitude geocêntrica do ponto T. Este valor fica determinado por:

$$\omega_1 = \frac{\widehat{QS}}{OQ} = \frac{N'\varphi}{a} \quad (17)$$

Para o relacionamento entre as latitudes geodésica e

geocêntrica tem-se: (obs – a demonstração pode ser encontrada em [2]).

$$(1-e^2) \tan \varphi_1 = \tan \omega_1 \quad (18)$$

Apenas estes artifícios não resolvem o problema pois necessita-se do valor de φ' e não de φ_1 .

Da figura nº 2 pode-se visualizar que

$$\varphi' = \varphi_1 + \delta\varphi_1 \quad (19)$$

Devido a grande proximidade entre as superfícies do elipsóide e da esfera, as latitudes φ' e φ_1 , são muito próximas. Pode-se, desta forma, considerar o arco de elipse RT como esférico. O raio de curvatura neste pequeno segmento poderá ser considerado igual ao raio de curvatura da seção meridiana para o ponto de latitude média φ_m onde:

$$\varphi_m = \frac{\varphi' + \varphi_1}{2} = \frac{\varphi_1 + \delta\varphi_1 + \varphi_1}{2} = \varphi_1 + \frac{\delta\varphi_1}{2} \quad (20)$$

O valor de $\delta\varphi_1$ cresce à medida que aumenta o valor da latitude pois haverá cada vez mais um distanciamento entre as superfícies da esfera e do elipsóide, aumentando desta forma o arco \widehat{RT} .

Através de uma análise do quadro nº 1 tem-se noção da variação de $\delta\varphi_1$ com a latitude. Pode-se então adotar, como aproximação, para valores até 35° , no lugar de φ_m , o próprio valor de φ_1 .

Então:

$$\delta\varphi_1 = \frac{\widehat{RT}}{M\varphi_1} \quad (21)$$

sendo $M\varphi_1$, o raio de curvatura da seção meridiana para a latitude φ_1 e \widehat{RT} , dado pela diferença entre os arcos de meridiano para as latitudes φ' e φ_1 . O Primeiro é conhecido e o segundo pode ser calculado pela expressão (4).

$$\delta\varphi_1 = \frac{B\varphi' - B\varphi_1}{M\varphi_1} = \frac{N\varphi' - B\varphi_1}{M\varphi_1} \quad (22)$$

Com o resultado de (22) aplicado em (19) chega-se finalmente ao valor de φ' .

Para valores de latitude acima de 35° , esta aproximação não atinge precisão compatível, sendo necessário um refinamento no cálculo de $\delta\varphi$. Uma segunda iteração no entanto garante o resultado final.

Deve-se então com o valor de $\delta\varphi$, calculado em (22), obter em (20) o de φ_m . $\delta\varphi_2$ será obtido através da expressão (21) substituído $M\varphi_1$, por $M\varphi_m$.

$$\varphi' = \varphi_1 + \delta\varphi_2 \quad (23)$$

São apresentados a seguir os testes de comparação entre os 3 métodos descritos.

– Para o método iterativo clássico, foram arbitrados 4 valores para ϵ .

– Para o método proposto são apresentados os resultados para $\delta\varphi_1$ e $\delta\varphi_2$.

– Para o cálculo mediante tabelas, foi usada a publicação [5].

Os testes foram levados a efeito da seguinte forma:

Inicialmente arbitrou-se 15 valores para arcos de meridiano, compreendidos entre o Equador e latitudes que cobrissem até, aproximadamente 70° (limite de aplicação do Sistema UTM) espaçados em média de 500.000 metros gerando variações em torno de 4° a 5° de latitude. O elipsóide adotado foi o Internacional de Referência.

Posteriormente, foram intercalados valores para melhor definição do limite de aplicação de $\delta\varphi_1$. A variação no arco de meridiano foi estabelecida, em média, como sendo 160.000 m. O total de pontos inseridos foi de 11 entre as latitudes 25° e 42° .

A seqüência de cálculos foi: Partindo do comprimento de arco de meridiano, determina-se pelos diversos métodos a latitude φ' correspondente e desta retorna-se com auxílio da fórmula (4) para comparação com o valor de partida.

Para cada ponto apresentado no quadro nº 2 a disposição dos resultados é a seguinte:

As quatro primeiras linhas se referem ao método iterativo com ϵ igual a $1 \cdot 10^{-9}$, $1 \cdot 10^{-7}$, $1 \cdot 10^{-5}$ e $1 \cdot 10^{-3}$ respectivamente.

As linhas 5 e 6, correspondem ao método proposto para $\delta\varphi_1$ e $\delta\varphi_2$ respectivamente.

A última linha foi reservada para os resultados obtidos por tabelas e interpolações.

Na primeira coluna consta o nº de iterações necessárias à convergência da latitude, no método iterativo; a segunda para o valor da latitude em grau decimal e finalmente o comprimento do arco de meridiano correspondente à latitude encontrada na coluna 2.

Quadro nº 1

φ_1	φ'	$\delta\varphi_1$
$4^\circ,104371390$	$4^\circ,104394647$	$0^\circ,000023257$
$8^\circ,876587654$	$8^\circ,876822067$	$0,000234413$
$12^\circ,45599387$	$12^\circ,45663869$	$0,000644820$
$15^\circ,56821285$	$15^\circ,56946538$	$0,001252530$
$22^\circ,84933918$	$22^\circ,85323444$	$0,003895260$
$27^\circ,42702686$	$27^\circ,43367272$	$0,006645860$
$32^\circ,75642361$	$32^\circ,76753241$	$0,011108800$
$37^\circ,15234810$	$37^\circ,16826386$	$0,015915760$
$42^\circ,52063482$	$42^\circ,54389619$	$0,023261370$
$47^\circ,06792474$	$47^\circ,09871952$	$0,030794780$
$52^\circ,62904042$	$52^\circ,67068937$	$0,041648950$
$56^\circ,37799525$	$56^\circ,42795663$	$0,049961380$
$61^\circ,73143619$	$61^\circ,79458264$	$0,063146450$
$66^\circ,14977856$	$66^\circ,22488073$	$0,075102170$

Quadro n.º 2

Pto n.º 1 B = 453.853,2203 m			Pto. n.º 5 B = 2.528.317,325			
	1	2	3			
1	6	4º,104394647	453.853,2202	5	22º,85323444	2.528.317,325
2	5	94648	853,2204	5	23444	317,325
3	4	94645	853,2200	4	23444	317,325
4	3	94132	853,1633	3	23314	317,181
5	1	94647	853,2202	1	23444	317,325
6	2	94647	853,2202	2	23444	317,325
7	—	94647	853,2202	—	23444	317,325
Pto n.º 2 B = 981.637,6681 m			Pto. n.º 6 B = 2.944.971,744			
	21	8º,876822067	981.637,6683	5	26º,61463001	2.944.971,744
	5	22069	637,6683	5	63001	971,744
	4	22059	637,6670	4	63001	971,744
	3	21046	637,5555	3	62894	971,625
	1	22067	637,6683	1	63002	971,744
	2	22067	637,6683	2	63002	971,744
	—	22072	637,6689	—	63003	971,746
Pto. n.º 3 B = 1.377.615,609 m			Pto. n.º 7 B = 3.035.726,663			
	5	12º,45663869	1.377.615,609	5	27º,43367272	3.035.726,663
	5	63869	615,609	5	67272	726,663
	4	63869	615,609	4	67272	726,663
	3	63741	615,467	3	67172	726,552
	1	63870	615,609	1	67273	726,664
	2	63870	615,609	2	67272	726,663
	—	63867	615,606	—	67272	726,663
Pto. n.º 4 B = 1.722.022,277 m			Pto. n.º 8 B = 3.106.112,843			
	5	15º,56946538	1.722.022,277	24	28º,06882569	3.106.112,844
	5	46538	022,277	5	82569	112,844
	4	46538	022,277	4	82568	112,842
	3	46399	022,123	3	82473	112,737
	1	46538	022,277	1	82569	112,844
	2	46538	022,277	2	82569	112,844
	—	46539	022,277	—	82567	112,841

Quadro nº 2

Pto. nº 9			Pto. nº 13		
B = 3.267.253,943			B = 3.750.677,241		
6	29º, 52271200	3.267.253,943	6	33º,88241837	3.750.677,241
5	71200	253,943	5	41837	677,241
4	71199	253,942	4	41836	677,240
3	71115	253,850	3	41787	677,186
1	71200	253,943	1	41838	677,242
2	71199	253,942	2	41837	677,241
—	71200	253,943	—	41836	677,240

Pto. nº 10			Pto. nº 14		
B = 3.428.395,042 m			B = 3.911.818,340		
6	30º, 97627886	3.428.395,042	6	35º,33497517	3.911.818,340
5	27886	395,042	5	97517	818,340
4	27885	395,041	4	97518	818,341
3	27813	394,962	3	97478	818,296
1	27887	395,044	1	97519	818,343
2	27886	395,042	2	97517	818,340
—	27886	395,042	—	97517	818,340

Pto. nº 11			Pto. nº 15		
B = 3.589.536,141 m			B = 4.072.959,440		
5	32º,42951710	3.589.536,141	24	36º,78718095	4.072.959,441
5	51710	536,141	5	18095	959,441
4	51710	536,141	4	18094	959,439
3	51649	536,073	3	18065	959,408
1	51711	536,142	1	18096	959,442
2	51710	536,141	2	18094	959,439
—	51711	536,142	—	18094	959,439

Pto. nº 12			Pto. nº 16		
B = 3.627.022,009 m			B = 4.115.252,076		
6	32º,76753241	3.627.022,009	5	37º,16826386	4.115.252,076
5	53241	022,009	5	26386	252,076
4	53240	022,008	4	26386	252,076
3	53182	021,944	3	26359	252,046
1	53242	022,010	1	26388	252,078
2	53241	022,009	2	26386	252,076
—	53242	022,010	—	26386	252,076

Quadro nº 2

Pto. nº 17			Pto. nº 22		
	B = 4.234.100,539			B = 5.838.096,266	
5	38º,23902999	4.234.100,539	6	52º,67068937	5.838.096,266
5	02999	100,539	5	68937	096,266
4	02999	100,539	4	68936	096,265
3	02979	100,517	3	68912	096,239
1	03001	100,541	1	68950	096,282
2	02999	100,539	2	68936	096,265
—	03000	100,540	—	68936	096,265
Pto. nº 18			Pto. nº 23		
	B = 4.395.241,639			B = 6.256.353,143	
5	39º,69051758	4.395.241,639	21	56º,42795662	6.256.353,142
5	51758	241,639	5	95663	353,144
4	51758	241,639	4	95662	353,142
3	51746	241,626	3	95611	353,086
1	51762	241,643	1	95683	353,166
2	51759	241,640	2	95663	353,144
—	51758	241,639	—	95661	353,141
Pto. nº 19			Pto. nº 24		
	B = 4.556.382,738			B = 6.854.202,270	
5	41º,14163989	4.556.382,738	6	61º,79458265	6.854.202,670
4	63989	382,738	5	58265	202,670
4	63989	382,738	4	58270	202,676
3	63982	382,730	3	58173	202,562
1	63993	382,742	1	58293	202,702
2	63989	382,738	2	58264	202,670
—	63989	382,738	—	58264	202,670
Pto. nº 20			Pto. nº 25		
	B = 4.712.136,323			B = 7.348.102,077	
6	42º,54389619	4.712.136,323	22	66º,22488074	7.348.102,081
4	89620	136,324	5	88072	102,075
4	89620	136,324	4	88070	102,075
3	89616	136,319	3	87949	101,942
1	89624	136,328	1	88114	102,126
2	89619	136,323	2	88077	102,081
—	89619	136,323	—	88075	102,081
Pto. nº 21			Pto. nº 25		
	B = 5.218.322,280			B = 7.348.102,077	
25	47º,09871952	5.218.322,281	22	66º,22488074	7.348.102,081
4	71952	322,281	5	88072	102,075
4	71952	322,281	4	88070	102,075
3	71950	322,278	3	87949	101,942
1	71960	322,290	1	88114	102,126
2	71952	322,281	2	88077	102,081
—	71950	322,278	—	88075	102,081

Quadro nº 3

Pto.	E-9	E-7	E-5	E-3	1	2	T	
1	-0,0001	+0,0001	-0,0003	-0,0570	-0,0001	-0,0001	-0,0001	
2	+0,0002	+0,0002	-0,0011	-0,1126	+0,0002	+0,0002	+0,0008	
3	-	-	-	-0,142	-	-	-0,003	
4	-	-	-	-0,154	-	-	-	
5	-	-	-	-0,144	-	-	-	
6	-	-	-	-0,119	-	-	+0,002	
7	-	-	-	-0,111	+0,001	-	-	
8	+0,001	+0,001	-0,001	-0,106	+0,001	+0,001	-0,003	
9	-	-	-0,001	-0,093	-	-0,001	-	
10	-	-	-0,001	-0,080	+0,002	-	-	
11	-	-	-	-0,068	+0,001	-	± 0,001	
12	-	-	-0,001	-0,065	+0,001	-	+0,001	
13	-	-	-0,001	-0,055	+0,001	-	-0,001	
14	-	-	+0,001	-0,044	+0,002	-	-	
15	+0,001	+0,001	-0,001	-0,032	+0,002	-0,001	-0,001	
16	-	-	-	-0,030	+0,002	-	-	
17	-	-	-	-0,022	+0,002	-	+0,001	
18	-	-	-	-0,013	+0,004	+0,001	-	
19	-	-	-	-0,008	+0,004	-	-	
20	-	+0,001	+0,001	-0,004	+0,005	-	-	
21	+0,001	+0,001	+0,001	-0,002	+0,010	+0,001	-0,002	
22	-	-	-0,001	-0,027	+0,016	-0,001	-0,001	
23	-0,001	+0,001	-0,001	-0,057	+0,023	+0,001	-0,002	
24	-	-	+0,006	-0,108	+0,032	-	-	
25	+0,004	-0,002	-0,002	-0,135	+0,049	+0,004	+0,004	
$\sqrt{\frac{[v v]}{n-1}}$	0,000914	0,000614	0,001476	0,087476	0,013528	0,000980	0,001481	Todos
	0,000296	0,000296	0,000725	0,109994	0,000868	0,000413	0,001462	Até pto. 13

Conclusões

No método iterativo, um valor de ϵ muito pequeno (10^{-9}) mostrou-se inadequado devido a não convergência de cerca de 25% dos valores — pto. com mais de 20 iterações foram interrompidos após 3 minutos de processamento com resíduos sempre superiores ao valor de ϵ . Por outro lado, para que houvesse rápida convergência, ao se arbitrar ϵ igual a $1 \cdot 10^{-3}$, os resultados mostraram-se incompatíveis com a determinação. Para os valores intermediários de ϵ ambos atenderam as finalidades sendo que para $1 \cdot 10^{-5}$ a convergência se deu sempre com 4 iterações e conseqüentemente menor tempo.

Os testes foram levados a efeito em máquina de calcular modelo HP-41 CV e o tempo médio de processamento foi determinado em 4 a 5 segundos por iteração.

Para o método proposto, a utilização apenas de $\delta\varphi_1$, de forma generalizada, mostrou-se realmente incompatível. Pode-se observar o crescimento acelerado dos resíduos, a partir do ponto 13. Quando limita-se o campo de utilização, a validade fica comprovada. Uma vez que o território brasileiro está totalmente incluído nesta faixa, pode ser usado com a vantagem de gastar menos tempo de processamento. (9 segundos contra 17 para as 4 iterações) A determinação

realizada com $\delta\varphi_2$ mostrou-se plenamente satisfatória para as finalidades a que se destina, com demora no processamento, de 11 a 12 segundos.

O cálculo pelas tabelas foi incluído apenas por ser um método conhecido podendo servir como parâmetro de avaliação dos demais.

Bibliografia

- [1] The Australian Map Grid, Special Publication nº 7, National Mapping Council of Australia, 1972.
- [2] Zakatov, P.S., Curso de Geodésia Superior, Editorial MIR, 1981.
- [3] Technical Manual TM 5-241-8, Department of Army, U.S.A. War Office, 1958.
- [4] Richardus, P. E. Adler, R. K., Map Projections, North-Holland Publishing Company, 1974.
- [5] Tables de l'Ellipsoïde de Reference International, Seção de Geodésia da União Geodésica e Geofísica Internacional, Publicação especial nº 2, 1924.
- [6] Krukosky, W. R.M., Notas de Aula
- [7] Destri, A. R., Notas de Aula
- [8] Chagas, C. B., Teoria e prática do Sistema UTM da projeção conforme de Gauss, Publicação Especial da DSG, 1959.