

# AJUSTAMENTO ALTIMÉTRICO SIMULTÂNEO E EM FASES ATRAVÉS DOS MÉTODOS DAS EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO E DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO

Gilberto Pessanha Ribeiro  
(Engenheiro Cartográfico)

IBGE  
DIRETORIA DE GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE GEODÉSIA

## Sumário

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Introdução .....                                                                          | 1  |
| 2. Correções a Serem Aplicadas às Observações de Nivelamento Geométrico de Alta Precisão ... | 3  |
| 3. Ajustamento Altimétrico Através do Método das Equações de Observação .....                | 4  |
| 3.1. Ajustamento Simultâneo .....                                                            | 4  |
| 3.1.1. Modelo Matemático .....                                                               | 4  |
| 3.1.2. Cálculo .....                                                                         | 4  |
| 3.2. Ajustamento em Fases .....                                                              | 6  |
| 3.2.1. Conceituação .....                                                                    | 6  |
| 3.2.2. Exemplos .....                                                                        | 10 |
| 4. Ajustamento Altimétrico Através do Método das Equações de Condição .....                  | 18 |
| 4.1. Ajustamento Simultâneo .....                                                            | 18 |
| 4.1.1. Modelo Matemático .....                                                               | 18 |
| 4.1.2. Cálculo .....                                                                         | 18 |
| 4.2. Ajustamento em Fases .....                                                              | 20 |
| 4.2.1. Conceituação .....                                                                    | 20 |
| 4.2.2. Exemplos .....                                                                        | 23 |
| 5. Conclusões .....                                                                          | 23 |
| 6. Referências Bibliográficas .....                                                          | 25 |

## 1. Introdução

Este trabalho tem como objetivo apresentar o procedimento do cálculo de ajustamento em fases de uma rede altimétrica de precisão através do método das equações de observação (método dos parâmetros) e do método das equações de condição (método dos correlatos). São apresentados também os resultados destes ajustamentos obtidos de duas redes de nivelamento de pequeno porte, assim como os resultados destas mesmas redes ajustadas simultaneamente.

O ajustamento de observações pode ser classificado em duas categorias principais, segundo o número de observações envolvidas no cálculo: **ajustamento simultâneo** e ajustamento passo a passo (por passos ou por estágios). (7)

No caso do ajustamento de observações provenientes do nivelamento geométrico, onde há um número muito grande de observações, recomenda-se o ajustamento passo a passo. Quando, neste tipo de ajustamento, há poucos elementos desconhecidos por estágio, trata-se do **ajustamento em fase**, e quando existem poucas observações envolvidas no processamento, trata-se do ajustamento seqüencial. Em resumo, tem-se:

|             |               |            |
|-------------|---------------|------------|
|             | SIMULTÂNEO    |            |
| AJUSTAMENTO |               |            |
| DE          |               |            |
| OBSERVAÇÕES |               | EM FASES   |
|             | PASSO A PASSO |            |
|             |               | SEQÜENCIAL |

De acordo com J. M. Tienstra no livro "Theory of the Adjustment of Normally Distributed Observations", o princípio do ajustamento em fases é: /4/

Any problem of adjustment may be divided into an arbitrary number of phases, provided that, in each following phase, cofactors resulting from preceding phase(s) are used.'

A importância do ajustamento em fases está diretamente associada ao grande número de observações encontradas em redes a serem ajustadas a nível continental. No Brasil, por exemplo, com certeza, é impraticável a aplicação do ajustamento simultâneo de toda a rede altimétrica de precisão, devido às limitações de alocação de memória computacional para tais observações.

Neste trabalho foram elaborados programas em linguagem FORTRAN IV para o cálculo dos ajustamentos e foram processados no sistema IBM 3081 instalado na Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, na cidade do Rio de Janeiro.

Como ainda não foi feita uma otimização de tais programas, a fim de uma melhor estruturação do fluxo do cálculo, não são apresentadas listagens destes programas neste trabalho.

Além disso, foram consideradas as covariâncias das observações nulas e os pesos das observações inversamente proporcionais às distâncias entre as referências de nível que limitam uma linha de nivelamento. /3/

A variância da unidade de peso a priori foi considerada unitária, isto é:

$$\sigma_0^2 = 1$$

## 2. Correções a serem aplicadas às Observações de Nivelamento Geométrico de Precisão

Neste trabalho, nos exemplos apresentados, as diferenças de nível (desníveis) "observadas" apresentadas nas tabelas I e II na verdade são consideradas como produto final de aplicação de algumas correções a priori aos desníveis observados propriamente ditos. Estas correções são: /1/

- a) Correção de refração atmosférica
- b) Correção astronômica
- c) Correção ortométrica

Além destas correções foram também consideradas as seguintes correções instrumentais:

- a) Correção de escala da mira
- b) Correção de temperatura da mira
- c) Correção de colimação do nível

As diferenças de nível, que são utilizadas no ajustamento das pequenas redes de nivelamento dos exemplos, foram, supostamente, aplicadas as três primeiras correções acima mencionadas a fim de minimizar os efeitos dos erros sistemáticos que ocorrem durante a execução do nivelamento.

A qualidade dos resultados finais de um ajustamento, independente do procedimento (método) adotado, está diretamente relacionada com a qualidade dos dados (diferença de nível, por exemplo) utilizados no seu cálculo. Desta forma, pode-se afirmar que, se os dados forem tratados com a devida atenção e cautela, no que diz respeito às suas correções, os resultados podem ser obtidos com mais segurança.

## 3. Ajustamento Altimétrico através do Método das Equações de Observação

### 3.1 Ajustamento Simultâneo

#### 3.1.1. Modelo Matemático

O modelo matemático deste método é: /5/, /2/ e /10/

$$L_a = F(X_a)$$

Isto é, equações onde os valores observados ajustados sejam função dos parâmetros ajustados.

#### 3.1.2. Cálculo

Os valores dos parâmetros ajustados são dados pelo seguinte vetor:

$$X_a = X_0 + X$$

Onde:

- $X_0$  : vetor dos valores aproximados dos parâmetros
- $X$  : vetor das correções aos parâmetros

Os valores observados ajustados são dados pelo vetor:

$$L_a = L_b + V$$

Onde:

- $L_b$  : vetor dos valores observados
- $V$  : vetor dos resíduos

O modelo matemático linearizado é dado por:

$$L_b + V = F(X_a) = F(X_0 + X) = F(X_0) + \frac{F}{X_a} \left. \begin{array}{l} X \\ X_0 \end{array} \right\}$$

$$L_0 = F(X_0)$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \left. \right\} X_0$$

$$L_b + V = L_0 + A X$$

$$V = L_0 - L_b + A X$$

$$L = L_0 - L_b$$

$${}_n V_1 = {}_N A_{uu} X_1 + {}_n L_1$$

Onde:

- $n$  : número de equações de observações
- $u$  : número de parâmetros incógnitos

A matriz dos coeficientes de peso das observações é dada por:

$$P = \begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & L_b \end{matrix}$$

Onde:

$$\sigma_0^2 : \text{variância a priori}$$

$$\sum_{L_b} : \text{matriz variância-covariância dos valores observados}$$

O vetor das correções aos parâmetros é dado por:

$$X = -(N)^{-1} U$$

Onde:

$$N = A^T P A$$

$$U = A^T P L$$

Equações Normais:

$$N X + U = 0$$

A matriz variância-covariância das correções é dada por:

$$\sum_X = \sigma_0^2 N^{-1}$$

A matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados é dada por:

$$\sum_{X_a} = \sigma_0^2 N$$

A matriz variância-covariância dos valores observados ajustados é dada por:

$$\sum_{L_a} = \sigma_0^2 A N^{-1} A^T$$

A matriz variância-covariância dos resíduos é dada por:

$$\sum_V = \sigma_0^2 (A N^{-1} A^T - P^{-1})$$

A variância da observação de peso unitário a posteriori é dada por:

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{S}$$

Onde:

S = u : número de graus de liberdade.

## 3.2. Ajustamento em Fases

### 3.2.1. Conceituação

O problema de observações indiretas pode também ser resolvido pelo ajustamento em fases. As equações de observação são dadas por:

$$V = A X + L \quad \text{com} \quad P : \text{matriz dos coef. de peso}$$

Então, dividindo o ajustamento em duas fases, as equações tomam o seguinte aspecto:

$$V_1 = A_1 X + L_1 \quad \text{com} \quad P_1 : \text{matriz dos coef. de peso}$$

$$V_2 = A_2 X + L_2 \quad \text{com} \quad P_2 : \text{matriz dos coef. de peso}$$

Onde os sub-índices das matrizes indicam a que fase do ajustamento se referem.

#### Primeira fase do ajustamento

As equações normais, para os dois conjuntos de equações de observação, são as seguintes:

$$N' X + U' = 0 \quad (1)$$

$$(N_1 + N_2) X + (U_1 + U_2) = 0$$

Onde:

$$N_1 = A_1^T P_1 A_1 \quad \text{com} \quad P_1 = N_1$$

$$N_2 = A_2^T P_2 A_2$$

$$U_1 = A_1^T P_1 L_1$$

$$U_2 = A_2^T P_2 L_2$$

Fazendo  $X_1$  ser o vetor dos valores das correções aos parâmetros na primeira fase do ajustamento, logo, a partir da equação (1), têm-se as equações normais para esta fase:

$$N_1 X_1 + U_1 = 0$$

O vetor  $X_1$  explicitado

$$X_1 = -N_1^{-1} U_1$$

A matriz dos coeficientes de peso dos parâmetros incógnitos é dada por:

$$\sum_{X_1} = N_1^{-1}$$

O vetor dos valores ajustados dos parâmetros é dado por:

$$X_{a1} = X_{o1} + X_1$$

O vetor dos resíduos é dado por:

$$V_1 = A_1 X_1 + L_1$$

O vetor dos valores observados ajustados é dado por:

$$L_{a1} = L_b + V_1$$

### Segunda fase do ajustamento

Para a segunda fase do ajustamento, os valores encontrados (calculados) para os parâmetros incógnitos na primeira fase são utilizados como valores observados, isto é:

$$L_b = F(X_{a1})$$

Fazendo  $X_2$  ser o vetor dos valores das correções encontrados na segunda fase, que é o vetor final dos valores das correções no ajustamento, tem-se:

$$X_2 = X_1 + V_2'$$

$$V_2' = x_2 - X_1$$

$$V_2' = X_2 + N_1^{-1} U_1$$

As equações de observação para esta fase têm a forma:

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ 1 \end{bmatrix} X_2 + \begin{bmatrix} L_2 \\ N_1^{-1} U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_2' \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A' X_2 + L' = V'$$

Ou ainda:

$$A_2 X_2 + L_2 = V_2$$

$$X_2 + N_1^{-1} U_1 = V_2'$$

com a seguinte matriz de coeficientes de peso:

$$P' = \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix} \quad \text{onde: } P_2 = N_2 = \sum X_2^{-1}$$

As equações normais são equivalentes às apresentadas anteriormente:

$$(N_2 + N_1) X_2 + (U_2 + U_1) = 0$$

A partir do que foi descrito acima, as seguintes conclusões podem ser escritas. Com respeito ao ajustamento em fases de observações indiretas, as equações normais são formadas usando os valores dos parâmetros incógnitos encontrados na primeira fase do ajustamento. Os valores dos coeficientes de peso obtidos a partir da primeira fase (matriz variância-covariância dos valores dos parâmetros ajustados) são utilizados na segunda fase.

Para ajustar estas equações de observação, juntamente com as equações de observação do segundo conjunto, os valores dos parâmetros incógnitos encontrados são equivalentes àqueles obtidos quando os dois conjuntos de equações de observação são ajustados simultaneamente.

A matriz dos coeficientes de peso dos parâmetros incógnitos  $P' = \sum X^{-1}$ , depois da segunda fase do ajustamento, equivale àquela obtida através da solução combinada dos dois conjuntos de equações de observação.

O valor mínimo de  $V^T P V$  pode ser obtido pela substituição dos valores desconhecidos encontrados através da segunda fase do ajustamento, nas equações de observação  $V_1$  e  $V_2$ , ou pela equação:

$$V^T P V = L_1^T P_1 L_1 + L_2^T P_2 L_2 + U_2^T X_2$$

### 3.2.2. Exemplos

São apresentados dois exemplos de redes altimétricas de precisão. O primeiro exemplo (Figura A) tem as seguintes características:

$$\text{número de equações de observação (n)} = 14$$

$$\text{número de parâmetros incógnitos (u)} = 6$$

$$\text{número de graus de liberdade (n - u)} = 8$$

O segundo exemplo (Figura B) tem as seguintes características:

$$\text{número de equações de observação (n)} = 9$$

$$\text{número de parâmetros incógnitos (u)} = 5$$

$$\text{número de graus de liberdade (n - u)} = 4$$

Nos anexos deste trabalho, podem ser encontrados os resultados do ajustamento destes exemplos através do método das equações de observação, simultaneamente e em duas fases.

O exemplo da figura A /8/ foi dividido em duas partes também. A primeira fase envolve os circuitos 1 e 2, e a segunda fase, os circuitos 3 e 4 (Figura B1).

Vale lembrar que o número de circuitos (ou linhas) identificados nos "croquis", independentemente entre si, está relacionado ao número de referências de nível fixas (injunções) consideradas no ajustamento.

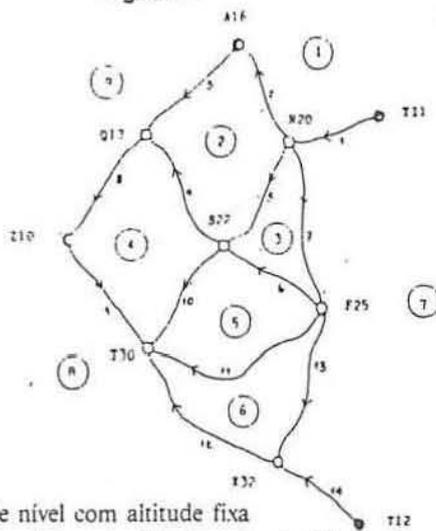
Nas tabelas I e II, são apresentados os valores observados das diferenças de nível, respectivamente, dos exemplos A e B.

Nas tabelas III e IV, são apresentados os valores ajustados das diferenças de nível, assim como os resíduos encontrados após o ajustamento.

Nas tabelas V e VI, são apresentados os valores das altitudes fixas e das ajustadas após o ajustamento.

Observou-se que os resultados dos ajustamentos, segundo o método das equações de observação e o método das equações de condição, foram idênticos.

Figura A

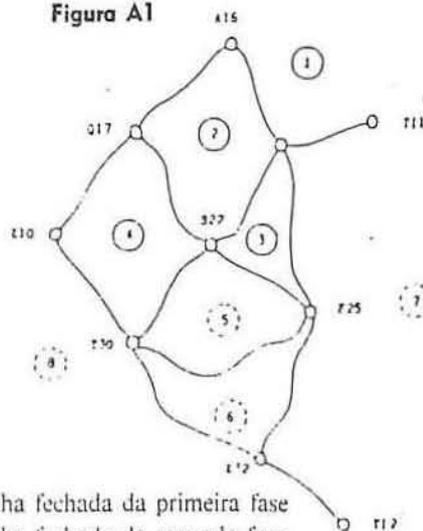


Legenda:

- Referência de nível com altitude fixa
- Referência de nível com altitude desconhecida

Observação: As setas indicam o sentido em que o terreno se eleva.

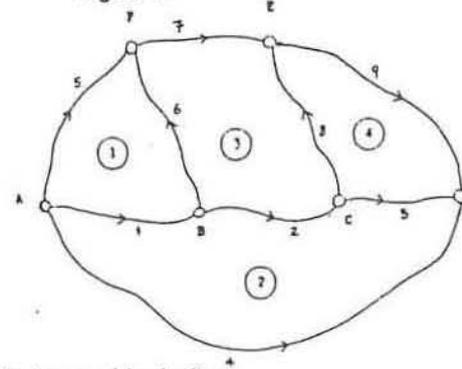
Figura A1



Legenda:

- Circuito ou linha fechada da primeira fase
- ⊙ Circuito ou linha fechada da segunda fase
- ⊖ Linha fechada não considerada no ajustamento

Figura B

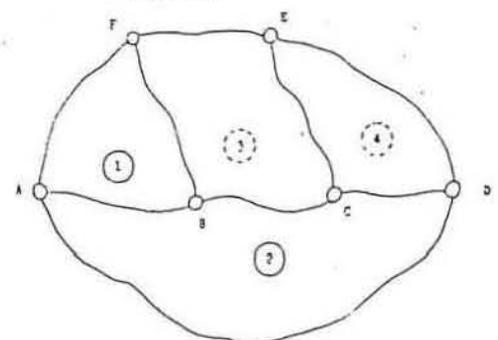


Legenda:

- Referência de nível com altitude fixa
- Referência de nível com altitude desconhecida

Observação: As setas indicam o sentido pelo qual foi feito o nivelamento.

Figura B1



Legenda:

- Circuito da primeira fase
- ⊙ Circuito da segunda fase

Tabela I

| LINHA | REFERÊNCIA DE NÍVEL DE | REFERÊNCIA DE NÍVEL PARA | DIFERENÇA DE NÍVEL OBSERVADA (m) | DISTÂNCIA (km) |
|-------|------------------------|--------------------------|----------------------------------|----------------|
| 1     | T11                    | N20                      | 12,3434                          | 20,00          |
| 2     | N20                    | A16                      | 10,0410                          | 25,00          |
| 3     | A16                    | Q17                      | 15,9121                          | 31,00          |
| 4     | S22                    | Q17                      | 3,8128                           | 28,00          |
| 5     | N20                    | S22                      | 22,1284                          | 37,00          |
| 6     | F25                    | S22                      | 10,3317                          | 32,00          |
| 7     | N20                    | F25                      | 11,8103                          | 41,00          |
| 8     | Q17                    | Z10                      | 17,4588                          | 37,00          |
| 9     | Z10                    | T30                      | 2,8147                           | 39,00          |
| 10    | S22                    | T30                      | 24,0654                          | 41,00          |
| 11    | F25                    | T30                      | 34,4186                          | 52,00          |
| 12    | X32                    | T30                      | 15,4827                          | 48,00          |
| 13    | F25                    | X32                      | 18,9476                          | 45,00          |
| 14    | T12                    | X32                      | 42,3215                          | 17,00          |
|       |                        |                          | TOTAL                            | 493,00         |

Tabela II

| LINHA | REFERÊNCIA DE NÍVEL DE | PARA | DIFERENÇA DE NÍVEL OBSERVADA (m) | DISTÂNCIA (km) |
|-------|------------------------|------|----------------------------------|----------------|
| 1     | A                      | B    | 124,632                          | 125,94         |
| 2     | B                      | C    | 217,168                          | 74,08          |
| 3     | C                      | D    | - 92,791                         | 103,71         |
| 4     | A                      | D    | 248,754                          | 316,69         |
| 5     | A                      | F    | - 11,418                         | 140,75         |
| 6     | B                      | F    | - 135,876                        | 77,78          |
| 7     | F                      | E    | - 161,107                        | 194,46         |
| 8     | C                      | E    | - 513,895                        | 122,23         |
| 9     | E                      | D    | 421,234                          | 148,16         |
|       |                        |      | TOTAL                            | 1303,80        |

Tabela V

| REFERÊNCIA DE NÍVEL | ALTITUDE FIXA (m) | ALTITUDE AJUSTADA (m) |
|---------------------|-------------------|-----------------------|
| T11                 | 1,3752            | —                     |
| A16                 | 23,7685           | —                     |
| N20                 | —                 | 13,7552               |
| Q17                 | —                 | 39,6766               |
| S22                 | —                 | 35,8652               |
| Z10                 | 57,1287           | —                     |
| F25                 | —                 | 25,5327               |
| T30                 | —                 | 59,9462               |
| X32                 | —                 | 44,4807               |
| T12                 | 2,1654            | —                     |

Tabela III

| LINHA                                | REFERÊNCIA DE NÍVEL DE | PARA | DIFERENÇA DE NÍVEL (m) | RESÍDUO (m) |
|--------------------------------------|------------------------|------|------------------------|-------------|
| 1                                    | T11                    | N20  | 12,3500                | 0,0066      |
| 2                                    | N20                    | A16  | 10,0433                | 0,0023      |
| 3                                    | A16                    | Q17  | 15,9081                | - 0,0040    |
| 4                                    | S22                    | Q17  | 3,8114                 | - 0,0014    |
| 5                                    | N20                    | S22  | 22,1399                | 0,0115      |
| 6                                    | F25                    | S22  | 10,3324                | 0,0007      |
| 7                                    | N20                    | F25  | 11,8075                | - 0,0028    |
| 8                                    | Q17                    | Z10  | 17,4521                | - 0,0067    |
| 9                                    | Z10                    | T30  | 2,8175                 | 0,0028      |
| 10                                   | S22                    | T30  | 24,0811                | 0,0157      |
| 11                                   | F25                    | T30  | 34,4135                | - 0,0051    |
| 12                                   | X32                    | T30  | 15,4655                | - 0,0172    |
| 13                                   | F25                    | X32  | 18,9479                | 0,0003      |
| 14                                   | T12                    | X32  | 42,3153                | - 0,0062    |
| SOMATÓRIO DOS QUADRADOS DOS RESÍDUOS |                        |      |                        | 0,0000      |

Tabela VI

| REFERÊNCIA DE NÍVEL | ALTITUDE FIXA (m) | ALTITUDE AJUSTADA (m) |
|---------------------|-------------------|-----------------------|
| A                   | 1679,4320         | —                     |
| B                   | —                 | 1803,9627             |
| C                   | —                 | 2021,0709             |
| D                   | —                 | 1928,2768             |
| E                   | —                 | 1507,0809             |
| F                   | —                 | 1668,0869             |

### 3. Ajustamento Altimétrico através do Método das Equações de Condição

#### 4.1. Ajustamento Simultâneo

##### 4.1.1. Modelo Matemático

O modelo matemático deste método é: /5/, /2/ e /10/

$$F(L_a) = 0$$

Isto é, equações onde há funções nulas que envolvam os valores observados ajustados.

No caso do nivelamento geométrico ao longo de linhas formando um círculo fechado, por exemplo, a soma algébrica de todas as diferenças de nível deveria ser nula, mas isto na prática não acontece devido aos erros de fechamento do próprio circuito.

##### 4.1.2. Cálculo

Os valores das observações ajustadas são dados por:

$$L_a = L_b + V$$

Tabela IV

| LINHA                                | REFERÊNCIA DE NÍVEL DE | PARA | DIFERENÇA DE NÍVEL (m) | RESÍDUO (m) |
|--------------------------------------|------------------------|------|------------------------|-------------|
| 1                                    | A                      | B    | 124,5307               | - 0,1013    |
| 2                                    | B                      | C    | 217,1082               | - 0,0598    |
| 3                                    | C                      | D    | - 92,7941              | - 0,0031    |
| 4                                    | A                      | D    | 248,8448               | 0,0908      |
| 5                                    | A                      | F    | - 11,3451              | 0,0729      |
| 6                                    | B                      | F    | - 135,8758             | 0,0002      |
| 7                                    | F                      | E    | - 161,0059             | 0,1011      |
| 8                                    | C                      | E    | - 513,9900             | - 0,0950    |
| 9                                    | E                      | D    | 421,1959               | - 0,0381    |
| SOMATÓRIO DOS QUADRADOS DOS RESÍDUOS |                        |      |                        | 0,0003      |

O modelo matemático linearizado é dado por:

$$F(L_a) = F(L_b + V) = F(L_b) + \frac{\partial F}{\partial L_a} \bigg|_{L_b} (L_a - L_b) = 0$$

$$F(L_b) = W$$

$$B = \frac{\partial F}{\partial L_a} \bigg|_{L_b}$$

$${}_r B_{nn} V_1 + {}_r W_1 = {}_r 0_1$$

Onde:

$r$  : número de equações de condição  
 $n$  : número de incógnitas

A matriz dos coeficientes de peso das observações é dada por:

$$P = \sigma_0^{-2} \sum_{L_b}^{-1}$$

Onde:

$\sigma_0^2$  : variância a priori

$\sum_{L_b}$  : matriz variância-covariância dos valores observados

O vetor dos resíduos:

$$V = P^{-1} B^T K$$

Onde:

$$K = -(B P^{-1} B^T)^{-1} W$$

A matriz variância-covariância dos valores ajustados é dada por:

$$\sum_{L_a} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} P^{-1} & -P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1} \end{bmatrix}$$

Ou ainda por:

$$\sum_{L_a} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} I & -P^{-1} B^T M^{-1} B \end{bmatrix} P^{-1}$$

Onde:

$$M = B P^{-1} B^T$$

$\sigma_0^2$  : variância a priori

$I$  : matriz identidade de ordem  $n$

$P$  : matriz dos coeficientes de peso das observações

A matriz variância-covariância dos valores observados:

$$\sum_{L_b} = \sum_{L_a} + \sum V$$

A variância da observação de peso unitário a posteriori é dada por:

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{r}, \text{ onde } V^T P V = -K^T W$$

## 4.2. Ajustamento em Fases

### 4.2.1. Conceituação

O princípio apresentado na introdução deste trabalho pode ser aplicado ao ajustamento em fases através das observações condicionadas, assim como através das observações indiretas.

Assim, nas equações de condição:

$$B V + W = 0$$

Os pesos das observações são apresentados por uma matriz diagonal  $P$  onde as covariâncias entre as observações são consideradas nulas.

Para este tipo de ajustamento, considerando duas fases assim como o caso anterior, as equações de condição de cada fase são:

$$B_1 V + W_1 = 0 \quad (2)$$

$$B_2 V + W_2 = 0 \quad (3)$$

Onde os sub-índices das matrizes indicam a que fase do ajustamento se referem.

O vetor dos resíduos é o seguinte:

$$V = V_1 + V_2 \quad (4)$$

### Primeira fase do ajustamento

Seja  $V_1$  o vetor dos resíduos obtidos através da primeira fase, usando o primeiro conjunto de equações de condição. Logo, a equação (2) toma a forma:

$$B_1 V_1 + W_1 = 0$$

com o mesmo procedimento do ajustamento simultâneo, tem-se:

$$V_1 = P^{-1} B_1^T K_1$$

Onde:

$$K_1 = -N_1^{-1} W_1$$

$$N_1 = B_1 P^{-1} B_1^T$$

As equações normais desta fase têm a forma:

$$B_1^T P^{-1} B_1^T K_1 + W_1 = 0$$

$$N_1 K_1 + W_1 = 0$$

A matriz dos coeficientes de peso para os correlatos é a inversa da matriz  $N_1$ , isto é:

$$\sum C_{11} = N_1^{-1}$$

A matriz dos coeficientes de peso dos resíduos é dada por:

$$\sum V_1 = P^{-1} B_1^T N_1^{-1} B_1 P^{-1}$$

A matriz dos coeficientes de peso dos valores observados ajustados é então:

$$\sum L_{a_1} = P^{-1} \sum V_1$$

$$\sum L_{a_1} = (I - P^{-1} B_1^T N_1^{-1} B_1) P^{-1}$$

Para esta primeira fase os valores ajustados são dados por:

$$L_{a_1} = L_b + V_1$$

### Segunda fase do ajustamento

O princípio básico para o ajustamento de fases é a aplicação da matriz variância-covariância dos valores observados ajustados da primeira fase ( $\sum L_{a_1}$ ) no cálculo da segunda fase.

Desta forma, então:

$$N_2 = B_2 \sum L_{a_1} B_2^T \quad ; \quad P_2 = \sum L_{a_1}$$

Sejam  $V_2$  e  $K_2$  os vetores dos resíduos e dos correlatos obtidos através da segunda fase.

Logo, o vetor dos correlatos é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2' \\ K_2'' \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} K_2' \\ K_2'' \end{bmatrix}$$

A equação (4) nas equações (2) e (3) dão como resultado:

$$B_1 (V_1 + V_2) + W_1 = 0$$

$$B_2 (V_1 + V_2) + W_2 = 0$$

$$B_1 V_1 + B_1 V_2 + W_1 = 0 \quad (5)$$

$$B_2 V_1 + B_2 V_2 + W_2 = 0 \quad (6)$$

Substituindo  $V_1$ , como obtido através da primeira fase do ajustamento, nas equações (5) e (6), tem-se:

$$(B_1 V_1 + W_1) + B_1 V_2 = 0$$

Como  $B_1 V_1 + W_1 = 0$ , logo:

$$B_1 V_2 = 0 \quad (7)$$

$$B_2 V_2 + (W_2 + B_2 V_2) = 0$$

Fazendo  $B_2 V_1 + W_2 = W_2'$ , tem-se:

$$B_2 V_2 + W_2' = 0 \quad (8)$$

Usando o método dos mínimos quadrados, tem-se, a partir de (7) e (8) as seguintes equações correlatas:

$$V_2 = P^{-1} B_1^T K_2' + P^{-1} B_2^T K_2'' \quad (9)$$

E as equações normais:

$$N_1 K_2' + B_1 P^{-1} B_2^T K_2'' = 0$$

Fazendo algumas transformações tem-se:

$$K_2' = -N_1^{-1} B_1 P^{-1} B_2^T K_2'' \quad (10)$$

$$K_2'' = -N_2^{-1} W_2'$$

Substituindo a equação (10) na equação (9), tem-se:

$$V_2 = \sum L_{a_1} B_2^T K_2'' \quad (11)$$

As equações normais para a segunda fase são dadas por:

$$B_2 \sum L_{a_1} B_2^T K_2'' + K_2' = 0 \quad (12)$$

As equações (11) e (12) são, respectivamente, as equações correlatas e as normais que satisfazem as equações de condição para a segunda fase do ajustamento. Em outras palavras, as equações (7) e (8) são formadas usando os valores ajustados obtidos através da primeira fase do ajustamento como as quantidades observadas, e os coeficientes de peso das quantidades ajustadas ( $\sum L_{a1}$ ) são usados como pesos das quantidades observadas na segunda fase do ajustamento para formar as equações normais e as equações correlatas. Então, os resíduos obtidos a partir da segunda fase do ajustamento ( $V_2$ ) mais os resíduos obtidos através da primeira fase do ajustamento ( $V_1$ ) serão iguais àqueles obtidos através do ajustamento simultâneo.

O valor mínimo de  $V^T P V$  pode ser obtido separadamente para cada fase:

$$V_1^T P V_1 = -K_1^T W_1 = K_1^T N_1^{-1} K_1 \quad (13)$$

$$V_2^T P V_2 = -K_2^T W_2 = K_2^T N_2^{-1} K_2 \quad (14)$$

O valor final do somatório dos quadrados dos resíduos é dado pela adição das equações (13) e (14):

$$V^T P V = K_1^T N_1^{-1} K_1 + K_2^T N_2^{-1} K_2$$

#### 4.2.2. Exemplos

Os mesmos exemplos apresentados no item 3.2.2. foram utilizados para o ajustamento pelo método das equações de condição. O exemplo da figura A tem as seguintes características:

número de equações de condição ( $r$ ) = 8  
 número de graus de liberdade = 8  
 número de incógnitas = 14

O exemplo da figura B tem as seguintes características:

número de equações de condição ( $r$ ) = 4  
 número de graus de liberdade = 4  
 número de incógnitas = 9

Nas tabelas deste trabalho, são encontrados os resultados do ajustamento destes exemplos através do método das equações de condição, simultaneamente e em duas fases.

Para o ajustamento em fases, a rede foi dividida da mesma forma que no caso anterior para os dois exemplos.

As altitudes ajustadas e os resíduos apresentados nas tabelas são os mesmos obtidos, quando aplicado o outro método de ajustamento nas redes altimétricas.

#### 5. Conclusão

Através dos dois casos analisados de redes altimétricas de precisão, vê-se a grande aplicabilidade do ajustamento em fases. Quando se trata de redes de grande porte, com um número grande de observações, aconselha-se este procedimento no cálculo do ajustamento.

A adoção do método de ajustamento (paramétrico ou dos

correlatos) está associada ao armazenamento, na memória do computador, das variáveis (matrizes e vetores). Notou-se que utilizando o método dos parâmetros, foi necessário inverter uma matriz de ordem 6, enquanto que, utilizando o outro método (dos correlatos), a matriz a ser invertida é de ordem 8. Este pode ser um ponto a favor do método dos parâmetros, no caso do ajustamento simultâneo, para o exemplo da figura A. Já no outro exemplo, foi preciso inverter uma matriz de ordem 5, utilizando o método dos parâmetros, enquanto que, utilizando o outro método, a matriz a ser invertida foi de ordem 4, no ajustamento simultâneo.

A viabilidade do emprego do ajustamento em fases relativo a redes altimétricas de precisão, pode ser encontrada, por exemplo, no ajustamento da Rede de Nivelamento Australiana /9/. Naquele país, houve uma divisão da rede em cinco partes, gerando, então, cinco fases de ajustamento.

No caso do nosso país, mesmo tratando-se de uma área maior que a da Austrália, é possível a adoção de uma metodologia para um ajustamento altimétrico em fases. Deve-se, portanto, dar uma atenção especial à propagação de erros ao longo dos circuitos e linhas a serem inseridos no ajustamento.

Sabe-se, portanto, que o ajustamento de redes de nivelamento e o ajustamento de redes gravimétricas trabalham com modelos matemáticos lineares, logo quando adota-se o método das equações de observação no processo do ajustamento, o cálculo deve ser não iterativo, isto é, o cálculo deve se processar diretamente. As expressões, para este caso, para se obter as observações ajustadas (desníveis) e parâmetros também ajustados (altitudes) são, respectivamente:

$$L_a = V + A X_a + C$$

$$X_a = - (A^T P A)^{-1} A^T P (C - L_B)$$

Onde  $C$  é o vetor de constantes contendo valores de altitudes fixas para o ajustamento.

#### Referências Bibliográficas

- 1 BALAZAS, E I. & YOUNG, G. M. Corrections applied by the National Geodetic Survey to precise levelling Observations. Rockville, Md. United States Department of Commerce, June, 1982. 12p.
- 2 BJERHAMMAR, A. Theory of errors and generalized matrix inverses. Stockholm, Sweden. Elsevier Scientific Publishing Company, 1973. 420p.
- 3 BRAATEN; DORE; KUKKAMAKI; RUNE & VIGNAL. Note on the evaluation of the precision of leveling. Bulletin Géodésique (18): 521-548, Aug., 1948.
- 4 CHUNG-CHI, Y. On phased adjustment. Survey Review. ( ): 282-

- 
- 5 GEMAEEL, C. Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas. Curitiba, UFPr, 1984. p. irr. apostila.
- 6 \_\_\_\_\_. Aplicações do cálculo matricial em Geodésia. Curitiba, UFPr, p. irr. Apostila.
- 7 MENEZES, \_\_\_\_\_. Cálculo das compensações. Notas de aula. Instituto Militar de Engenharia. Rio de Janeiro, 1982.
- 8 RAPPLEYE, H. S. Manual of leveling computation and adjustment. Washington, D. C. United States Government Printing Office, 1948, 178 p.
- 9 ROELSE, A.; GRANGER, H. W. & GRAHAM, J. W. The adjustment of the Australian Leveling Survey. 2. ed. Canberra, Australia, s. ed. Mar., 1975. p. irr.
- 10 VANICEK, P. & KRAKIWSKY, E. J. Geodesy: the concepts. 2ed. Amsterdam, North-Holland. Elsevier Science Publishers B. V., 1986. 697 p.