Análise funcional e aplicações

Autores: Denizar Blitzkow e Nelsi Cogo de Sá

Resumo

O presente trabalho apresenta os principais conceitos e definições relativos à análise funcional. São definidos espaços métricos, espaços vetoriais, espaços de produto interno, espaços de Hilbert e espaços de Banach. Após as definições são apresentados exemplos elucidativos. A condição de mínimos quadrados é analisada do ponto de vista da análise funcional. Definem-se operadores e funcionais apresentando alguns exemplos de aplicação em geodésia. Finalmente é apresentado o teorema da projeção e o teorema de Gram-Schmidt.

1. Introdução

Conceituar exatamente a Análise Funcional constitui uma tarefa difícil. Trata-se de um ramo de matemática que abrange de maneira geral todas as propriedades válidas para um grande número de funções. |5|

Esclarecendo pode-se afirmar que a análise funcional e em particular os espaços de Hilbert têm grande importância em vários ramos da matemática aplicada tais como: problemas de valor de contorno para a resolução de equações diferenciais parciais elípticas e parabólicas, equações integrais, teoria da otimização, etc.

A teoria dos mínimos quadrados e alguns problemas práticos dentro da geodésia podem ser explicados com mais rigor através da análise funcional.

Assim sendo, no presente trabalho são apresentados os principais conceitos e definições acompanhados de exemplos que procuram explicar determinadas aplicações em geodésia.

2. Funções

Dados dois conjuntos A e B, uma **função** f de A em B consiste num subconjunto não vazio $D \subset A$, chamado domínio de f e numa relação que associa a cada elemento $a \in D$ um único elemento $b \in B$, normalmente representado por f(a). O conjunto de todos os elementos $b \in B$ associados a um ou mais elementos $a \in D$ é chamado contradomínio de f e representado por R. Nestas condições a função é indicada por:

$$f: D \rightarrow R$$

Se o domínio coincidir com o conjunto A e o contradomínio com o conjunto B indica-se: |2|

$$f: A \rightarrow B$$

3. Espaços métricos

3.1. Denomina-se **espaço métrico** a um par ordenado (X,d), onde X é um conjunto e d é uma métrica (ou uma função distância) em X, i.e., uma função definida no espaço X x X (o símbolo "x" indica produto cartesiano) tal que para todo $x, y, x \in X$ tem-se:

a_1) d tem valor real, finito e positivo

a_2) $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$

a_3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria)

a_4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdade triangular)

d (x, y) representa a distância entre dois elementos $x, y \in X$. As propriedades $a_1 - a_4$ são chamadas axiomas da métrica. |6|

Um subconjunto (Y, d') de (X, d) é obtido tomando-se um subconjunto Y em X e restringindo a métrica d' para Y x Y; d' é representada por:

$$d' = d/_{Y \times Y}$$

e denominada métrica induzida em Y por d.

Os seguintes exemplos constituem espaços métricos:

1) O conjunto de todos os números reais R com a métrica definida por:

$$d(x, y) = |x - y| \qquad (3.1.1)$$

com $x, y \in R$; as duas barras indicam o módulo.

2) O conjunto de todos os pares ordenados de números reais, plano Euclidiano R^2, com a métrica definida por:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad 3.1.2)$$

sendo $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$

Um outro espaço métrico é obtido considerando o mesmo conjunto, porém, a métrica dada por:

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad 3.1.3)$$

3) o espaço Euclidiano R^n cujos elementos obtêm-se tomando-se as n componentes ordenadas de números reais, com a seguinte métrica:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - -yn)^2} \quad (3.1.4)$$

sendo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

4) O conjunto de todas as funções f, g, ... de valores reais, função de uma variável independente t, contínuas num intervalo [a, b] com a métrica definida por:

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| \quad (3.1.5)$$

3.2. Seja $p \geqslant 1$ um número real. O espaço métrico ℓ^p é por definição o conjunto de seqüências do tipo $x = (x_j) = (x_1, x_2, \ldots)$ tal que

$$|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots$$

converge, com a métrica definida por:

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p} \quad (3.2.1)$$

onde $y = (y_j) \in \ell^p$.

Considerando as seqüências de números reais tem-se o espaço métrico real ℓ^p; seqüências de números complexos definem o espaço métrico complexo ℓ^p.

Se $p = \infty$ tem-se o espaço de seqüências ℓ^∞ com a métrica definida por:

$$d(x,y) = \sup_{j \in N} |x_j - y_j| \quad (3.2.2)$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$, $N = \{1, 2, \ldots\}$ e "sup" simboliza o limite superior.

3.3. Seja M um subconjunto do espaço métrico X. Um elemento x_o de X (pertencente ou não a M) é chamado do ponto de acumulação de M se qualquer vizinhança de x_o contiver pelo menos um ponto, diferente de x_o, pertencente a M.

O conjunto formado por M e mais os pontos de acumulação é chamado **fechamento** de M e indicado por $\bar{M}$. |5|

3.4. Um subconjunto M de um espaço métrico X é considerado denso em X se

$$\bar{M} = X$$

O conjunto X diz-se separável se tiver um subconjunto numerável que seja denso em X (um conjunto X é numerável se for finito).

3.5. Uma seqüência (x_n) em um espaço métrico (X,d) é chamada de Cauchy (ou fundamental) se para cada $\epsilon > 0$ existir um $N = N(\epsilon)$, tal que:

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad (3.5)$$

para todo $m, n > N$

Esta condição é muitas vezes denominada critério de Cauchy.

É importante observar que a definição de seqüência de Cauchy não exige que exista um elemento limite, ou seja, que a seqüência seja convergente. É suficiente que os elementos da seqüência se aproximem cada vez mais uns dos outros. |7|

3.8. Um espaço métrico (X,d) é chamado completo se toda a seqüência de Cauchy converge em X (i.e., tem um limite que é um elemento de X).

Considerando o espaço métrico do exemplo 1 (§3.1), a seqüência

$$x_1 = 1{,}4$$
$$x_2 = 1{,}41$$
$$x_3 = 1{,}414$$

obtida pelo truncamento da fração da $\sqrt{2}$ depois da n-ésima decimal, constitui uma seqüência de Cauchy e converge para um ponto pertencente a R. Considerando, porém, o conjunto Q dos números racionais, eliminando os irracionais, a seqüência converge para um ponto que não pertence ao espaço. Logo (Q,d) não é completo.

4. Espaços vetoriais

4.1. Um espaço vetorial (ou espaço linear) sobre um campo escalar K é um conjunto X não vazio de elementos x,y, ..., chamados vetores, juntamente com duas operações algébricas: soma de vetores e produto de vetores por escalares.

A soma de vetores associa a um par ordenado (x,y) de vetores um outro vetor representado por x + y, chamado soma de x com y, satisfazendo as seguintes propriedades:

s_1) $x + y = y + x$ (comutativa)
s_2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativa)
s_3) $x + 0 = x$ (elemento neutro)
s_4) $x + (-x) = 0$ (elemento inverso)
sendo x, y, z vetores.

O produto de vetores por escalares associa a cada vetor x e um escalar α um vetor αx (ou $x\alpha$), produto de α por x, de tal modo que:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x\end{array}\right\} \quad \text{distributividade}$$

$$1x = x \quad \text{(elemento neutro)}$$

α, $\beta \epsilon K$ K é chamado campo escalar associado ao espaço vetorial X. Este é denominado espaço vetorial real se K = R (conjunto dos números reais) ou espaço vetorial complexo se K = C (conjunto dos números complexos).

4.2. Um combinação linear de vetores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ num espaço vetorial X é uma soma da forma:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n$$

A dependência ou independência linear de um conjunto de vetores $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ $(r > 1)$ pertencentes a X é definida a partir da equação:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0 \qquad (4.2)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ são escalares. Evidentemente a equação (4.2) é satisfeita para $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$. Se este for o único conjunto de r escalares que satisfizer a equação, o conjunto V diz-se linearmente independente. Se a equação for satisfeita para um conjunto qualquer de r escalares, não todos nulos, o conjunto V é linearmente dependente.

4.3. Diz-se que um espaço vetorial X tem dimensão finita se existir um inteiro positivo n tal que X contenha um conjunto de n vetores linearmente independentes, enquanto qualquer outro conjunto de n + 1 vetores seja linearmente dependente. Nestas condições n é chamado dimensão do espaço vetorial X e escrito na forma:

n = dim X

Se $n = \infty$ dizemos que a dimensão do espaço é infinita.

4.4. Se dim X = n, um conjunto de n vetores $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ linearmente independentes de X é chamado **base** para X. Neste caso, qualquer vetor $x \epsilon X$ pode ser representado como uma combinação linear dos vetores base:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \qquad (4.4.1)$$

Uma base para o espaço R^n é:

$$\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ e_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{array} \qquad (4.4.2)$$

Esta é muitas vezes denominada **base canônica** para R^n.

4.5. Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial X no qual define-se uma função de valor real que associa a cada elemento $x \epsilon X$ um número real indicado por $\| x \|$ chamado norma de x satisfazendo as seguintes propriedades:

n_1) $\| x \| \geqslant 0$ (positividade)
n_2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \; \|x\|$ (homogeneidade)
n_3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ (desigualdade triangular)
n_4) $\| x \| =$ se e somente se $x = 0$

Uma norma em X sempre define uma métrica em X dada por:

$$d(x,y) = \| x - y \| \qquad (4.5.1)$$

chamada métrica induzida pela norma. | 5|

Exemplos:

1) No espaço Euclidiano R^2 a norma representa o comprimento do vetor x e é:

$$\| x \| = (x_1^2 + x_1^2)^{1/2} \qquad (4.5.2)$$

2) A generalização para o espaço Euclidiano R^n é imediata:

$$\| x \| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} \qquad (4.5.3)$$

3) No espaço C* das funções contínuas f, g, ..., contínuas no intervalo [a,b], a norma é definida do seguinte modo:

$$\| f \| = \max |f(t)| \qquad (4.5.4)$$

(Obs.: É utilizado o símbolo C* para indicar o conjunto das funções contínuas em vez de C, conforme ocorre na maioria da bibliografia, para distinguir do conjunto C dos número complexos já citado anteriormente).

4) No espaço de seqüência ℓ^p a norma de um vetor $x = (x_1, x_2, \ldots)$ é definida por:

$$\| x \|^p = \sum_{K=1}^{\infty} x_k^p \qquad (4.5.5)$$

Em particular para o espaço ℓ^2 tem-se:

$$\|x\|^2 = \sum_{K=1}^{\infty} x_k^2 \tag{4.5.6}$$

4.6. Um espaço normado completo (completo na métrica induzida pela norma) é chamado **espaço de Banach.**

4.7. Um espaço vetorial X no qual seja definido um produto interno (ou produto escalar) de vetores é chamado **espaço de produto interno.** (Alguns autores o denominam pré-espaço de Hilbert | 1 |). O produto interno, representado por $<x, y>$, é uma relação que a cada par ordenado (x,y) de vetores associa um escalar; é portanto uma relação de X x X sobre K. Dados x, y, zϵX e $\alpha\epsilon$K o produto interno satisfaz as seguintes condições:

p_1) $<x+y,z> = <x,z> + <y,z>$ (distributividade)
p_2) $<\alpha x,y> = \bar{\alpha} <x,y>$ (homogeneidade)
p_3) $<x,y> = <y,x>$ (simetria)
p_4) $<x,x> \geqslant 0$

$<x, x> = 0$ se e somente se $x = 0$ (positividade)

Como conseqüência destas propriedades, torna-se válida a desigualdade de Schwarz:

$$|<x, y>| \leqslant <x, x> <y, y>$$

ou

$$|<x, y>| \leqslant \|x\| \; \|y\| \tag{4.7.1}$$

Uma particularidade importante é a continuidade do produto interno, expresso do seguinte modo: |5| p. 138;

se $x_n \to x$, $y_m \to y$, então $<x_n, y_m> \to <x, y>$

Exemplos:

1) No espaço Euclidiano R^2 o produto interno de dois vetores

$x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ é:

$$<x,y> = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i \tag{4.7.2}$$

2) A generalização para o espaço Euclidiano R^n seria:

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{4.7.3}$$

3) No espaço das funções de quadrado integrável L^2 no intervalo [a,b], o produto interno de duas funções f, gϵL^2 seria:

$$<f,g> = \int_a^b f(t) \,.\, g(t)\, dt \tag{4.7.4}$$

4) No espaço de seqüência ℓ^2 o produto interno é dado por:

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{4.7.5}$$

A partir de um produto interno é possível sempre definir uma norma em X do seguinte modo:

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>} \tag{4.7.6}$$

como também uma métrica:

$$d(x,y) = \sqrt{<x-y, x-y>} = \|x-y\|$$

Daí dizer-se que um espaço de produto interno é sempre um espaço normado. A recíproca nem sempre é verdadeira (§4.8).

A presente notação $<.\,,\,.>$ bem como (. . .) são comuns para representar o produto interno na análise funcional. Em cálculo matricial é mais usual adotar a notação $x^T y$, onde T indica o vetor transposto.

4.8. O conceito de ortogonalidade é importante em problemas de otimização. Este conceito não é geralmente disponível em espaço normado mas sim no espaço de Hilbert. Os conceitos de bases ortonormais, séries de Fourier e mínimos quadrados têm assentos naturais no referido espaço.

Um espaço de produto interno completo é chamado **espaço de Hilbert**. Ou adotando o critério de alguns autores pode-se dizer que um espaço de Hilbert é um pré-espaço de Hilbert completo.

O protótipo do espaço de Hilbert é o espaço de seqüências ℓ^2, caso particular do espaço de seqüências ℓ^p (§4.7, ex. 4). Foi introduzido por D. Hilbert em 1912 em seu trabalho sobre equações integrais, denominado: "Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen".

Evidentemente, existem outros espaços que satisfazem as mesmas propriedades que o espaço ℓ^2 e, por extensão são também chamados espaços de Hilbert. Entre outros, pode-se citar os seguintes exemplos:

1) O espaço R^n com o produto interno definido em (§4.7 – ex. 2).

2) O espaço das funções de quadrado integrável L^2 com o produto interno definido em (§4.7 – ex. 3).

3) O conjunto dos vetores x,y, . . . ϵR^n com o produto

$$<x,y> = x^T M y \tag{4.8.1}$$

onde M é u'a matriz definida positiva.

No parágrafo anterior concluiu-se que um espaço de produto interno é um espaço normado. Pode-se afirmar, por extensão, que um espaço de Hilbert é um espaço de Banach. Os dois exemplos seguintes mostram que a recíproca nem sempre é verdadeira.

O espaço C* das funções contínuas constitui um espaço de Banach cuja norma é definida por (4.5.4). A partir daquela norma, porém, não se pode definir um produto interno; logo, o referido espaço não é um espaço de Hilbert.

O espaço das seqüências ℓ^p com $p \neq 2$ é um espaço de Banach, mas não é um espaço de Hilbert. A demonstração encontra-se em (|5| pp. 133 e 134).

É importante neste ponto procurar uma explicação para o cálculo de ajustamento sob o ponto de vista da análise funcional.

Sejam as observações e os parâmetros relacionados linearmente através de: |3|

$$L_b + V = L_a = AX_a \qquad (4.8.2)$$

onde os índices "a" e "b" indicam quantidade ajustadas e observadas respectivamente, com:

$$V = L_a - L_b \qquad (4.8.3)$$

denominados resíduos.

Pode-se distinguir aí dois espaços distintos: o espaço das observações L e o espaço dos parâmetros X. |8| Restringindo a atenção ao espaço das observações L, pode-se definir uma métrica do seguinte modo:

$$d(\ell,\ell') = \sqrt{(\ell - e')^T P_L (\ell - \ell')} - \ell,\ell' \epsilon L \qquad (4.8.4)$$

Desta forma L passa a ser um espaço métrico.

É possível definir o seguinte produto interno no referido espaço:

$$<\ell,\ell'> = \ell^T P_L \ell' \quad \ell,\ell' \epsilon L \qquad (4.8.5)$$

Deste modo obtém-se um espaço de Hilbert tendo em vista que sua dimensão é finita e portanto ele é um espaço completo. |9|

Além disso, a partir do produto interno pode-se sempre definir uma norma:

$$||\ell|| = \sqrt{<\ell,\ell>} \quad \ell \epsilon L \qquad (4.8.6)$$

L passando a ser um espaço de Banach.

A relação entre o produto interno, a métrica e a norma é a seguinte:

$$d(\ell,\ell') = \sqrt{<\ell - \ell', \ell - \ell'>} = ||\ell - \ell'|| \qquad (4.8.7)$$

A condição de mínimos quadrados é normalmente expressa na forma: |3|

$$V^T PV = \min \qquad (4.8.8)$$

Na presente notação pode-se escrever, utilizando a (4.8.5):

$$V^T PV = (L_a - L_b)^T P(L_a - L_b) = <L_a - L_b, L_a - - L_b> = \min$$

ou ainda pela (4.8.6):

$$V^T PV = ||L_a - L_b||^2 = \min \qquad (4.8.10)$$

Conclui-se que a condição de mínimos quadrados é uma condição de norma mínima bem como a distância mínima. Convém ainda salientar que utilizando a condição (4.8.10) se está trabalhando no espaço das observações.

5. Operadores e funcionais

No conjunto dos números reais R consideram-se funções de valores reais. Essas funções associam de maneira unívoca um elemento do domínio a outro do contradomínio. Em análise funcional consideram-se espaços mais gerais, tais como espaços métricos e espaços normados, bem como relações nestes espaços. Nestas condições, uma relação é chamada de maneira mais genérica de **operador**.

5.1. Sejam A e B dois conjuntos. Uma relação que associa de maneira unívoca elementos de A com elementos de B, indicada por:

$$y = Tx \qquad (5.1)$$

com $x \epsilon A$ e $y \epsilon B$, é chamada operador e escreve-se:

$$T: D(T) \rightarrow R(T)$$

sendo D(T) o domínio de T e R(T) o contradomínio. No caso em que D (T) = A e R (T) = B escrevemos: $T: A \rightarrow B$

As notações Tx em vez de T(x), bem como D(T) e R(T) são usuais em análise funcional.

5.2. Um operador T é chamado operador linear desde que: |6|

a) o domínio D(T) e o contradomínio R(T) sejam espaços vetoriais associados com um mesmo campo escalar K.

b) para todo $x,y \in D(T)$ e $\alpha \epsilon K$

$$T(x + y) = Tx + Ty$$
$$T(\alpha x) = \alpha Tx \qquad (5.2.1)$$

As igualdades em b) expressam o fato de que um operador linear constitui um **isomorfismo** de um espaço vetorial (domínio) em outro espaço vetorial (contradomínio), i.e., preserva as duas operações definidas no espaço vetorial. Um operador é chamado **isométrico** se preservar a distância, ou seja:

$$d'(Tx,Ty) = d(x,y) \qquad (5.2.2)$$

5.3. Um operador T: D(T) $\rightarrow$ R(T) é chamado injetivo se diferentes pontos no domínio tem diferentes imagens, ou seja, para qualquer $x_1, x_2 \in D(T)$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2$$

ou de maneira equivalente

$$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Nestas condições existe um operador inverso,

$$T^{-1}: R(T) \Rightarrow D(T)$$

que associa cada elemento $y \in R(T)$ um elemento $x \in D(T)$. |5| p. 86

5.4. Seja T: D(T) $\rightarrow$ R(T) um operador linear. Então:
a) O inverso $T^{-1}: R(T) \rightarrow D(T)$ existe se e somente se

$$Tx = 0 \Rightarrow x = 0$$

b) Se T^{-1} existir, será um operador linear.
c) Se dim D(T) = n $< \infty$ e T^{-1} existir, então dim R(T) = dim D(T). |5| p. 89

5.5. Sejam X e Y espaços normados e T: D(T) $\rightarrow$ Y um operador linear onde $D(T) \subset X$. O operador T é chamado limitado se existir um número real c tal que para todo $x \in D(T)$

$$\|Tx\| \leqslant c\, \|x\| \qquad (5.5.1)$$

5.6. Uma **funcional** linear f é um operador linear cujo domínio está contido num espaço vetorial X e cujo contradomínio está contido no campo escalar K de X.

$$f: D(T) \rightarrow K$$

Seguem alguns exemplos ilustrativos.

1) Seja $X = R^3$ e $a = (a_1, a_2, a_3)$ um vetor fixo em R^3. Então:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i x_i \qquad (5.5.2)$$

é uma funcional linear em R^3.

2) Um operador T: C [0,1] $\rightarrow$ C [0,1] definido por:

$$y = Tx$$

onde:

$$y(t) = \int_0^1 k(t,x)\, x(\tau)\, d\tau \qquad (5.5.3)$$

é um operador linear. A função k é chamada núcleo (kernel) de T e suposta contínua em J x J, onde J = [0,1]. Além disso T é limitado.

3) A matriz A^n_m com m linhas e n colunas define um operador

$$T: R^n \rightarrow R^m$$

por meio de:

$$y = Ax$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

T é linear e limitado.

4) Considerando os valores de N, ξ, η (altura geioidal e componentes meridiana e 1º vertical do desvio da vertical respectivamente) em um ponto fixo (ϕ_0, λ_0) as integrais de Stokes e Vening-Meinesz constituem exemplos de funcionais lineares no espaço de funções sobre a esfera. Supondo N(ϕ, λ), ξ (ϕ, λ), η (ϕ, λ), funções de latitude e longitude, as referidas integrais são exemplos de operadores lineares.

Um problema que é muito importante e certamente merece um estudo especial, diz respeito à existência e unicidade do operador inverso. Embora não se pretenda neste trabalho estudar este particular com mais profundidade, convém mencionar que o operador matriz (exemplo 3) desperta grande interesse. Se no referido exemplo se considerar n = 2 e m = 3 tem-se um operador que é uma matriz retangular, portanto, não admitindo inversa no sentido de Cayley. Sabe-se, porém, que dentro da teoria das inversas generalizadas existem infinitos operadores do tipo A^{-1} tal que:

$$A^{-1}: R^m \rightarrow R^n$$

5.7. O conjunto de todas as funcionais lineares limitadas sobre um espaço linear normado X constitui um espaço normado com a norma definida por:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)|$$

Este espaço é chamado espaço dual de X e normalmente representado por X'.

6. Ortogonalidade e Ortonormalidade

6.1 Seja x_i $(i = 1, \ldots)$ um conjunto de elementos de um espaço de produto interno X. Se:

$$< x_i, x_j > = 0 \qquad \text{para } i \neq j$$

os elementos x_i $(i = 1,2, \ldots)$ são chamados **ortogonais**. Se em particular:

$$< x_i, x_j > = 1 \qquad \text{para } i = j$$

o conjunto x_i é chamado **ortonormal.**

6.2 Um subconjunto M de um espaço de produto interno X é chamado ortogonal se os elementos de M forem dois a dois ortogonais. O subconjunto M será ortonormal se os seus elementos tiverem norma unitária, i.e.,

$$< x,y > = \begin{cases} 1 \text{ se } x = y \\ 0 \text{ se } x \neq y \end{cases} \qquad x,y\ M$$

Um conjunto ortonormal é linearmente independente.

Se um conjunto M ortogonal ou ortonormal for numerável, pode-se organizá-lo em uma seqüência x_n a qual é chamada seqüência ortogonal ou ortonormal respectivamente.

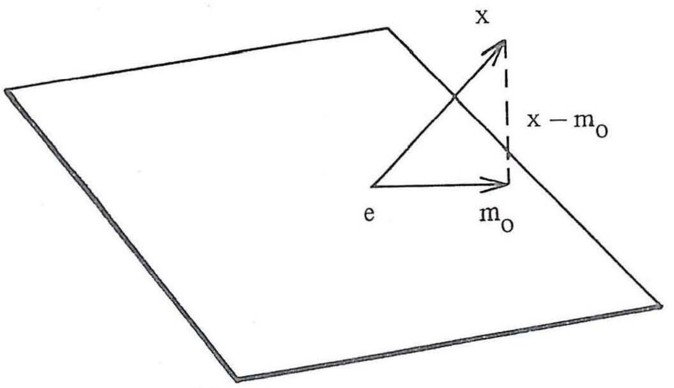
Os polinômios de Legendre constituem um exemplo de base ortogonal.

A base canônica do espaço R^n é um conjunto de vetores ortonormais.

6.3. Teorema da Projeção

Este teorema é fundamental na teoria da otimização. Em particular a condição de mínimos quadrados é uma aplicação direta do mesmo. O enunciado do teorema da projeção cuja demonstração encontra-se em (| 6 | pp. 50 e 51) é o seguinte:

Seja H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de H. Qualquer que seja um vetor $x \in H$, há um único vetor $m_o \in M$ tal que $\| x - m_o \| \leqslant \| x - m \|$ para todo $m \in M$. Além disso, a condição necessária e suficiente para que $m_o \in M$ seja o único vetor minimizador é que $x - m_o$ seja ortogonal a M.



6.3 – Teorema da Projeção

6.4. Teorema de Gram-Schmidt

Seja $\{x_i\}$ uma seqüência finita de vetores linearmente indepententes num espaço de produto interno X. Nestas condições, há uma seqüência ortonormal $\{e_i\}$ tal que para cada n o espaço gerado pelos n primeiros e_i é o mesmo que o espaço gerado pelos n primeiros x_i, i.e., para cada n temos:

$$[e_1, e_2, \ldots, e_n] = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

Este teorema constitui o fundamento do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt e a demonstração encontra-se em, e.g. | 6 | p. 54.

6.5. Equações Normais

Considere-se os elementos de um espaço de Hilbert $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Estes vetores geram um subespaço finito M de H. Dado um vetor arbitrário $x \in H$, procura-se o vetor $\hat{x}$ em M que seja o mais próximo possível de x. Se $\hat{x}$ puder ser expresso na forma:

$$\hat{x} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \tag{6.5.1}$$

o problema se resume a encontrar n escalares α_i, $i = 1, \ldots, n$ que minimize a seguinte norma:

$$\| x - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 - \ldots - \alpha_n y_n \| \tag{6.5.2}$$

De acordo com o teorema da projeção, o único vetor minimizador $\hat{x}$ é a projetção ortogonal de x sobre M. Mas isto equivale a tomar o vetor $x - \hat{x}$ ortogonal a cada um dos vetores y_i. Assim:

$$< x - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 - \ldots - {}_n y_n, y_i > = 0$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Desenvolvendo tem-se:

$$\begin{array}{c} < y_1,y_1 > \alpha_1 + < y_2,y_1 > \alpha_2 + \ldots + < y_n,y_1 > \alpha_n = < x, y_1 > \\ < y_1,y_2 > \alpha_1 + < y_2,y_2 > \alpha_2 + \ldots + < y_n,y_2 > \alpha_n = < x, y_2 > \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ < y_1,y_n > \alpha_1 + < y_2,y_n > \alpha_2 + \ldots + < y_n,y_n > \alpha_n = < x, y_n > \end{array} \tag{6.5.3.}$$

que são denominadas equações normais nos problemas de minimização.

Os coeficientes das incógnitas α_i, os quais são dados pelo produto interno dos vetores y_i dois a dois, formam uma matriz cuja transposta é chamada matriz de Gram. Num espaço de produto interno real esta matriz é simétrica.

O problema da aproximação consiste em resolver o conjunto de equações normais. Uma condição necessária e suficiente para que a solução das equações normais seja única é que o determinante de Gram (determinante da matriz de Gram) seja diferente de zero.

Referências Bibliográficas

1. AUBIN J.P. – Applied functional analysis. New York, John Wiley & Sons, 1979.
2. FINKBEINER D.T. – Introduction to matrices and linear transformations. San Francisco, W.H. Freeman, 1978.
3. GEMAEL C. – Aplicações do cálculo matricial em geodésia. 2ª parte: Ajustamento de Observações. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976.
4. HÖNIG C. S. – Analise funcional e aplicações. São Paulo. Universidade de São Paulo. Instituto de Matemática e Estatística, 1970.
5. KREYSZIG E. – Introductory functional analysis with applications. New York, John Wiley & Sons, 1978.
6. LUENBERGER D.G. – Optimization by vector space methods. New York, John Wiley & Sons, 1969.
7. MEISSL P. – Hilbert spaces and their application to geodetic least squares problems. Bolletino di Geod. Scien. Affin. 35(1 jan. – mar., 1976.
8. VANÍCEK P. & KRAKIWSKY E. – Geodesy. The concepts. Amsterdam, North-Holland, 1982.
9. VANICEK P. – Diagrammatic approach to least squares. Seminar given at the University of Stuttgart, 1982.

Agradecimentos

Ao Dr. Camil Gemael e ao Dr. Mauro Pereira de Mello pela leitura deste trabalho e pelas sugestões recebidas.

Ao CNPq/CIDA pelo patrocínio de um estágio na Universidade de Toronto, Canadá, onde nasceu a idéia de escrever o presente trabalho.

Ao Dr. Peter Vanícek pela orientação recebida durante o referido estágio.