

DETERMINAÇÃO SIMULTÂNEA DE PARÂMETROS DE TRANSFORMAÇÃO ENTRE REFERENCIAIS GEODÉSICOS E DE DESNÍVEIS GEOIDAIS

JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE

AGRADECIMENTOS

Quero externar aqui o meu profundo agradecimento aos colegas que leram e fizeram seus comentários sobre este trabalho — Professor Dr. Camil Gemael e o Engenheiro Ziocélito José Bardani.

Ao Engenheiro Cartógrafo Rafael March, que está envolvido em pesquisas neste campo para a sua tese de mestrado, e do qual tenho a honra de ser orientador, manifesto a minha gratidão pelas horas agradáveis que desfrutamos discutindo o problema que é objeto deste trabalho.

O Engenheiro Cartógrafo Osvaldo Ari Abib e o Mestre em Ciências Jacaono Batista Lima colocaram em minhas mãos, num prazo de tempo muito curto, os dados com os quais pude testar o modelo de transformação de referenciais aqui proposto. A ambos o meu reconhecimento e gratidão.

Agradeço à Universidade Federal do Paraná que através do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas do Departamento de Geociências e do Centro de Computação Eletrônica proveu os meios, em termos de infra-estrutura para que a realização desta pesquisa se concretizasse.

José Bittencourt de Andrade

RESUMO

Este trabalho visa demonstrar a viabilidade da determinação simultânea de parâmetros de transformação entre referenciais geodésicos e de desníveis geoidais, através do modelo matemático aqui proposto.

Experiências foram realizadas, com dados da rede brasileira de triangulação em pontos onde a Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, através da sua Diretoria de Geodésia e Cartografia, determinou coordenadas por rastreamento de satélites artificiais do NNSS. Os resultados mostraram um ótimo comportamento do modelo proposto, quer com dados simulados, quer com os dados

reais, na recuperação dos parâmetros de transformação e dos desníveis geoidais nos pontos envolvidos.

Nenhuma tentativa foi realizada no sentido de recuperar parâmetros de escala ou de rotação em virtude da precisão dos dados disponíveis não ser suficiente para esse fim.

1. INTRODUÇÃO

Não é necessário enfatizar a importância da determinação de desníveis geoidais, visto que os cálculos de transporte de coordenadas nas triangulações geodésicas são feitos sobre a superfície do elipsóide constituinte do sistema geodésico adotado. Com a adoção, em larga escala, de rastreadores de satélites artificiais para posicionamento por métodos orbitais, a determinação do geóide assumiu importância ainda maior. Do rastreamento de satélites artificiais obtém-se coordenadas cartesianas tridimensionais, cujo terno é aquele adotado para determinar a órbita dos satélites envolvidos. A transformação das coordenadas assim obtidas para o sistema geodésico adotado envolve o valor do desnível geoidal quando é desejável o conhecimento da "altitude ortométrica".

Estes problemas têm preocupado muito os geodestas de todo o mundo e, em particular, os brasileiros que têm a enorme ansiedade de colocar o sistema geodésico brasileiro adotado — South American Datum-69 (SAD-69) em condições de conhecimento compatível com o grau de exatidão hoje disponível.

Este trabalho visa demonstrar a viabilidade da determinação simultânea da transformação de coordenadas entre dois referenciais geodésicos e de desníveis geoidais, através do modelo matemático aqui proposto.

2. REFERENCIAIS

Um referencial pode ser *definido* ou *arbitrado*. (Andrade, 1983). Ambos devem ser *realizados* para uso prático. A *definição* de um referencial envolve a fixação teórica

do mesmo no espaço. Trata-se de um conceito muito abstrato. Os referenciais astronômicos e geodésicos são definidos.

A realização de um referencial exige observações exatas, a fim de determinar numericamente os seus parâmetros. Um referencial realizado deve se aproximar ao máximo do correspondente definido. Portanto, a realização de um referencial pode ser aprimorada sempre que a qualidade das observações aumente.

Um referencial *arbitrado*, por sua vez, coincide com a sua realização.

3. MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO

Em vista dos conceitos aqui emitidos sobre referenciais, cabe uma breve discussão, na ordem filosófica, sobre os modelos de transformação entre referenciais.

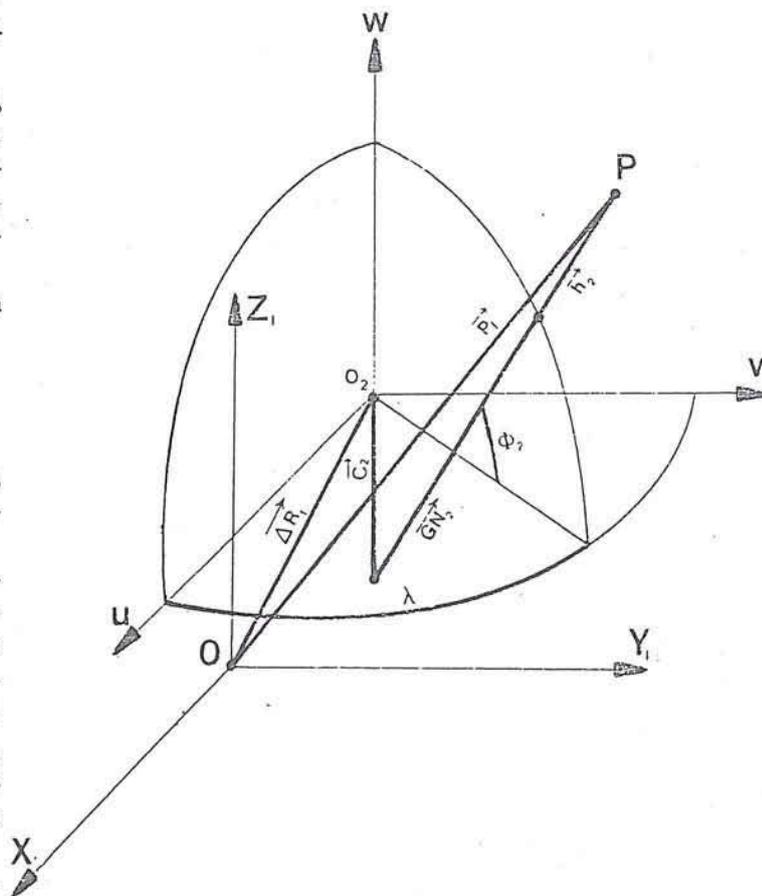
É possível estabelecer um modelo matemático de transformação entre referenciais definidos e depois adicionar parâmetros a fim de adaptar esse modelo à transformação entre referenciais realizados. Neste caso, os parâmetros adicionados só terão valor até o momento em que as realizações dos referenciais envolvidos melhorem. Não é possível, contudo, aprimorar a realização de um referencial através da determinação de parâmetros adicionados, a não ser que o outro tenha a sua realização perfeita.

Parece, portanto, que os problemas de transformação entre referenciais e o aperfeiçoamento de suas realizações devem, geralmente, ser tratados por procedimentos distintos. Desta forma, do ponto de vista prático, interessa ao geodesta determinar a transformação entre referenciais realizados. Essa abordagem, como foi visto, envolve maior parametrização dos modelos de transformação. Maior parametrização significa melhor discriminação. Portanto, maior parametrização exige um grau de exatidão das observações compatível com a discriminação desejada. Isso torna claro que a adoção de um modelo de transformação deve resultar de uma análise dos aspectos supradescritos, além daqueles concernentes à rigidez geométrica necessária para bem condicionar o sistema de equações a ser resolvido. Essas análises serão feitas no item seguinte.

4. O MODELO MATEMÁTICO

VEIS (1960), BURSA (1962), MOLODENSKIJ ET AL (1962) propuseram modelos matemáticos para transformação de coordenadas que consistem em variações do seguinte: Veja VANIČEK (1975) e GEMAEL (1981) para maiores detalhes.

$$k' \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} XO' \\ YO' \\ ZO' \end{bmatrix} = kR(\omega, \psi, \epsilon) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (1)$$



Tais variações consistem:

- 1) na seleção do ponto de rotação do sistema geodésico; e
- 2) na interpretação do papel do fator de escala no sistema geodésico.

O modelo matemático aqui proposto difere dos anteriores principalmente pela introdução do desnível geoidal como parâmetro a ser determinado:

Da figura 1,

$$P_1 = \Delta R_1 - C_2 + GN_2 + h_2, \text{ mas} \quad (2)$$

$$h_2 = N_2 + H_2, \text{ donde} \quad (3)$$

$$P_1 = \Delta R_1 - C_2 + GN_2 + N_2 + H_2, \text{ onde} \quad (4)$$

P_1 = vetor de posição do ponto P no sistema (1) (X_1, Y_1, Z_1);

ΔR_1 = vetor de posição da origem do sistema (2) – (local), em (1);

$C_2 = e_2^2 \cdot \text{sen } \phi_2 \cdot GN_2$, sendo:

e_2^2 = segunda excentricidade do elipsóide local em (2);

ϕ_2 = latitude geodésica de P em (2);

GN_2 = grande normal em (2);

h_2 = altitude geométrica de P em (2);

H_2 = "altitude ortométrica" de P em (2);

N_2 = desnível geoidal em P no sistema (2).

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ GN \cdot e_2^2 \cdot \text{sen } \phi_2 \end{bmatrix} + (GN_2 + N_2 + H_2) \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \cdot \cos \lambda_2 \\ \cos \phi_2 \cdot \text{sen } \lambda_2 \\ \text{sen } \phi_2 \end{bmatrix}$$

λ_2 = longitude geodésica de P em (2). (5)

As incógnitas aqui são ΔX , ΔY , ΔZ e N_2 .

Este modelo está conforme a transformação entre referenciais geodésicos definidos.

Entre os sistemas realizados a transformação pode incluir mais parâmetros, tais como escalas, k_1 e k_2 e rotações ω , ψ e ϵ :

$$k_1 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + k_2 R(\omega, \psi, \epsilon) \left\{ (GN_2 + N_2 + H_2) \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \cos \lambda_2 \\ \cos \phi_2 \text{sen } \lambda_2 \\ \text{sen } \phi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ GN_2 e_2^2 \text{sen } \phi_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (6)$$

Geralmente os fatores de escala k_1 e k_2 podem ser agrupados num único parâmetro $k = k_2/k_1$, resultando:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + k R(\omega, \psi, \epsilon) \left\{ (GN_2 + H_2 + N_2) \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \cos \lambda_2 \\ \cos \phi_2 \text{sen } \lambda_2 \\ \text{sen } \phi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ GN_2 e_2^2 \text{sen } \phi_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (7)$$

O fator de escala k resulta da relação entre as medidas que realizaram as escalas k_1 e k_2 nos referenciais envolvidos. A sua determinação (de k) exige, portanto observações de qualidade superior àquelas feitas para realizar k_1 e k_2 . Por outro lado, na equação (7) aparecem outras grandezas lineares, com o seu fator de escala próprio: H_2 e N_2 , quando são grandezas já conhecidas.

No caso do Brasil, os valores de desníveis geoidais têm um grau de exatidão bem inferior ao de H e mesmo ao das bases medidas para dar escala ao referencial. Isso significa que, se k for incluído como incógnita no modelo e retirando-se N_2 de cartas geoidais, o fator de escala refletirá muito mais as incertezas das altitudes geoidais do que a relação de escalas $k = k_2/k_1$, entre os referenciais envolvidos, compensando-as parcialmente. Tomando-se pontos distantes da rede de triangulação geodésica brasileira, como BRAGANÇA no Estado do Pará e CANOAS no Rio Grande do Sul, pode-se determinar sua distância, a partir de coordenadas obtidas via rastreamento de satélites do sistema NNSS com precisão da ordem de $1,0 \times 10^{-6}$ o que não supera a precisão com que se medem as bases atualmente. Por isso é recomendável adotar um fator de escala fixo $k=1$ e calcular N_2 .

A orientação de um referencial geodésico depende da determinação das componentes do desvio da vertical e do azimute de Laplace. Para o mesmo exemplo anterior a determinação de um azimute teria uma precisão da ordem de $0,3''$. Portanto, a adoção de parâmetros de rotação, no caso, absorverão as incertezas das observações que são maiores do que as rotações esperadas.

Pelos motivos expostos, adotamos o modelo expresso pelas equações (5), tomando como incógnitas as coordenadas do centro do SAD-69 para os pontos envolvidos na determinação da transformação.

5. EXPERIÊNCIAS

Visando a verificação do modelo matemático quanto ao seu poder na recuperação de parâmetros foi realizado um teste com dados simulados e as equações (5) foram utilizadas.

O quadro nº 1 mostra os dados e os resultados. Não foi introduzido nenhum erro nos dados simulados e por isso os resíduos são o resultado apenas de arredondamento. Como pode-se ver, a recuperação dos parâmetros foi perfeita.

O segundo teste foi realizado com dados reais, gentilmente cedidos pelo Eng^o Militar Oswaldo Ari Abib, que por sua vez os obteve da Fundação IBGE e com os quais determinou os parâmetros de transformação do modelo de Bursa em quatro diferentes graus de parametrização (ABIB (1978):

- 1) só translação: $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$;
- 2) translação e escala: $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, k$;
- 3) translação e rotação: $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \omega, \psi, \epsilon$;
- 4) translação, rotação e escala: $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \omega, \psi, \epsilon, k$.

Mais tarde Abib refez seus cálculos utilizando dados melhores e um número maior de pontos — 21 ao invés dos 13 anteriores.

Os dados aqui utilizados são aqueles com os quais Abib refez seus cálculos. Veja quadro nº 2:

KRUKOSKI (1974) apresentou os valores das coordenadas da origem do SAD-69 em relação ao NWL-8D, adotando o modelo de MOLODENSKIJ, KADLEC e GOMES (1978), da Fundação IBGE, também realizaram os mesmos cálculos, por outros processos.

A figura nº 2 mostra a distribuição dos pontos utilizados.

O quadro nº 3 mostra os resultados com todos os pontos.

O quadro nº 4 mostra os resultados da mesma experiência, eliminando os pontos 1,7, 10 e 12 que apresentaram resíduos altos.

Quadro nº 1 – Simulação

DADOS SIMULADOS				
a_2 (m)	e_2^2	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)
6300025,0	0,007	-80,0	-60,0	-50,0

PONTO	X_{ϕ} (m)	y (m) λ	Z (m) N_2 H (m) (m ²)
1	3702367,267 390 59' 59"15	3106655,008 390 59' 59"77	4027062,078 103,67 10.
2	4185594,921 390 59' 59"16	2416554,354 300 00' 00"51	4027071,719 113,23 15.
3	4729192,309 290 59' 59"79	2730400,453 300 00' 00"45	3130725,554 136,00 20.
4	4394827,160 440 59' 59"09	774926,604 100 00' 02"09	4431386,329 93,48 30.

RESULTADOS	
PONTO	N_2 (m)
1	10,04
2	15,05
3	20,05
4	30,04

$\Delta X = -80,043$ m
$\Delta Y = -60,017$ m
$\Delta Z = -50,012$ m

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os pontos 1, 7, 10 e 12 mostraram resíduos muito altos – fato já verificado no trabalho de ABIB (1978 – revisado). Não obstante, os desníveis geoidais apresentam ótima concordância com a Carta Geoidal do IBGE.

A eliminação desses pontos trouxe melhoria dos resultados, como era esperado, caindo as incertezas na determinação das coordenadas da origem do SAD-69 em relação ao WGS-72 de $\sigma_{x_0} = 2,4$ m; $\sigma_{y_0} = 2,5$ m; $\sigma_{z_0} = 1,0$ m e $\sigma_{N_2} = 3,8$ m para: $\sigma_{x_0} = 1,7$ m; $\sigma_{y_0} = 1,7$ m; $\sigma_{z_0} = 0,7$ m e $\sigma_{N_2} = 2,9$ m, assim como todos os resíduos diminuíram drasticamente, caindo de 6,76 para 3,30 metros em valor absoluto os máximos.

7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Como ficou demonstrado, a determinação simultânea das coordenadas do centro do elipsóide local (SAD-69) em relação ao sistema de coordenadas de satélite (WGS-72) pode ser feita com alta precisão, fornecendo subsídios para a construção da carta geoidal no Brasil em relação ao SAD-69.

Nas regiões da Amazônia, onde a rede de triangulação não alcança, mas a rede de nivelamento geométrico já chegou, o mesmo modelo aqui demonstrado permite o cálculo

QUADRO Nº 2 – Dados Reais

Ponto	COORD. VIA SATÉLITE: X, Y, Z (WGS-72)			
	COORD. SAD-69: Φ, λ, H			
Madeiras	1	4280640,555 -22°43'47"77	-4039702,447 -43°20'26"31	-2449263,248 115,14
Vitória	2	4575124,851 -20°09'45"10	-3865804,270 -40°11'45"48	-2184662,149 20,66
Ilhéus	3	4787599,928 -14°46'50"28	-3889708,717 -39°05'30"33	-1616733,233 122,46
Campo Alegre	4	5060885,608 -09°46'13"32	-3729147,542 -36°23'03"74	-1075316,055 185,48
Mossoró	5	5052233,350 -05°13'03"91	-3849945,772 -37°18'28"50	-576226,050 46,48
Cemitério	6	4750872,172 -02°59'45"22	-4242641,354 -41°45'54"17	-115544,109 39,13
Bragança	7	4366787,306 -01°02'40"58	-4647450,820 -46°46'58"02	-115544,109 36,64
Grajaú	8	4398656,860 -05°48'30"80	-4573990,172 -46°07'08"02	-641270,845 232,36
Luzia	9	4145716,170 -09°55'24"15	-4722140,302 -48°43'06"59	-1092027,240 424,69
Vila Oeste	10	3124865,881 -13°40'40"62	-5353878,364 -59°43'43"90	-1498596,852 673,79
Professor Miguel	11	3278652,665 -16°04'28"22	-5180074,368 -57°40'05"65	-1754741,850 119,51
Indubrasil	12	3446854,331 -20°29'01"41	-4884008,261 -54°47'13"73	-2218158,319 528,41
Canoas	13	3464572,701 -29°52'52"12	-4316379,250 -51°14'48"48	-3159017,034 1,56
Bocaiuva do Sul	14	3780985,144 -25°13'04"85	-4364797,155 -49°05'55"59	-2701446,728 1041,61
Olhos D'Água	15	4033873,208 -21°55'50"34	-4332958,276 -47°02'48"02	-2367617,402 716,37
Várzea da Palma	16	4324898,527 -17°33'11"10	-4278324,307 -44°41'21"38	-1911492,342 503,57
Fazenda Lagoa	17	3947699,145 -18°14'07"55	-4598476,920 -49°21'14"40	-1983456,101 793,14
Fazendinha	18	3760736,211 -16°02'55"19	-4842762,914 -52°10'03"45	-1752066,404 394,08
Uruaçu	19	4044198,814 -14°34'34"22	-4665959,959 -49°04'56"99	-1594949,404 543,77
Barreiras	20	4411356,924 -12°04'41"62	-4411323,526 -44°59'57"18	-1326075,730 737,36
Tanque Novo	21	4749955,942 -07°51'13"70	-4167706,655 -41°15'49"78	-865884,163 463,23

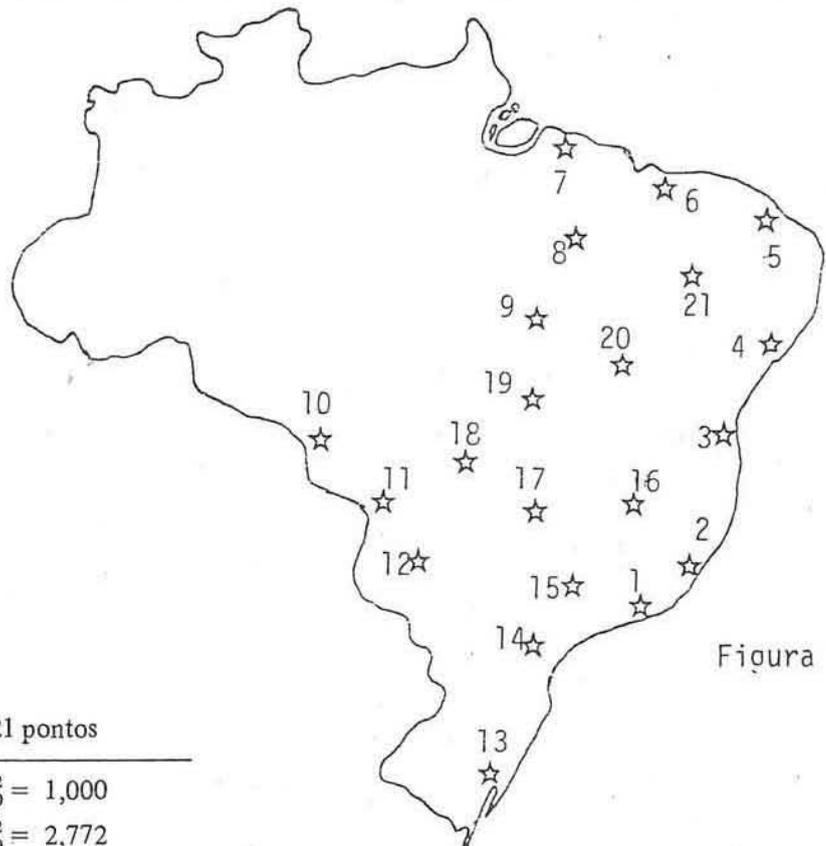


Figura 2.

QUADRO N°3. Resultado com 21 pontos

$X = -60,4 \text{ m} \pm 2,4 \text{ m}$	$\sigma_0^2 = 1,000$
$Y = -26,2 \text{ m} \pm 2,5 \text{ m}$	$\sigma_0^2 = 2,772$
$Z = -49,3 \text{ m} \pm 1,0 \text{ m}$ observações	$\sigma^2 = 2,5 \text{ m}^2$
	$\chi_c^2 = 108,$
$\sigma_{N_2} = 3,82 \text{ m}$	$\chi_t^2 = 55,; \alpha = 0,05$ (resíduos muito grandes)

Ponto	N_2	VX (m)	VY (m)	VZ (m)
1	5,34	4,69	6,76	-2,94
2	5,49	-0,31	-0,73	0,63
3	9,11	0,38	-0,34	1,92
4	17,27	0,47	0,07	1,95
5	19,77	-0,01	-0,10	0,58
6	8,02	1,78	1,97	0,24
7	-3,82	0,18	0,33	-6,40
8	-7,28	0,97	1,31	-2,65
9	-5,15	1,10	0,79	0,72
10	12,14	-3,74	-0,73	-5,17
11	8,28	-1,30	-0,56	-0,77
12	0,02	-1,29	-2,77	4,06
13	-2,04	-1,74	1,26	0,19
14	3,19	0,77	0,49	0,27
15	0,77	-1,22	-1,59	0,82
16	-0,61	-1,04	-2,00	2,11
17	-5,97	-0,41	-1,78	3,29
18	-0,90	-0,44	0,24	-1,59
19	-3,34	-2,77	-2,39	-0,02
20	0,85	0,58	0,19	1,27
21	8,12	-0,10	-0,42	1,49

QUADRO N°4. Resultado com 17 pontos

$X = -60,3 \text{ m} \pm 1,7 \text{ m}$	$\sigma_0^2 = 1,000$
$Y = -26,0 \text{ m} \pm 1,7 \text{ m}$	$\hat{\sigma}_0^2 = 1,011$
$Z = -50,0 \text{ m} \pm 0,7 \text{ m}$ observações	$\sigma^2 = 2,5 \text{ m}^2$
	$\chi_c^2 = 31,$
$\sigma_{N_2} = 2,9 \text{ m}$	$\chi_t^2 = 43,; \alpha = 0,5$

Ponto	N_2	VX (m)	VY (m)	VZ (m)
2	5,3	-0,38	0,48	0,05
3	9,0	0,34	-0,12	1,30
4	17,2	0,47	0,25	1,31
5	19,7	0,03	0,05	-0,07
6	8,0	1,85	2,10	-0,41
8	-7,3	1,02	1,45	-3,30
9	-5,2	1,12	0,97	0,08
11	8,2	-1,29	-0,34	-1,40
13	-2,3	1,66	1,58	-0,33
14	3,0	0,70	0,78	-0,28
15	0,6	-1,28	-1,32	0,24
16	-0,8	-1,08	-1,77	1,51
17	-6,1	-0,44	-1,54	2,68
18	-1,0	-0,45	0,46	-2,21
19	-3,4	-2,78	-2,18	-0,64
20	-0,8	0,58	0,39	0,63
21	8,1	-0,07	-0,26	0,84

do desnível geoidal, adotando-se as coordenadas do centro do elipsóide local (SAD-69) previamente determinadas.

Com o advento do NAVSTAR-GPS deslumbra-se a possibilidade da determinação do geóide com um grau de precisão surpreendentemente alto. A aquisição, por parte do IBGE de equipamento para posicionamento via GPS poderá melhorar substancialmente o conhecimento do geóide no Brasil e abrir novas fronteiras no que concerne à pesquisa visando o aprimoramento do sistema geodésico brasileiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABIB, O. A., (1978). Parâmetros para Transformação de Datum WGS-72/SAD-69. *Revista Brasileira de Cartografia* N^o 20, Rio de Janeiro.
- ANDRADE, J. B., (1983). "Pontos de Controle" . . . *Quantos?* XI CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA. Rio de Janeiro.
- BURSA, A. M., (1962). The theory of the Determination of the Nonparallellism of the Minor Axis of the Reference Ellipsoid,

Polar Axis of Inertia of the Earth, and Initial Astronomical and Geodetic Meridians from observations of Artificial Earth Satellites. *Studia Geoph. et Geod.* N^o 6.

- GEMAEL, C., (1981). Referenciais Cartesianos Utilizados em Geodésia. *Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas*. Departamento de Geociências. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.
- IBGE (1983). Mapa Geoidal do Brasil. *Trabalhos Técnicos – 1983*. Diretoria de Geodésia e Cartografia. Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE. Secretaria de Planejamento da Presidência da República.
- KADLEK, F. A. e GOMES, J. P., (1978). Cálculo de Parâmetros de transferências de Sistemas Geodésicos. *Revista Brasileira de Cartografia* N^o 22. Rio de Janeiro.
- KRUKOSKI, W. R. M., (1974). Transformação de Datum Geodésico. *Revista Brasileira de Cartografia* n^o 11. Rio de Janeiro.
- MOLODENSKIJ, M., V. YEREMEYEV e M. YURKINA, (1962). *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*, Israel Prog. for Sci. Transl., Jerusalém.
- VANICEK, P. (1975). Report on Geocentric and Geodetic Datums. Technical Report N^o 32, Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick. Fredericton N. B. Canadá.