FOTOTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA

Bach, Lilian Maria Klinger
Junior, Joel Gripp
Panteliadis, Sonia Luiza Terron

Sumário

A Fototriangulação Analítica é um processo de extensão do apoio de campo horizontal e vertical, a partir de coordenadas lidas em diapositivos, através de restituidores analíticos, que submetidas a um pré-refinamento e um ajustamento por feixes, assegura uma precisão, que permite oferecer apoio à Cartografia e a obras de Engenharia. Neste trabalho, foi desenvolvido um programa, em linguagem FORTRAN implantado no sistema DEC 10 da Universidade Federal do Paraná.

1. Introdução

Fototriangulação é, segundo a Sociedade Americana de Fotogrametria, um processo para extensão do apoio horizontal e/ou vertical, onde as medidas dos ângulos e/ou distâncias nas fotografias superpostas, são relacionadas a uma solução espacial, usando os princípios perspectivos da fotografia.

Em termos gerais, fotogrametria analítica pode ser considerada como uma transformação matemática entre um ponto imagem num sistema de coordenadas retangulares do espaço imagem, e um ponto objeto num sistema de coordenadas do espaço objeto.

Atualmente, técnica de aerotriangulação têm sofrido, grandes desenvolvimentos, estendendo suas aplicações a vários campos:

i) mapeamento em escala pequena, média e grande;
ii) cadastro – limitando propriedades;
iii) levantamentos de engenharia – modelo digital de terreno, rodovias;
iv) densificação do controle geodésico.

* Eng. Cartógrafa – Professora de Fotogrametria – UNESP – Presidente Prudente.
** Eng. Agrimensor – Universidade Federal de Viçosa.
*** Eng. Cartógrafa.
Mestrandos do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná.

2. Pré-Refinamento

As correções, nos procedimentos usuais de fotogrametria analítica, são necessárias diante de um compromisso com a teoria. Devem ser aplicadas na ordem inversa em que os fenômenos ocorrem, a saber:

- Trabalho do Filme;
- Distorção das Lentes;
- Refração Fotogramétrica.

2.1 Trabalho do Filme

Talvez as maiores fontes de erros residuais, em câmaras com marcas fiduciais convencionais, sejam as componentes não lineares da deformação filme/emulsão. O "shrinkage" é causado, basicamente, por:

- Mudança de Temperatura;
- Alteração da Umidade relativa do ar;
- Variação de Tensão;
- Envelhecimento.

De posse dos valores das coordenadas das quatro marcas fiduciais fornecidas pelo certificado de calibragem e de seus valores lidos no sistema do aparelho, determinam-se os coeficientes da transformação Afim Geral, aplicando-se um ajustamento pelo Método Paramétrico, ou seja:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{maq} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{fid} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

assim:

$$L_a = F(X_a)$$

$$\text{Matriz } A = \frac{\partial (F_x, F_y)}{\partial (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \Delta x, \Delta y)}$$

$$
\begin{bmatrix}
xf_1 & yf_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & xf_1 & yf_1 & 0 & 1 \\
xf_2 & yf_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & xf_2 & yf_1 & 0 & 1 \\
xf_3 & yf_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & xf_3 & yf_3 & 0 & 1 \\
xf_4 & yf_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & xf_4 & yf_4 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
X_o{}^t &= [0\,0\,0\,0\,0\,0]^t \\
L_o &= F(X_o) \\
L &= L_o - L_b \\
L_b{}^t &= [x_1\ y_1\ x_2\ y_2\ x_3\ y_3\ x_4\ y_4\ ]^t \\
X &= -(A^tPA)^{-1}(A^tPL) \\
X_a &= X_o + X \\
X_a{}^t &= [a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}\ \Delta x\ \Delta y]^t \\
L_a &= F(X_a) \\
L_a{}^t &= [x_1\ y_1\ x_2\ y_2\ x_3\ y_3\ x_4\ y_4\ ]^t
\end{aligned}
$$

Com os elementos da transformação Afim Geral, corrigimos as coordenadas de todos os pontos lidos nesta foto e transformamos do sistema do aparelho para o sistema fiducial.

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{fid} = \frac{1}{(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \Delta x \\ y - \Delta y \end{bmatrix}
$$

À cada nova foto, o processo deverá ser repetido.

2.2 Distorção das Lentes

A medida que a luz passa através de um sistema ótico ela se afasta de seu caminho natural. Este afastamento é chamado distorção, que será considerado como uma perturbação em termos de coordenadas imagem.

A distorção é, basicamente, causada por duas imperfeições óticas, sendo classificadas em:

- Distorção Radial Simétrica;
- Distorção Descentrada.

2.2.1 Distorção Radial Simétrica

Também conhecida como a 5ª Aberração de Seidl, advinda da impossibilidade prática de lapidar os elementos das lentes na forma ideal de um parabolóide de revolução.

Esta distorção radial e simétrica em relação ao ponto principal, foi representada por Conrady através do polinômio:

$$\delta r = C_o r + C_1 r^3 + C_2 r^5 + \ldots$$

onde C_o é, projetivamente, equivalente a uma mudança de escala.

Sendo:

$\delta x = \frac{x}{r}$ e $\delta y = \frac{y}{r}$, teremos como componentes em x e y da distorção radial simétrica:

$$\delta x = (K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \ldots)(x' - x_o)$$
$$\delta y = (K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \ldots)(y' - y_o)$$

2.2.2 Distorção Descentrada

Devido a dificuldades do fabricante em alinhar os vários eixos óticos dos elementos individuais das lentes no sistema ótico. Pode ser subdividida em distorção tangencial e radial assimétrica.

O modelo empregado para representar esta distorção num sistema de lentes com foco no infinito, é o Modelo Modificado de Conrady-Brown.

Como a determinação dos parâmetros é baseada num ajustamento, pelo Método dos Mínimos Quadrados de um modelo não-linear, usa-se o artifício de agrupar parâmetros para evitar problemas de valor inicial.

$$\delta x = \left[P_1\,(r^2 + 2x^2) + 2P_2\, xy\right]\left[1 + P_3 r^2 + \ldots\right]$$
$$\delta y = \left[2P_1\, xy + P_2\,(r^2 + 2y^2)\right]\left[1 + P_2 r^2 + \ldots\right]$$

2.3 Refração Fotogramétrica

O desvio do raio de luz, do seu trajeto do ponto imagem ao ponto objeto, é causado pela variação do índice de refração do meio. Tal variação, até uma altitude de 5000m, é devida, principalmente, à inversão de temperatura, grandes variações da pressão do vapor d'água e da pressão atmosférica.

Definimos Refração Fotogramétrica como o ângulo entre o raio colinear e a tangente ao raio real no nódulo exterior, tomado como positivo para deslocamentos radiais da imagem afastando-se do ponto nadir, causados por refração na atmosfera.[2]

O método desenvolvido por Andrade postula que a refração fotogramétrica sofrida por um raio de luz ao atravessar uma coluna de atmosfera, pode ser inferior ao conhecimento dos índices de refração nos extremos e da posição do centro de massa dessa atmosfera.

Sendo ζ a distância do terreno ao centro de massa da coluna atmosférica situada entre o terreno e a câmara aérea, temos, para pontos ao nível do mar:

$$\zeta = \frac{\sum_{i=p}^{s} z\, \Delta n_i}{n_p - n_s}$$

E para pontos fora do nível do mar:

$$\zeta = \frac{\zeta_s (n_o - n_s) - \zeta_p (n_o - n_p)}{n_p - n_s} - Z_p$$

Sendo:

n_p, n_s, n_o — índices de refração no terreno, na estação de tomada da foto e ao nível do mar, respectivamente;
Z_p — altitude do terreno;
z — altitude média no intervalo considerado.

Sabendo-se que o índice de refração é dado por:

$$\in = \in_{45} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

sendo α o ângulo nadiral e $\in_{45}$ tabelado segundo as fórmulas abaixo, para pontos ao nível do mar ou fora do nível do mar, respectivamente:

$$\in_{45} = \frac{\zeta}{Z_s} \ln \frac{n_p}{n_s}$$

$$\in_{45} = \frac{1}{Z_s - Z_p} \left[\frac{\zeta_s (n_o - n_s) - \zeta_p (n_o - n_p)}{n_p - n_s} - Z_p \right] \ln \frac{n_p}{n_s}$$

onde:

Z_s – altitude do ponto-estação.

Assim, concluímos que qualquer atmosfera pode ser substituída por uma simplificada com dois índices de refração, iguais àqueles dos extremos da atmosfera dada, e uma superfície dióptrica coincidente com o lugar geométrico dos centros de massa das colunas elementares da atmosfera em questão.

3. Ajustamento do Bloco

O ajustamento de todos os feixes de um bloco de fotografias envolve a rotação e a translação de cada feixe no espaço, isto é, k, ϕ, ω, X_o, Y_o, Z_o de cada fotografia, em relação ao sistema de coordenadas (referencial) utilizado. Simultaneamente, obtemos as coordenadas em tal referencial de todos os pontos de interesse.

O modelo matemático aqui utilizado para aplicar o ajustamento, foi a Equação de Colinearidade, cujas observações (x, y) já estão pré-corrigidas dos erros sistemáticos, conforme descrito no capítulo anterior.

$$x - x_o = c \frac{m_{11} (X - X_o) + m_{12} (Y - Y_o) + m_{13} (Z - Z_o)}{m_{31} (X - X_o) + m_{32} (Y - Y_o) + m_{33} (Z - Z_o)}$$

$$y - y_o = c \frac{m_{21} (X - X_o) + m_{22} (Y - Y_o) + m_{23} (Z - Z_o)}{m_{31} (X - X_o) + m_{32} (Y - Y_o) + m_{33} (Z - Z_o)}$$

Cada ponto observado em uma fotografia nos proporciona as duas equações de transformação transcritas acima, sendo que, em um bloco, as observações superam o número de incógnitas, e a solução será efetuada utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados.

$$x - x_o = x'$$
$$y - y_o = y'$$

Reescrevendo, de uma forma simplificada, temos:

$$x' = c \frac{m}{q}$$
$$y' = c \frac{n}{q}$$

que está na forma:

$$L_a = F(X_a)$$

representando, portanto, o Método Paramétrico.

L_a – é o vetor das observações ajustadas,

X_a – é o vetor dos parâmetros ajustados.

A função envolvida não é linear devido às funções trigonométricas nela contidas. Ela pode ser linearizada, aproximadamente, por meio da série de Taylor, negligenciando-se os termos de 2ª ordem e superiores. Usando-se as observações originais e os valores aproximados para os parâmetros incógnitos, pode-se calcular a série:

$$L_a = L_b + V = F(X_o + X) = F(X_o) + \frac{\partial F}{\partial X} |_{X_o} X$$

Transcrevendo-se, em notação usual, temos o modelo linearizado:

$$V = A X + L$$

onde:

$$A = \frac{\partial F}{\partial X} |_{X_o}$$

$$L = L_o - L_b$$

$$L_o = F(X_o)$$

X_o = parâmetros aproximados.

Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, obteremos:

$$X = - N^{-1} U$$

onde:

$$N = A^t P A \quad \text{e} \quad U = A^t P L$$

P – é a matriz dos pesos atribuídos às observações, definida por:

$$P = \frac{\sigma_o^2}{\Sigma L_b}, \text{ sendo,}$$

σ_o^2 – variância da unidade de peso, "a priori".

ΣL_b – matriz de variância covariância das observações, admitida sem correlação.

$$X_a = X_o + X$$

A matriz N, como foi exposto, é singular, apresentando deficiência de característica em relação a não fixação do referencial utilizado. A fixação é efetuada utilizando as coordenadas e variâncias dos pontos determinados por processos geodésicos e topográficos, através de injunções posicionais relativas.

Aplicando-se a injunção de posição às três coordenadas do ponto, temos:

$$XG_g^a = XG_f^a$$

$$YG_g^a = YG_f^a$$

$$ZG_g^a = ZG_f^a$$

o índice g indicando valores determinados em campo, que são associados às observações, e f via fotogrametria, estando na forma $L_g = G(X_a)$, então:

$$L_g + V = G(X_o + X) = G(X_o) + \frac{\partial G}{\partial X} |_{X_o} X$$

em notação usual,

$$\overset{c}{V} = C\,X + \overset{c}{L}$$

onde:

$$C = \frac{\partial G}{\partial X} |_{X_o}$$

$$\overset{c}{L} = L_{f_o} - L_g$$

$$L_{f_o} = G(X_o)$$

Os dois modelos linearizados V = AX + L e V = CX + L, após o M.M.Q., proporcionam a seguinte solução:

$$X = -(N + \overset{c}{N})^{-1} (U + \overset{c}{U})$$

com:

$$\overset{c}{N} = C^t \overset{c}{P} C \quad e \quad U = C^t \overset{c}{P} \overset{c}{L}$$

$\overset{c}{P}$ – é a matriz dos pesos atribuídos aos pontos em que foram aplicadas as injunções, bom base em suas variâncias.

A aplicação da injunção posicional às três coordenadas de um ponto, implica em somar:

$$\overset{c}{P} \text{ e } \overset{c}{P}\overset{c}{L}$$

na posição correspondente da matriz N e do vetor U, respectivamente.

A matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados é dada por:

$$\Sigma X_a = \sigma_o^2 \; (N + \overset{c}{N})^{-1}$$

onde:

$$\sigma_o^2 = \frac{V^t P V + \overset{c}{V}{}^t \overset{c}{P} \overset{c}{V}}{m + n - u}, \text{ sendo}$$

m – número de observações,
n – número de injunções,
u – número de incógnitas.

Como se trata de um modelo não linear, deve-se efetuar iterações, até que o vetor X esteja dentro de limites satisfatórios.

4. Referências Bibliográficas

1 – AMER, F. Adjustment of Aerial Triangulation. ITC lecture notes. 1979.

2 – ANDRADE, J.B. de *Photogrammetric Refraction*. s. l. The Ohio State University. 1977. 117p.

3 – ANDRADE, J.B. de Refração Fotogramétrica. Universidade Federal do Paraná. 1980. 37p.

4 – MERCHANT, D.C. *Analitical Photogrammetry*. Theory and Practice. 2 ed., s.l., The Ohio State University. 1979.