

# TRANSFORMAÇÃO NSWC 9Z-2 — SAD 69 E MAPA GEOIDAL SAD 69

José B. de Andrade  
(Universidade Federal do Paraná)

## Sinopse

Uma síntese dos aspectos conceituais mais relevantes para o equacionamento criterioso da transformação entre referenciais geodésicos geocêntricos e quase-geocêntricos de concepção clássica, precede a experimentação de um modelo que possibilita a determinação simultânea de parâmetros para aquele tipo de transformação e de desníveis geoidais. A conexão resolvida, operando-se com extensa massa de dados, é a NSWC 9Z-2 — SAD 69. Confecciona-se então, via "plotter", o mapa geoidal resultante, relativo ao SAD 69.

## Agradecimentos

Desejamos manifestar nosso profundo agradecimento:

— Aos Eng<sup>os</sup> Luis Paulo S. Fortes e Marcus Vinícius D. da Silva, do Departamento de Cálculo e Análise da Superintendência de Geodésia do IBGE, pelos seus comentários e sugestões sempre oportunos e competentes.

— Ao Eng<sup>o</sup> Cláudio João B. dos Santos, do Centro de Informações Cartográficas da Diretoria de Geodésia e Cartografia do IBGE, por sua participação no preparo para traçado automatizado de gráficos.

— Aos Eng<sup>os</sup> José Roberto D. de Novaes e Ana Lúcia B. de Freitas, do mesmo Centro de Informações Cartográficas, por sua solicitude no atendimento de certas necessidades surgidas na realização deste trabalho.

— À Diretoria de Geodésia e Cartografia do IBGE, pelo apoio que vem proporcionando, através de sua Superintendência de Geodésia, ao desenvolvimento de pesquisas aplicadas na área de Ciências Geodésicas.

## 1. Introdução

A determinação do geóide, relativamente ao elipsóide de referência do SAD-69 — datum geodésico horizontal adotado no Brasil — é condição básica para realização adequada do processo de redução ao datum, das observações realizadas na superfície topográfica, principalmente das medidas lineares. Essa razão, que se acrescenta a tantas outras, evidencia bem a importância das pesquisas que, no momento, se realizam, tendo em vista a confecção de um mapa de desníveis geoidais, de boa qualidade, para o SAD 69. Com efeito, a menos da limitação imposta pelos erros de observação, quanto maior o rigor observado nos processos de campo e gabinete necessários ao posicionamento de estações da rede terrestre, que materializa um certo sistema geodésico de concep-

ção clássica, como o SAD 69, tão mais consistentes com a definição do referencial resultarão as coordenadas obtidas.

O mapa geoidal atualmente disponível no IBGE (fig. 1) apresenta uma base geodésica determinada por Fischer, I. (1969), por ocasião dos trabalhos relativos ao projeto de implantação do SAD 69. Essa base está representada, em território brasileiro, pelas iso-curvas da região centro-sul e do segmento oriental limitado pelo meridiano 47° W. O grande vazio de informação geoidal, no restante do território brasileiro, procurou-se preencher posteriormente no IBGE, através do estabelecimento de estações Doppler, processadas com efemérides precisas, sobre 60 pontos com altitudes ortométricas disponíveis, em sua maioria pertencentes à rede altimétrica de 1ª Ordem. Ora, a obtenção dos desníveis geoidais SAD 69, dessas estações, demandava o cálculo prévio de parâmetros de transformação entre o NSWC 9Z-2 (antigo NWL 9D) — sistema Doppler associado a efemérides precisas — e o SAD 69. Mas, como se sabe, as técnicas convencionais, normalmente empregadas com a finalidade de se determinar parâmetros para aquele tipo de transformação, não prescindem do conhecimento do geóide, relativamente ao datum regional. Assim é que os parâmetros de transformação foram determinados por Kadlec, F. A. & Gomes, J. P. (1978), sob a hipótese de paralelismo entre os sistemas (de satélite e cartesiano-geodésico SAD 69), com base nos dados de 20 estações Doppler, distribuídas ao longo da rede planimétrica de 1ª Ordem, na região de melhor definição do mapa geoidal de Fischer. Todo esse procedimento, conquanto represente o que de melhor fosse, então, possível realizar, implica uma previsível deterioração de precisão do mapa geoidal com o aumento da distância ao ponto-origem Chuá, onde o desnível geoidal é nulo, por definição. Na verdade, essa é uma feição característica das determinações astro-geodésicas de desníveis geoidais (Vanícek, P. 7 Krakiwsky, E. J. (1982), cap. 24). Porém, a extrapolação dessas grandezas, por aplicação de parâmetros de transformação sobre coordenadas Doppler, produz o efeito evidente de propagar a deficiência intrínseca à determinação astro-geodésica, considerada no cômputo dos referidos parâmetros. De fato, resultados recentemente obtidos pelo Prof. D. Blizkow (USP-IAG) evidenciam uma inclinação significativa da determinação geoidal de base astro-geodésica, preponderantemente no sentido E-W. Também no IBGE (Superintendência de Geodésia — Divisão de Pesquisas em Geodésia), já se havia comprovado, matematicamente, aquele fato.

As considerações do parágrafo anterior evidenciam a estreita correlação existente entre duas determinações básicas em Geodésia, quais sejam: a de parâmetros de transformação, entre referenciais geocêntricos e regionais, e a de desníveis geoidais a

estes referidos. Este trabalho apresenta, como primeiro objetivo, proceder-se a uma análise conceitual mais pormenorizada do modelo apresentado por Andrade, J. B. (1984), através do qual, abre-se uma alternativa de solução simultânea dos dois problemas acima colocados. Pretende-se aprofundar essa análise, submetendo-se o modelo a testes com os dados atualmente disponíveis no IBGE, para a conexão entre NSWC 9Z-2 e SAD 69. Finalmente, realiza-se uma experiência de traçado do mapa geoidal SAD 69, resultante da aplicação do modelo com extensa massa de dados, e confeccionado com uso de "plotter", mediante programa específico para traçado de iso-curvas.

## 2. O Projeto PTMG

Em fase de execução, atualmente, na Superintendência de Geodésia do IBGE, o projeto PTMG apresenta os seguintes objetivos básicos:

1º — Refinamento dos parâmetros de transformação, atualmente disponíveis para as conexões entre SAD 69 e cada um dos referenciais geodésicos de posições terrestres, obtidos mediante rastreamento de satélites Transit, a saber: NSWC 9Z-2 (já referido na introdução) e NWL 10D (sistema associado a efemérides operacionais).

2º — Refinamento do mapa geoidal de base astro-geodésica, atualmente disponível para o SAD 69.

Na verdade, o termo "refinamento" poderá implicar numa alteração significativa das determinações atuais, com base em critérios mais rigorosos que os já aplicados. A manipulação criteriosa de informações geodésicas torna-se cada vez mais necessária, na medida em que amplia o universo daquelas informações. No caso do projeto PTMG, por exemplo, já se dispõe de extensa massa de dados, o que não ocorria há poucos anos atrás.

Estudos para solução criteriosa da conexão NSWC 9Z-2 — SAD 69 têm recebido prioridade, pela sua importância para o preenchimento do segundo objetivo acima colocado. O presente trabalho insere-se, precisamente, em tal contexto.

As estações conectoras, disponíveis para realização deste trabalho, estão plotadas na escala de 1/22.000.000 (projeção poligonal com meridiano central de 54° W) na fig. 2. São 107 posições isoladas, referidas ao NSWC 9Z-2 e estabelecidas sobre estações da rede planimétrica de 1ª ordem, entre as quais 79 são vértices de triangulação (VT), 26 estações-polygonais (EP), uma (1) estação-Hiram (EH) e uma (1) estação-Shiram (ES). Os receptores Doppler, empregados, foram o JMR-1, em 57 pontos, e o Geociever, nos 50 demais. Outras informações de interesse serão, gradualmente, apresentadas no decorrer do trabalho.

Na fig. 3, estão plotadas as estações NSWC 9Z-2 estabelecidas sobre pontos não pertencentes à rede planimétrica fundamental, mas para os quais se dispõe das respectivas altitudes ortométricas. Apresentam interesse, portanto, para a confecção do mapa geoidal. São 134 estações, entre as quais nada menos que 14 cotadas por nivelamento geométrico, apenas duas (2) por trigonométrico e duas (2) por barométrico.

## 3. O Modelo Matemático

O modelo para determinação simultânea de parâmetros de transformação entre referenciais geodésicos e de desnível geoidais, proposto por Andrade, J. B. (1984), apresenta o seguinte equacionamento para a estação conectora genérica  $P_i$  (fig. 4):

$$X_i = T \cdot D_i + N_i + v_i + H_i \quad (1)$$

Considerando-se, já, a aplicação específica da equação (1) ao problema da conexão NSWC 9Z-2 ↔ SAD 69, tem-se:

$X_i$ : vetor-posição da estação  $P_i$ , no sistema NSWC 9Z-2, representada na fig. 4 por  $[XYZ]$ .

$T$ : vetor-posição da origem do sistema cartesiano-geodésico  $[UVW]$ , associado ao SAD 69, relativamente à origem do NSWC 9Z-2. Doravante será denominado vetor-translação.

$D_i$ :  $N_i \cdot e^2 \cdot \sin i$ , onde:

$N_i$ : grande normal de  $P_i$  no SAD 69, corresponde ao módulo do vetor  $N_i$ .

$e^2$ : quadrado da excentricidade primeira do elipsóide de referência do SAD 69.

$i$ : latitude geodésica de  $P_i$  no SAD 69.

$v_i$ : desnível geoidal correspondente a  $P_i$ , relativo ao elipsóide do SAD 69; é o módulo do vetor  $v_i$ .

$H_i$ : altitude ortométrica de  $P_i$ ; é o módulo do vetor  $H_i$ .

Considera-se que os vetores  $v_i$  e  $H_i$  estejam alinhados com a grande normal de  $P_i$ , o que não é exato mas pode, perfeitamente, ser assumido em problemas como o enfocado. Assim, a soma vetorial  $N_i + v_i + H_i$  apresenta os mesmos cossenos diretores da grande normal e vale escrever:

$$N_i + v_i + H_i = (N_i + v_i + H_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda_i \cos \phi_i \\ \cos \lambda_i \sin \phi_i \\ \sin \phi_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

Onde  $\lambda_i$  é a longitude geodésica de  $P_i$  no SAD 69. Desmembrando-se a equação vetorial (1) em suas três componentes espaciais, com base em (2), vem:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_i e^2 \sin \phi_i \end{bmatrix} + (N_i + v_i + H_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda_i \cos \phi_i \\ \cos \lambda_i \sin \phi_i \\ \sin \phi_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

A grande normal  $N_i$  é dada pela fórmula seguinte:

$$N_i = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_i)^{1/2}} \quad (4)$$

onde, no caso "a" representa o semi-eixo maior do elipsóide associado ao SAD 69. Os parâmetros de dimensão e forma desse elipsóide assumem os seguintes valores:

$$a = 6378160 \text{ m} \\ e^2 = 0,006694542$$

Na equação (3), as grandezas sublinhadas representam as incógnitas do modelo. São elas: as componentes espaciais do vetor-translação e o desnível geoidal SAD 69 da estação genérica  $P_i$ . Logicamente, teremos tantas incógnitas altimétricas  $v_i$  quantas forem as estações conectoras.

### 3.1 Aspectos Conceituais

Um sistema regional (não geocêntrico) clássico, como o SAD 69, é sempre definido sob a condição de paralelismo entre seu correspondente sistema cartesiano e o Sistema Terrestre Médio (TM), também chamado Terrestre Convencional. (1) Entre-



tanto, a imposição da condição de paralelismo pode resultar significativamente imperfeita; vale dizer, mesmo um sistema geodésico definido, consoante a concepção clássica, pode não estar suficientemente bem orientado segundo o TM. A abordagem desse tema, realizada na sequência, encontra motivação no fato de, no modelo equacionado pela (3), assumir-se o paralelismo entre o sistema Doppler NSWC 9Z-2 — que, em princípio, será admitido coincidente com o TM — e o cartesiano-geodésico SAD 69. Deve-se observar que o modelo proposto na (3) visa equacionar a transformação entre sistemas definidos (Andrade, J. B. (1984)).

(1) mais exatamente, condição de equipotência entre eixos cartesianos homólogos.

Admitindo-se "a priori" que um certo elipsóide de revolução tenha já sido adotado, o estabelecimento de um sistema geodésico regional implica na necessidade de definição do posicionamento e orientação espaciais da tela superfície de referência (datum geodésico horizontal) em relação à Terra. Tal definição dá-se através da prescrição de certos parâmetros, para um determinado ponto P da superfície topográfica, aqui chamado ponto-origem do sistema, localizado na região de abrangência prevista para o mesmo. Esses parâmetros topocêntricos serão denotados por:

$$\phi_o, \lambda_o, h_o, \xi_o, \eta_o, \alpha_o$$

Tais grandezas devem corresponder, implícita ou explicitamente, a três translações e três rotações, totalizando os seis graus de liberdade necessários à definição da situação espacial de uma superfície não plana, em relação a um referencial 3-D ortogonal. No caso, é o Sistema Astronômico Local (AL), com origem em P, que desempenha o papel daquele referencial (fixo em relação à Terra).

A latitude ( $\phi_o$ ) e a longitude ( $\lambda_o$ ) geodésicas de  $P_o$  especificam, univocamente, uma normal ao datum. Ora, essa normal elipsoidal, relativa a  $P_o$ , apresenta-se livre, e com ela, solidariamente, o elipsóide, para girar em torno de  $P_o$ , mantendo-se fixa somente por esse ponto. É necessário, portanto, definir sua direção relativamente ao AL centrado em  $P_o$ . Para tanto, prescrevem-se os parâmetros  $\xi_o$  e  $\eta_o$ , respectivamente, componentes projetivas do ângulo de deflexão da normal em relação à vertical do ponto (desvio relativo da vertical em  $P_o$ ), nos planos meridiano e primeiro vertical astronômicos de  $P_o$ . Uma vez definidas, então, a normal e sua direção no espaço, a prescrição da altura elipsoidal  $h_o$  do ponto-origem, fixa a distância entre esse ponto e o elipsóide. Nesse estágio, o único grau de liberdade restante ao datum manifesta-se através de uma possível rotação do mesmo, em torno da normal elipsoidal de  $P_o$ . Finalmente então, elimina-se este último grau de liberdade através de  $\alpha_o$ , azimute geodésico de uma direção terrestre arbitrária, com origem em  $P_o$  aqui chamada direção de partida. Em suma, ( $\phi_o, \lambda_o, h_o$ ) especificam as coordenadas geodésicas, para o elipsóide adotado, da origem  $P_o$  do AL; enquanto ( $\xi_o, \eta_o, \alpha_o$ ) informam a orientação do Sistema Geodésico Local (GL) com origem em  $P_o$ , relativamente ao AL com origem coincidente. Notam-se as correspondências implícita e explícita dos parâmetros topocêntricos, com translações ( $\phi_o, \lambda_o, h_o$ ) e rotações ( $\xi_o, \eta_o, \alpha_o$ ), respectivamente.

A imposição da condição geométrica de paralelismo dá-se através da aplicação da conhecida equação de Laplace, no ponto origem. Tendo em vista essa aplicação, transcreve-se abaixo a expressão completa da referida equação:

$$\alpha_o = \Lambda_o - \eta_o \tan \phi_o - (\xi_o \sin \alpha_o - \eta_o \cos \alpha_o) \cotan \beta_o \quad (5)$$

onde as grandezas ainda não apresentadas são:

A: azimute astronômico da direção de partida.

$\beta_o$ : distância zenital geodésica da mesma direção.

No membro direito da (5) pode-se, sem perda da precisão, para efeito de cálculo, considerar  $A_o$  e  $B_o$  em lugar de  $\alpha_o$  e  $\beta_o$ .  $B_o$  é a distância zenital da direção de partida (demonstração e convenções podem ser encontrados em Heiskanen, W. & Moritz, H. (1987)). As componentes  $\xi_o$  e  $\eta_o$  do desvio da vertical em  $P_o$  devem obedecer, por seu turno, as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \xi_o &= \Phi_o - \phi_o \\ \eta_o &= (\Lambda_o - \lambda_o) \cos \phi_o \end{aligned} \quad (6)$$

nas quais  $\Phi_o$  e  $\Lambda_o$  correspondem à latitude e longitude astronômicas de  $P_o$ . Na verdade, as equações (6) atuam, basicamente, como expressões de definição de  $\xi_o$  e  $\eta_o$ . Na prática, é normal a obtenção, "a priori" de  $\xi_o$  e  $\eta_o$  por algum critério através do qual se assegure uma boa adaptação regional do elipsóide ao geóide. Nesse caso, das (6) resultariam as coordenadas geodésicas 2-D ( $\phi_o, \lambda_o$ ) do ponto-origem, no qual, naturalmente, deve-se realizar observações astronômicas. Tal foi o procedimento básico no caso de definição do SAD 69 (Fischer, I. (1969)).

O que é importante deixar claro, nessas colocações, é o fato das (6) não exercerem influência significativa no processo de orientação do datum. Uma vez definidos  $\xi_o$  e  $\eta_o$  — criteriosamente ou não — é através da equação de Laplace (5) que, realmente, se impõe a condição de paralelismo.

Erros em  $\xi_o$  e  $\eta_o$  poderiam afetar, significativamente, quando muito, apenas as coordenadas ( $\phi, \lambda$ ), transportadas de  $P_o$  para estações vizinhas ( $\xi_o, \eta_o$  seriam empregados apenas na redução de direções observadas de  $P_o$ ). Num enfoque alternativo, erros em  $\xi_o$  e  $\eta_o$  poderiam ser reinterpretados ou assimilados como erros em  $\phi_o$  e  $\lambda_o$ , com base nas (6); nesse caso, que efeito erros em  $\phi_o$  e  $\lambda_o$  exerceriam sobre a orientação do sistema? A não ser em casos extremos, jamais verificados na prática, nenhum.

Dos argumentos anteriores, pode-se concluir o seguinte: caso o sistema regional definido esteja significativamente mal orientado segundo o TM, esta condição só pode manifestar-se através de uma rotação diferencial daquele sistema, em torno da normal elipsoidal de seu correspondente ponto-origem. A fig. 5 ilustra o fato; o possível giro do sistema regional encontra-se ali representado por  $\Delta$ .

Vanicek, P. & Wells, D. E. (1974) foram os primeiros a abordar o problema da orientação de um datum geodésico horizontal, na forma como aqui apresentado. Por certas razões específicas do processo de estabelecimento do NAD27 (Datum Norte-Americano de 1927), eles reuniram argumentos para sustentar a hipótese de uma observância não rigorosa, a nível significativo, da condição de Laplace em Meades Ranch, ponto-origem daquele sistema. Posteriormente, estimaram, para um valor entre -0,2" e -0,3", no caso daquele datum (Wells, D. E. & Vanicek, P. (1975)).

Raciocínio semelhante ao feito para o NAD27 pode ser elaborado no caso da SAD 69. A propósito, esse é um dos tópicos abordados em estudo empreendido, atualmente, no IBGE, sobre a questão de orientação do SAD 69. Pode-se, entretanto, adiantar o seguinte: as características específicas do projeto de implantação do SAD 69 revelam um critério cuidadoso no processo de orien-

ração daquele sistema. Na verdade, o azimute da direção de partida, Chuá-Uberaba, não resultou de uma simples imposição da condição de Laplace participaram do ajustamento de uma cadeia planimétrica de âmbito continental, referida ao SAD 69, tendo  $\alpha_0$  resultado como um dos produtos daquele ajustamento; a partir de então, fixou-se o valor obtido (as estações de Laplace são pontos nos quais se injunção o ajustamento com a equação de Laplace). Vanicek, P. (1975) observa que, tal procedimento, pode-se esperar uma observância mais rigorosa da condição de paralelismo. Isso é verdadeiro, logicamente, apenas a partir do momento em que todas as possíveis fontes de erros sistemáticos, presentes em cada injunção de Laplace, sejam eliminadas; em especial, na injunção do ponto-origem. Esse cuidado parece ter sido tomado no caso do SAD 69. Pelo menos essa é a conclusão que se pode tirar até o momento, com base nos resultados de experiências realizadas, no IBGE, para recuperação do ângulo  $\Delta$ , tomando-se coordenadas NSWC 9Z-2 como padrão externo de comparação.

É interessante observar, em complementação ao parágrafo anterior, que mesmo ante a possibilidade de detecção de um valor significativo para  $\Delta$ , a inclusão desse parâmetro em modelos de transformação, entre sistemas definidos, praticamente não interfere na determinação das componentes de translação. O motivo reside nas baixíssimas correlações entre aquelas incógnitas e o ângulo  $\Delta$ , considerando-se a pequena magnitude esperada para tal rotação.

Os argumentos e conclusões anteriores, respeitantes à questão de orientação do SAD 69 em relação ao TM, lançam sustentação teórica para a possibilidade de não inclusão do parâmetro  $\Delta$ , em algum modelo através do qual se pretenda equacionar a transformação SAD 69 - TM. Tal é, precisamente, o caso do modelo expresso pela (3), desde que se possa considerar a coincidência entre o sistema de satélite e o TM, tema ao qual retornaremos, mais adiante, ainda nesta divisão.

Procede-se, na sequência, a uma breve incursão no estudo dos modelos clássicos de transformação entre referenciais geodésicos, tendo-se por objetivo tornar mais nítido o conceito de fundo do modelo expresso pela equação (1). Os conhecidos modelos de transformação entre referenciais geodésicos, Bursa-Wolf e Molodenskii-Bedekas, consistem, basicamente, em variações da equação vetorial, abaixo, ilustrada na fig. 6:

$$\vec{X}_i - \vec{U}_k = \vec{T} + (1+K).R(\omega, \psi, \epsilon).(\vec{U}_i - \vec{U}_k) \quad (7)$$

Na (7), além de  $\vec{T}$ , constam como parâmetros de transformação o chamado fator de escala K e as rotações  $\omega, \psi, \epsilon$ . Na fig. 6, encontra-se representada a situação mais geral em que  $\vec{U}_k$ , vetor que define o centro de rotação do sistema geodésico, é diferente do vetor nulo ( $\vec{0}$ ). Esse é o caso do modelo Molodenskii-Bedekas, no qual, adota-se um certo ponto  $P_k$ , da superfície terrestre, como centro de rotações. No modelo Bursa-Wolf, tem-se  $\vec{U}_k = \vec{0}$ , de maneira que as rotações  $\omega, \psi, \epsilon$  se verificam, respectivamente, em torno dos eixos W, V e U do sistema cartesiano geodésico regional. O parâmetro K pode ser interpretado como uma diferença relativa de escala entre dois sistemas.

A utilização de modelos do tipo expresso pela (7), para cômputo de parâmetros de transformação entre sistemas de âmbito global e sistemas regionais, na verdade deveria indicar uma predisposição em se parametrizar certas distorções incidentes sobre as coordenadas 3-D locais  $U_i$ . Com efeito, o emprego daqueles modelos segue, via de regra, uma técnica convencional em

que se necessita interpolar desníveis geoidais de algum mapa apropriado, com a finalidade de se obter alturas elipsoidais  $h_i$  para cada estação conectora  $P_i$ . Isto se faz através da conhecida relação (aproximação válida):

$$h_i = H_i + v_i \quad (8)$$

Ora, já na introdução deste trabalho, procurou-se comentar a deficiência típica do mapa geoidal de base astro-geodésica, atualmente disponível no IBGE. Incorporar informação desse mapa ao modelo de conexão (7), através de coordenadas altimétricas  $h_i$ , necessárias à composição dos ternos curvilíneos ( $\phi_i, \lambda_i, h_i$ ), a partir dos quais obtêm-se cada vetor-posição  $U_i$ , implica em que os parâmetros de transformação venham a absorver, de alguma forma, o erro de inclinação característico do "geóide astro-geodésico". No tocante às rotações,  $\omega, \psi, \epsilon$ , naturalmente que elas poderiam absorver também uma possível distorção geral de orientação da rede planimétrica associada ao datum regional. Mas, no caso específico da rede de 1ª ordem do Brasil, trabalhando-se com adequada massa de dados, experiências realizadas no IBGE já comprovaram a não significância daquele tipo de distorção. Portanto, quando se obtém valor significativo para um ou mais ângulos do tipo  $\omega, \psi, \epsilon$ , pelo menos no caso de nosso interesse, tal resultado encontra-se diretamente relacionado com a inclinação do "geóide astro-geodésico". Precisamente esse tipo de constatação foi realizado por Mueller, I. I. (1974), para o caso do NAD 27. Quanto ao fator de escala K, é mais clara a tendência do mesmo em absorver uma distorção geral nas componentes altimétricas de coordenadas 3-D, relativas ao sistema regional. Além disso, entretanto, também o efeito da negligência de desníveis geoidais, no processo de redução ao datum, das medidas terrestres lineares — procedimento adotado no preparo de observações, para o ajustamento de pequenos setores de nossa rede planimétrica de 1ª ordem — tende a ser absorvido por K. Contudo, face à distribuição das estações conectoras, disponíveis à aplicação de nosso interesse e ao histórico de obtenção de suas coordenadas 2-D ( $\phi, \lambda$ ), este segundo tipo de efeito absorvido pelo fator de escala não se mostra tão relevante quanto o primeiro. Finalmente, com relação a uma possível diferença entre os padrões de medida linear intrínsecos à realização de cada sistema, propõe-se, atualmente, que no caso de empregar-se coordenadas NSWC 9Z-2 como padrão externo de comparação, como é o do presente trabalho, a elas se aplique uma correção de -0,4 p.p.m, em escala, em função de certas deficiências inerentes ao Sistema Transit. Com essa correção, a métrica Doppler fica compatibilizada com o padrão médio das medidas terrestres convencionais de distâncias, em 1ª ordem (Hotheim, L. D. (1979)).

Pode-se perceber, à luz das colocações anteriores, uma forte tendência dos chamados modelos clássicos, sintetizados na (7), em gerar correlações elevadas entre seus parâmetros de rotação e escala, já que eles modelam, com maior ou menor adequação geométrica, basicamente o mesmo tipo de distorção. Isso, bem entendido, em aplicações de mesma natureza da enfocada neste trabalho. Também as correlações de rotações e fator de escala, principalmente este, com as componentes do vetor-translação, resultam elevadas. O modelo Molodenskii-Bedekas, quando convenientemente usado, possibilita a diminuição de correlações entre rotações e translações; em contrapartida, estas perdem seu significado geométrico mais intuitivo, de componentes do vetor-posição da origem de  $[U \ V \ W]$ , em relação à de  $[X \ Y \ Z]$  (Leick,



A. & Gelder, B. H. W. van (1975)). As consequências da incidência de correlações elevadas, entre parâmetros de transformação, serão analisadas, mais especificamente, na divisão 4.2, para o modelo estudado neste trabalho.

A adoção de algum dos modelos clássicos é uma possibilidade aberta a qualquer geodesta que se proponha a modelar, em média, as distorções sistemáticas normalmente implícitas nas coordenadas 3-D, relativas a sistemas geodésicos clássicos (Lambek, C. K. (1971)). Não sendo esse porém seu objetivo, mas antes o de, efetivamente, modelar a conexão entre referenciais definidos, ele se defronta, em nosso problema específico, com a deficiência da informação geoidal disponível. O recurso adotado para se contornar essa dificuldade, no caso do modelo de transformação (3), é o da parametrização dos desníveis geoidais  $v_i$ , o que assegura um fechamento geométrico perfeito para a transformação entre sistemas definidos. Em princípio, portanto, pode-se esperar que daquele modelo resulte, além dos desníveis geoidais, o vetor-translação entre sistemas definidos. Neste sentido, convém, ainda, observar o seguinte: a distribuição normal dos erros das coordenadas-satélite é uma característica típica do posicionamento Doppler de estações terrestres, ao contrário do que se verifica nas técnicas convencionais, sempre mais sujeitas a erros sistemáticos, e ainda no acúmulo dos erros sistemáticos, e ainda no acúmulo dos erros aleatórios de observação com o aumento das distâncias ao ponto-origem; é razoável, portanto, admitir-se que as coordenadas Doppler sejam consistentes com a própria definição do sistema NSWC 9Z-2, no caso. Finalmente, com relação ao efeito dos erros incidentes sobre as coordenadas 2-D ( $\phi_i, \lambda_i$ ), no uso do modelo (3), sua influência sobre o vetor-translação é absolutamente negligenciável.

Em toda a argumentação formulada até este ponto, procedeu-se com base na hipótese de coincidência entre o sistema de satélite e o TM. Tal premissa, contudo, não é verdadeira para o caso do NSWC 9Z-2, sistema Doppler empregado nesta pesquisa. Todavia, encontram-se já bem determinadas as medidas de discrepância entre o NSWC 9Z-2 e o TM. A compatibilização das correspondentes coordenadas Doppler com o TM requer: rotação terciária de + 0,8" (- 0,8" sobre longitudes Doppler) e translação terciária de + 4m (+ 4m em Z). Para maiores informações o leitor pode consultar Lachapelle, G. & Kouba, J. (1980).

Na conclusão destes "aspectos conceituais", apresenta-se o modelo de transformação (3), reescrito na forma segundo a qual foi programado para esta pesquisa. Ela resulta da aplicação da (8) à equação (3), como se vê a seguir:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_i^2 \sin i \end{bmatrix} + (N_i + H_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi_i \cos \lambda_i \\ \cos \phi_i \sin \lambda_i \\ \sin \phi_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

Nessa expressão alternativa, parametrizam-se as alturas elipsoidais  $h_i$  ao invés dos desníveis geoidais. A vantagem que se aufer com tal procedimento é a geração de um arquivo de coordenadas geodésicas altimétricas, não afetadas pelos erros das altitudes ortométricas, atualmente disponíveis para as estações conectoras. Com isso, os desníveis geoidais  $v_i$  poderão ser corrigidos a qualquer momento, a cada refinamento de altitudes ortométricas, através de simples subtrações baseadas na (8). Naturalmente, deve-se proceder à composição de erros para se avaliar a estimativa da determinação geoidal resultante.

### 3.2 Ajustamento de Observações

Nesta divisão, destaca-se a derivação de matrizes para o ajustamento de observações, pelo M.M.Q, do modelo expresso pela (9), tendo-se em vista otimizar a programação computacional daquele processo. Em Gemael, C. (1974) o leitor encontra os fundamentos teóricos dos diferentes métodos de ajustamento, sob o enfoque matricial.

No ajustamento do modelo (9), as coordenadas geodésicas 2-D ( $\phi_i, \lambda_i$ ), das estações conectoras, serão assumidas como constantes do processo. A princípio, justifica-se tal procedimento pela não disponibilidade das estimativas de precisão correspondentes. Mais adiante, porém, veremos que o efeito daquela premissa, discutível, é absolutamente irrelevante, em termos de resultados. Fica claramente caracterizada, portanto, a opção pelo método paramétrico de ajustamento. Com efeito, no modelo (9) delinea-se uma relação do tipo:

$$F(x_a) = L_a \quad (10)$$

entre parâmetros e observações ajustados,  $x_a$  e  $L_a$ , respectivamente. O modelo estudado é tipicamente linear.

Sejam o número de estações conectoras selecionadas para o ajustamento de (9). Então teremos:

Número de equações =  $3n$

Número de incógnitas =  $n + 3$

Portanto, o número de graus de liberdade é dado por  $2n - 3$ , o que implica na necessidade de, pelo menos, 2 pontos para se realizar o ajustamento.

O vetor de parâmetros ajustados será considerado na forma:

$$x_a^T = [TX \ TY \ TZ \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_i \ \dots \ h_n]$$

A fórmula de cálculo é dada por:

$x_a = x_0 + x$ , onde

$x_0$ : vetor de valorizações iniciais de parâmetros

$x$ : vetor correções a  $x_0$ .

Faremos  $x_0 = [0 \ 0 \ \dots \ 0]$

Logo  $x_a = x$ . A fórmula para  $x$  é dada por:

$$x = (A^T P A)^{-1} \cdot A^T P L, \text{ onde: } (12)$$

a)  $A = \frac{\partial F}{\partial x_a} \Big|_{x_0}$ : matriz  $[3n \times (n + 3)]$  de derivadas parciais das equações, em relação a parâmetros, aplicada em  $x_0$ .

b)  $P$ : matriz peso das observações. Tem-se:

$P = \sigma_0^{-2} \sum L b^{-1}$ , onde

$\sigma_0^2$ : variância da unidade de peso a priori.

$\sum L b$ : matriz variância-covariância (MVC) das observações  $L b$  (coordenadas-satélite). Sua dimensão é  $[3n \times 3n]$ . Tem-se:

$$L b = [X_1 \ Y_1 \ Z_1 \ \dots \ X_i \ Y_i \ Z_i \ \dots \ X_n \ Y_n \ Z_n] \quad (13)$$

Não se consideram correlações entre as observações. Isto não é exato, mas é o melhor possível, no momento. Um mesmo erro, calculado em função do número de passagens de satélite aproveitadas na  $i$ -ésima estação, será atribuído a cada uma das

três observações a ela associadas, ou seja,  $\sigma X_i = \sigma Y_i = \sigma Z_i = \sigma_i$ . Com isso, obtêm-se uma matriz peso diagonal, do seguinte tipo:

$$P = \begin{bmatrix} P & & \bar{0} \\ & P_i & \\ \bar{0} & & P_n \end{bmatrix}_{3n}, \text{ onde} \quad (14)$$

$$P_i = \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & P_i & 0 \\ 0 & 0 & P_i \end{bmatrix}, \text{ sendo } P_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$$

$$c) L = I \cdot o - L_b = F(x_0) - L_b \quad (15)$$

O vetor de resíduos das observações é dado por:

$$v = \Delta x + L$$

Todavia, por motivo que se evidenciará adiante, dada pela MVC dos parâmetros do vetor v, através de sua própria definição, qual seja:

$$v = La - L_b \Rightarrow v = F(x_a) - L_b \quad (16)$$

Quanto à estimativa de precisão do ajustamento, dada pela MVC dos parâmetros ajustados  $\sum x_a$ , tem-se:

$$\sum x_a = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1}, \text{ onde} \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{g} : \text{ variância da unidade de peso a posteriori; } g \text{ é o número de graus de liberdade } \Rightarrow g = 2n - 3$$

Considerando-se

$$\sum x_a = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 x_2 & \dots & x_1 x_i & \dots & x_1 x_u \\ x_1^2 & x_2 & \dots & x_2^2 & \dots & x_2^2 x_u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i x_1 & x_i x_2 & \dots & x_i^2 & \dots & x_i x_u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_u x_1 & x_u x_2 & \dots & x_u x_i & \dots & x_u^2 \end{bmatrix} u$$

onde  $x_i$  representa o  $i$ -ésimo parâmetro de um total de  $u$ , o elemento  $r_{ij}$  da matriz R de coeficientes de correlação será dado por:

$$r_{ij} = \frac{\alpha_i x_j}{\alpha_i \alpha_j}$$

Seguem-se as deduções de matrizes para o ajustamento:

A forma geral da matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}_{3n}, \text{ sendo } A_i = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_a} \right|_{x_0}$$

$F_i$  representa o conjunto das três equações de observação da  $i$ -ésima estação. Portanto, cada bloco  $A_i$   $[3 \times (n + 3)]$  será dado por:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cos \phi \cos \lambda_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cos \phi \sin \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sin \phi & 0 \end{bmatrix}$$

↑ coluna (i+3)

A matriz A pode então ser escrita na forma:

$$A = \begin{bmatrix} I_3 & J_1 & \bar{0} & \bar{0} \\ I_3 & \bar{0} & J_2 & \bar{0} \\ & I_3 & \bar{0} & \bar{0} \\ & & & \bar{J}_n \end{bmatrix}_{n+3}, \text{ onde}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda_i \\ \cos \phi \sin \lambda_i \\ \sin \phi \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a transposta de A assume a forma:

$$A = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 & \dots & I_3 \\ J_1 & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & J_2 & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{J}_n \end{bmatrix}_{n+3}, \text{ onde} \quad (18)$$

$$\bar{J}_i = [\cos \phi \cos \lambda_i \quad \cos \phi \sin \lambda_i \quad \sin \phi] \quad e \quad \bar{0} = [0 \ 0 \ 0]$$

Considerando-se agora as (14) e (18), vem:

$$A P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_n \\ J_1 P_1 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & J_2 P_2 & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{J}_n P_n \end{bmatrix}_{n+3}, \text{ e portanto} \quad (19)$$

$$A^T P A = \begin{bmatrix} \sum P_i & P_1 J_1 & P_2 J_2 & P_n J_n \\ \bar{J}_1 P_1 & \bar{J}_1 P_1 J_1 & 0 & 0 \\ \bar{J}_2 P_2 & 0 & \bar{J}_2 P_2 J_2 & 0 \\ \bar{J}_n P_n & 0 & 0 & \bar{J}_n P_n J_n \end{bmatrix}_{n+3}, \text{ onde} \quad (20)$$

$$\sum_i P_i = \begin{bmatrix} \sum P_i & 0 & 0 \\ 0 & \sum P_i & 0 \\ 0 & 0 & \sum P_i \end{bmatrix}, \quad P_i J_i = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda_i \\ \cos \phi \sin \lambda_i \\ \sin \phi \end{bmatrix}$$

$$J_i P_i = [\cos \phi \cos \lambda_i \quad \cos \phi \sin \lambda_i \quad \sin \phi] \quad e \quad J_i P_i J_i = \cos^2 \phi \cos^2 \lambda_i + \cos^2 \phi \sin^2 \lambda_i + \sin^2 \phi = 1$$

Da (15), considerando-se as (9), (11) e (13), resulta:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}_{3n}, \text{ sendo } L_i = \begin{bmatrix} N_i \cos \phi \cos \lambda_i - X_i \\ N_i \cos \phi \sin \lambda_i - Y_i \\ N_i (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi - Z_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

Considerando-se a (19) e as (21) vem:

$$A^T P L = \begin{bmatrix} \sum P_i L_i \\ \bar{J}_1 P_1 L_1 \\ \bar{J}_2 P_2 L_2 \\ \vdots \\ \bar{J}_i P_i L_i \\ \vdots \\ \bar{J}_n P_n L_n \end{bmatrix}_{n+3}, \text{ onde} \quad (22)$$



$$\sum_i PiLi = \begin{bmatrix} \sum pi(Nicos\phiicos\lambda_i - Xi) \\ \sum pi(Nicos\phiisen\lambda_i - Yi) \\ \sum pi(Ni(1-e^2)\sen\phi_i - Zi) \end{bmatrix}, e$$

$$\begin{aligned} \bar{P}iLi &= Pi[Nicos^2\phiicos^2\lambda_i - Xicos\phiicos\lambda_i + Nicos^2\phiisen^2\lambda_i - \\ &Yicos\phiisen\lambda_i + Nisen^2\phi_i - Nie^2\sen^2\phi_i - Zisen\phi_i] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{P}iLi = pi[Ni(1-e^2)\sen^2\phi_i] - (Xicos\phiicos\lambda_i + Yicos\phiisen\lambda_i + \\ &Zisen\phi_i) \end{aligned}$$

As matrizes (20) e (22), consideradas suas estruturas aqui deduzidas, podem ser facilmente programadas. A partir das mesmas, resolve-se a (12), que no caso, proporciona o próprio vetor  $x$  de parâmetros ajustados. O cálculo das (16) e (17) é mera consequência.

#### 4. Experiências

Tendo em vista o ajustamento pelo M.M.Q. de equações de observação, constituídas segundo o modelo expresso pela (9), desenvolveu-se o programa PTMG, em linguagem FORTRAN, para o sistema IBM/370 MOD 3032 (IBGE). Na DIVISÃO 3.2 encontra-se as matrizes e equações fundamentais para aquele ajustamento.

O programa PTMG seleciona os dados necessários à solução da conexão NSWC 9Z-2 — SAD 69, diretamente do arquivo DIMEFSAT, constituído pela Divisão de Métodos Físicos e Orbitais da Superintendência de Geodésia/IBGE. Naquele arquivo constam as principais informações geodésias disponíveis para todas as posições isoladas Doppler, estabelecidas pelo IBGE, sem restrição quanto ao tipo de efemérides empregadas em cada processamento. Logicamente, a condição de aproveitamento de uma estação qualquer do DIMEFSAT, no caso desta pesquisa, é que ela pertença à rede planimétrica de 1º ordem e tenha sido processada com efemérides precisas.

Os recursos do programa PTMG serão evidenciados nas próximas divisões, através dos próprios comentários referentes a resultados obtidos. Mas, convém agora abordar o critério adotado para ponderação de observações.

O PTMG pode operar com duas alternativas de ponderação, selecionadas através da variável KEYP. Para KEYP=1, considera-se  $P=I_{3n}$ , como se todas as observações apresentassem a mesma precisão. Para KEYP=2, monta-se a MVC das observações ( $\sum Lb$ ) conforme o processo já descrito na divisão 3.2, ou seja, atribuindo-se um mesmo erro  $\sigma_i$  às três observações  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$  relativas à  $i$ -ésima estação. O critério base adotado segue a linha geral proposta pelo DMA dos E.U.A (memorando de 17/08/84, sobre precisão de posições isoladas Doppler), abaixo transcrito para o caso de posições isoladas Doppler consistentes com o NSWC 9Z-2:

Se  $NPA \geq 35$ , então  $\sigma_i = 1,5m$   
 Se  $20 \leq NPA < 35$ , então  $\sigma_i = 2,0m$   
 Se  $NPA < 20$ , então  $\sigma_i = 2,5m$ ,

sendo NPA o número de passagens de satélites aproveitadas. Ao invés de se fixar as estimativas de precisão acima, porém, os erros  $\sigma_i$  foram tratados como variáveis do programa (ER1, ER2, ER3). Com isso, tornou-se possível experimentar ponderações variadas,

em cada teste, em busca da melhor estimativa para a variância da unidade de peso "a posteriori" ( $\hat{\sigma}_o^2$ ). Como se sabe, tal valor deve, em condições adequadas de modelagem e ponderação, resultar, estatisticamente, igual à variância "a priori" ( $\hat{\sigma}_o^2$ ), segundo o conhecido teste da distribuição  $X^2$ . O valor  $\sigma_o^2 = 1m^2$  foi adotado para todos os testes.

O PTMG foi testado mediante a montagem de um sistema consistente de equações de observação. Quatro estações conectoras foram, arbitrariamente, selecionadas no DIMEFSAT. Seus respectivos valores de desnível geoidal (interpolados do mapa de base astro-geodésica) e de altitude ortométrica foram usados para compor as alturas elipsoidais  $h_i$  do modelo (9). Com três valores sendo arbitrados para as componentes do vetor translação, fabricaram-se "observações" para cada estação, segundo o modelo analisado. Os resultados da execução do programa evidenciaram uma perfeita recuperação dos parâmetros arbitrados. Os resíduos das observações resultaram nulos, como era de se esperar. A ponderação de observações, no caso, é irrelevante; simplesmente considerou-se  $KEYP = 1$ .

##### 4.1. A questão da Escala

Das alturas elipsoidais ajustadas, resultantes do PTMG, subtraem-se as correspondentes altitudes ortométricas, tendo-se em vista a obtenção de desníveis geoidais, também listados pelo programa. Uma simples inspeção dos resultados da primeira experiência realizada com a totalidade das estações conectoras disponíveis, revelou uma diferença sistemática bastante significativa entre os desníveis resultantes ( $v$ ) e os respectivos valores interpolados do mapa de base astro-geodésica ( $\bar{v}$ ). Tomando-se uma amostra de 20 pontos, verificou-se uma diferença média de cerca de 15m entre as duas determinações geoidais, no sentido  $\bar{v}-v$ . Difícilmente poder-se-ia atribuir tal diferença à esperada deficiência da determinação de base astro-geodésica. Fazia-se necessária uma explicação para o fato.

Com respeito à diferença média  $\bar{v}-v$ , era bem sintomática a coincidência entre o valor encontrado e a diferença de semi-eixos maiores dos elipsóides associados ao SAD 69 ( $a = 6378160m$ ) e ao NSWC 9Z-2 ( $a = 6378145m$ ). Parecia provável a existência de alguma relação entre aquelas diferenças.

Ora, as observações ( $X, Y, Z$ ) — coordenadas cartesianas consistentes com o TM — são simplesmente o produto final do processamento de cada estação Doppler, a menos, é claro, de possíveis "correções" necessárias à compatibilização do sistema Doppler com o TM, conhecidas e aplicadas pelo programa PTMG, no caso do NSWC 9Z-2 (vide 3.1.). Nenhum elipsóide de referência participa do processo de posicionamento pelo método Doppler, sendo perfeitamente possível, em tese, adotar-se um elipsóide qualquer para obtenção de coordenadas curvilíneas ( $\phi, \lambda, h$ ) a partir das cartesianas ( $X, Y, Z$ ). Entretanto, um determinado elipsóide definido pelos parâmetros:

$a_s = 6378145m$   
 $e^2_s = 0,006694542$

é o utilizado com aquela finalidade, no caso do NSWC 9Z-2. Nota-se a igualdade de valores associados de excentricidade primeira, entre aquele sistema e o SAD 69. Os respectivos achatamentos são iguais a 1/298,25.

O método de obtenção de  $a_s$  foi o seguinte: parametrizan-

...se o semi-eixo maior de um elipsóide de revolução, procedeu-se à um ajustamento do mesmo ao geóide, em escala global; as observações para esse ajustamento resultaram dos vetores geocêntricos de um conjunto de estações Doppler, distribuídas pela superfície terrestre, subtraídos dos respectivos "vetores altitude ortométrica"  $h_i$  de cada estação. Portanto, no caso do NSW 9Z-2, o elipsóide de referência, a ele convencionalmente associado, apresenta, de fato, dimensão consistente com a unidade ou padrão de medida linear implícita às coordenadas cartesianas (X, Y, Z). O valor  $a_s$ , pode-se dizer, é a medida resultante para a dimensão da figura da Terra, estimada com o padrão métrico do sistema Doppler NSW 9Z-2. Seja qual for o padrão métrico implícito às coordenadas Doppler, o fato é que as alturas elipsoidais  $h_i$  resultantes do ajustamento do modelo (9), grandezas supostamente referidas ao elipsóide regional, vão absorver, através do ajustamento, aquele padrão de medida linear. E da mesma forma, é claro, também as componentes do vetor-translação. Com efeito, supostamente ao que se verifica mediante a aplicação de modelos clássicos, do tipo (7), no modelo (9) não existe confronto entre duas métricas distintas, porquanto as grandezas lineares presentes em seu membro direito são, precisamente, suas incógnitas. São as observações Doppler, por conseguinte, que, no modelo (9), definem a escala das grandezas parametrizadas.

Nesse estágio, começava a tornar-se evidente que a discrepância verificada, entre as duas determinações geoidais decorria, antes, de um problema de escala, do que de alguma deficiência geométrica do modelo estudado. No entanto, faltava ainda uma melhor compreensão do porquê da incidência de um problema de escala, na aplicação focalizada daquele modelo. A diferença de 15m entre os semi-eixos maiores associados ao SAD 69 e ao NSW 9Z-2 parecia indicar o caminho a seguir.

Ora, toda determinação geoidal de base astro-geodésica, como a disponível para comparação no caso do SAD 69, é sempre consistente com a dimensão do elipsóide de referência, não fossem a ele reduzidas as medidas lineares necessárias ao transporte de desníveis geoidais. Torna-se evidente, portanto, a razão da discrepância verificada entre as duas determinações geoidais. Simplesmente o padrão métrico das alturas elipsoidais  $h_i$  e, por extensão, dos desníveis geoidais  $v_i$  resultantes da aplicação do modelo (9), é consistente com a medida do semi-eixo maior do NSW 9Z-2, mas não com a medida correspondente do SAD 69.

Uma forma alternativa de compreensão do problema de escala verificado no uso do modelo (9), consiste em se equacionar a transformação entre os dois sistemas através de fórmulas diferenciais, para coordenadas curvilíneas, preservando-se, analogamente, a filosofia de parametrização das alturas  $h_i$ . Dessa forma, pode-se escrever, considerando-se a aproximação esférica e a igualdade de achatamentos verificada no caso (Heiskanen, W & Moritz, H. (1987)):

$$\begin{aligned} \phi^i &= \phi + (\sin \phi \cos \lambda_i TX + \sin \phi \operatorname{isen} \lambda_i TY - \cos \phi iTZ) / a \\ \lambda^i &= \lambda + (\sin \lambda_i TX - \cos \lambda_i TY) / (a \cos \phi_i) \\ h^i &= h_i - \cos \phi \cos \lambda_i TX - \cos \phi \operatorname{isen} \lambda_i TY - \sin \phi iTZ - \delta a \end{aligned} \quad (23)$$

Nas (23), as incógnitas aparecem sublinhadas e  $a = a_s - a = -15m$ . As observações  $(\phi_i^s, \lambda_i^s, h_i^s)$  seriam obtidas pela transformação elementar de coordenadas cartesianas  $(X_i, Y_i, Z_i)$  — já compatibilizadas com TM —, em curvilíneas, utilizando-se, para tanto, o semi-eixo ( $a_s$ ) do NSW 9Z-2. Nota-se na terceira equação a necessidade de se considerar a discrepância  $\delta a$  entre os dois

semi-eixos, posto que os ternos  $(\phi_i, \lambda_i, h_i)$  possam referir-se a um elipsóide diferente, como de fato acontece no caso estudado. É fácil perceber que a informação  $\delta a$ , simplesmente, não é considerada, no modelo (9). No entanto, não pode deixar de existir uma perfeita analogia entre aquele modelo e o representado pelas (23), na medida em que ambos equacionam o mesmo problema com a mesma filosofia, apenas com tratamentos matemáticos distintos. Restava, finalmente, resolver essa questão da escala na aplicação do modelo (9), de tal forma que a determinação geoidal resultante fosse comparável com a de base astro-geodésica. Duas soluções foram experimentadas. A primeira, mais rigorosa, consiste em se aplicar correções de escala  $\delta L$  sobre as coordenadas cartesianas  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , "a priori" do ajustamento. O conceito básico para essa operação é a correspondência existente entre os semi-eixos  $e$  e  $a_s$ ; são apenas medidas diferentes de uma mesma grandeza, qual seja, a dimensão da figura da Terra. Sendo então  $(X^i, Y^i, Z^i)$  as coordenadas já compatibilizadas com o padrão métrico do semi-eixo do SAD 69, pode-se escrever:

$$\frac{X^i}{X_i} = \frac{Y^i}{Y_i} = \frac{Z^i}{Z_i} = \frac{6378160}{6378145} = 1 + \frac{15}{6378145}$$

$$\begin{aligned} X^i &= X_i(1 + \delta L) \\ Y^i &= Y_i(1 + \delta L) \\ Z^i &= Z_i(1 + \delta L) \end{aligned} \quad (24)$$

onde  $L = 15/6378145 = 2,35$  p.p.m. é o fator corretivo de escala. Apesar das novas observações  $(X^i, Y^i, Z^i)$  serem, numericamente, diferentes das originais, essa variação não implica em qualquer tipo de deslocamento espacial do sistema geocêntrico ou do conjunto de estações conectoras. Ela, simplesmente, decorre da adoção de um novo padrão métrico para as observações. É como se as gradações dos eixos do sistema cartesiano  $[X Y Z]$  fossem redefinidas. A segunda solução para o problema da escala, consiste em se calcular coordenadas cartesianas  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , em substituição às originais  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , partindo-se das curvilíneas  $(\phi^i, \lambda^i, h^i)$  mas utilizando-se o semi-eixo do elipsóide do SAD 69. Para todas as aplicações correntes em Geodésia, esta solução equivale à primeira conforme demonstrado por Soler, T. (1976); ou seja,  $\bar{X}_i = X^i, \bar{Y}_i = Y^i$  e  $\bar{Z}_i = Z^i$ . A vantagem de sua aplicação, no caso do programa PTMG, restringe-se a aspectos meramente computacionais. Todas as saídas do PTMG de fato confirmaram a equivalência das duas alternativas propostas para a solução do problema de escala. Os desníveis geoidais resultaram, finalmente, coerentes com a determinação de base astro-geodésica. O vetor-translação encontrado no teste realizado com a totalidade das 107 estações conectoras foi:

$$TX = -89,20m \quad TY = -42,11m \quad TZ = -42,98m$$

Uma comparação interessante pode ser feita entre esse vetor e o obtido "a priori" da correção do problema de escala. Nas mesmas condições iniciais de dados e ponderação, obteve-se:

$$\bar{TX} = -89,24m \quad \bar{TY} = -42,07m \quad \bar{TZ} = -42,99m$$

São praticamente idênticos, como se pode notar. As pequenas variações observadas poderão encontrar justificativa na próxima divisão, no estudo da questão das correlações. Finalmente, convém observar a possibilidade de uma terceira alternativa para



solução do problema de escala do modelo (9), realizável "a posteriori" do ajustamento. Ela consiste em se aplicar diretamente, sobre as alturas elipsoidais resultantes, o efeito da discrepância  $a$ , de acordo com a terceira das (23), ou com alguma fórmula mais rigorosa. Nesse caso, é importante atentar para o posicionamento relativo dos dois elipsóides no espaço. O do NSWC 9Z-2 está acima do elipsóide regional, na área de abrangência do território brasileiro.

#### 4.2 A questão das Correlações

Um aspecto importante a se considerar, mas frequentemente esquecido, no estudo de modelos para determinação de parâmetros de transformação entre referenciais geodésicos, é a questão das correlações entre os parâmetros. Esse tema, e suas implicações sobre a utilização do modelo (9), serão agora analisados.

As correlações informam o grau de interdependência entre os parâmetros de um modelo. Quanto maior a dificuldade na separação de efeitos geométricos que se pretenda modelar através de parâmetros, tão mais elevadas resultarão as correlações entre os mesmos. É o caso típico de translações e rotações no modelo Bursa-Wolf (vide 3.1) quando aplicado a um problema de transformação do mesmo tipo focalizado neste trabalho. Isto porque o efeito de uma translação é o mesmo de uma rotação em torno de um ponto no infinito e, no caso daquele modelo, o centro de rotação encontra-se muito afastado da área de distribuição das estações conectoras. É importante observar, contudo, a possibilidade de se alferar uma condição de correlações elevadas, em função da natureza da aplicação. No caso do modelo Bursa-Wolf, por exemplo, as referidas correlações tendem a diminuir, sensivelmente, em problemas para os quais se disponha de um conjunto de estações conectoras distribuídas por toda a superfície terrestre (possível conexão de sistemas de satélite).

Ao contrário do que se pode pensar, a incidência de correlações elevadas, entre os parâmetros de um modelo de conexão de sistemas geodésicos, não exerce qualquer influência sobre a qualidade dos resíduos obtidos em ajustamentos de equações de observação, segundo ele constituídas; tais resíduos resultarão tão mais "satisfatórios", estatisticamente, quanto maior a capacidade de parametrização da realidade física, apresentada pelo modelo. Equivalentemente, pode-se dizer que a consistência interna do ajustamento de equações de observação para um determinado modelo, independe das correlações geradas entre seus parâmetros. Aliás, os coeficientes de correlação podem ser calculados sem necessidade de se proceder a qualquer ajustamento, como se pode notar na fórmula para  $r_{ij}$ , dada em 3.2. Uma vez estabelecidos o modelo e o conjunto de estações conectoras, as correlações ficam perfeitamente definidas.

O aspecto realmente crítico da incidência de correlações elevadas, entre parâmetros de transformação é bem colocado por Hoar, G. J. (1982). Elas prejudicam a exatidão ou precisão absoluta das estimativas dos parâmetros. Assim, é possível acontecer de um modelo equacionar bem determinada transformação, sem que as estimativas de seus parâmetros, mesmo quando realizadas sob condições adequadas, sejam consistentes com suas respectivas concepções geométricas. Tal é o caso das translações a propósito, no modelo Bursa-Wolf. Aliás, se fosse possível, através daquele modelo, estimar-se um vetor-translação não correlacionado com os demais parâmetros, não haveria qualquer impedimento em se

resolver o problema de conexão que nos propomos, através de Bursa-Wolf. Simplesmente, adotarmos o vetor-translação resultante, para realizar a transformação entre os sistemas definidos.

O modelo pesquisado neste trabalho, expresso pela (9), não está livre do problema das correlações entre suas grandezas incógnitas. Para se analisar melhor essa questão, programou-se o PTMG de tal forma que os coeficientes de correlação entre seus parâmetros fossem calculados e listados em cada teste. Apresentam-se, na seqüência, os resultados observados.

Sejam (A), (B) e (C), respectivamente, os seguintes tipos de correlação: entre componentes do vetor-translação, entre translações e alturas elipsoidais e entre alturas elipsoidais. A primeira mudança significativa, constatada nas correlações, verificou-se com a variação do número de estações conectoras aproveitadas; quanto maior o número de estações, menores as magnitudes dos três tipos de correlação. As correlações do parâmetro TX com todos os demais parâmetros são sempre negativas; todas as demais correlações são sempre positivas. Em média, as magnitudes das correlações de TX e de TY se equivalem; já as correlações de TZ apresentam magnitude ligeiramente menor. Operando-se com a de correlações: entre 0,8 e 0,9 para as do tipo (A); entre 0,4 e 0,5 para as do tipo (B); entre 0,2 e 0,3 para as do tipo (C).

Os resultados obtidos para os diferentes tipos de correlação resultantes do modelo (9), devem ser analisados à luz de dois aspectos interligados: em média, a magnitude das correlações diminui com a expansão do universo de estações conectoras; mas com isso, além daquela diminuição não resultar em valores que se possa considerar pouco significativos, pelo menos até o limite das 107 estações disponíveis, existe ainda o problema de se aumentar o número de correlações incidentes sobre cada parâmetro. E com uma agravante, qual seja: todas as correlações que incidem sobre um mesmo parâmetro são de mesmo sinal. Ainda por cima, todas as correlações incidentes sobre as incógnitas altimétricas também são de mesmo sinal (positivas).

Com respeito às componentes de translação, realizou-se uma constatação importante acerca da influência sobre eles exercida pelas correlações; mais precisamente, sobre a componente terciária (TZ). Em decorrência das baixas latitudes de nossas estações os erros incidentes sobre as componentes altimétricas dos termos ( $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) relativos ao SAD 69, quando estes são utilizados numa simples determinação de parâmetros de translação daquela sistema, em relação a um geocêntrico, não exercem influência significativa sobre a componente TZ. Essa constatação foi realizada para o caso da conexão NSWC 9Z-2 - SAD 69, confortando-se o vetor-translação obtido por Kadlec, F. A. & Gomes, J. P. (1978) (vide introdução) com o resultante de uma metodologia recentemente desenvolvida no IBGE, válida para aquele tipo de conexão, mediante a qual determina-se o vetor-translação entre os sistemas definidos, prescindindo-se de informações geoidal e altimétrica (os parâmetros de transformação obtidos segundo essa técnica não se correlacionam com outras grandezas). As duas determinações proporcionam componentes TZ, estatisticamente iguais, em torno de -40,5m, com desvio-padrão inferior a 1m. Por seu turno, o valor de TZ resultante da aplicação do modelo (9) foi de -43,0m, também com desvio-padrão inferior a 1m. Ora, considerando-se que o modelo (9), sequer é afetado por imprecisão geoidal, ou de informação altimétrica, a diferença constatada nas determinações de TZ só pode ser atribuída às correlações incidentes sobre aquele parâmetro, no modelo (9). Para TX e TY verifica-se o mesmo tipo de efeito. Assim sendo, existe forte motivo para se



duvidar que o vetor translação do modelo (9), represente uma boa estimativa do vetor-posição da origem do SAD 69 em relação à do TM.

Também a determinação geoidal, obtida através do modelo estudado, encontra-se afetada pelas correlações de cada incógnita altimétrica com todos os demais parâmetros. Assim, conquanto aquela determinação possa apresentar boa consistência interna, coloca-se em dúvida sua exatidão. De fato, os resultados obtidos nos vários testes realizados (vide 4.3) demonstram um comportamento ótimo do modelo, no processo de ajustamento de observações. Mas isso não basta para assegurar que as estimativas dos parâmetros apresentem boa exatidão. Tal é o efeito da incidência de correlações significativas entre as incógnitas do modelo (9). O traçado do mapa geoidal, resultante de sua aplicação, poderá fornecer subsídios a uma avaliação mais precisa da extensão daquele efeito sobre a determinação do geóide.

### 4.3 Resultados

Nosso principal objetivo nesta parte do trabalho, concernente à execução de testes com o modelo (9), foi o de chegar a um ajustamento ótimo com o maior número possível de estações conectoras, tendo em vista o traçado do mapa geoidal SAD 69. No quadro 1, apresenta-se uma síntese de resultados em que se procura destacar o comportamento dos parâmetros de translação, com variações na ponderação e na quantidade de estações. Todos os resultados foram obtidos "a posteriori" da solução do problema de escala, levantando em 4.1.

O universo de estações conectoras, considerado nos testes de 1 a 4, justifica-se ante a possibilidade de comparação dos respectivos resultados com outros, anteriormente, processados segundo o novo modelo desenvolvido no IBGE (vide 4.2), embora tal comparação não seja focalizada neste trabalho. Como se nota, diferentes ponderações foram experimentadas naqueles primeiros testes. Nenhuma alteração significativa foi observada nos parâmetros de translação, com as mudanças induzidas nos pesos das observações. Até certo ponto, isso era previsível, pelo seguinte: 9 estações preenchem a condição  $20 \leq NPA < 35$ ; as 29 restantes apresentam  $NPA \geq 35$  e são pequenas as diferenças entre ER1 e ER2 (e ER3). Assim, apenas a estimativa de  $\hat{\sigma}_0^2$  varia, sensivelmente, com mudanças nos pesos. Examinando-se, então, em cada teste, o resultado daquela estimativa que deve, em condições ideais, aproximar-se do valor  $1,0000 \text{ (m}^2\text{)}$  fixado para  $\sigma_0^2$ , pode-se chegar a uma ponderação ótima para o universo de estações considerado. As estimativas de  $\hat{\sigma}_0^2$  nos testes 2 e 3 indicam ponderações pessimistas ( $\hat{\sigma}_0^2 < 1$ ). No teste 4 a ponderação é algo otimista ( $\hat{\sigma}_0^2 > 1$ ) mas já bem próxima de um critério ótimo. Tais experiências, concernentes à questão de ponderação, sempre revelaram a necessidade de se considerar especificações pouco menos otimistas que as preconizadas pelo DMA para ER1, ER2 e ER3, anteriormente apresentadas.

No teste 5, manteve-se com sucesso a mesma ponderação utilizada no 4, apesar de ter-se ampliado o universo de estações para um total de 74 pontos. Observam-se, então, em relação ao teste 4, variações significativas nos parâmetros de translação notadamente em Tx e Ty. Esse tipo de resposta, da parte de um modelo através do qual pretende-se resolver a transformação entre sistemas definidos, não é bem recebido, relaciona-se, em alto grau, com o já discutido problema das correlações. Aliás, a comparação das alturas elipsoidiais resultantes para estações comuns

aos testes 4 e 5 revela, igualmente, grandes variações nas estimativas daquelas grandezas, muito embora tais discrepâncias sejam, via de regra, englobadas pela composição dos correspondentes desvios-padrão. Isso porque a estimativa de precisão das incógnitas altimétricas resulta muito prejudicada nos casos de pequenos universos de observações. Por exemplo, no teste 4 temos em média um desvio-padrão de 6m para as alturas elipsoidiais; já no 5, esse valor cai para 3,5m.

Os testes de 6 a 9 foram realizados já com o intuito de se processar um ajustamento ótimo, aproveitando-se a totalidade dos dados disponíveis. Inicialmente, a experiência com KEYP = 1 evidenciou a necessidade de se adotar um critério de ponderação menos otimista que o dos testes 4 e 5 (vide estimativa de  $\hat{\sigma}_0^2$ ). Os pesos adotados no teste 7 revelaram-se ainda passíveis de refinamento. Por fim, ao ajustamento base para o mapa geoidal. A providência tomada no teste 9 foi tão somente a de se excluir do ajustamento algumas estações para as quais pode-se confirmar a ocorrência de problemas localizados, como destruição de marcos, menor confiabilidade na informação altimétrica disponível etc. As primeiras experiências de traçado automatizado do mapa geoidal, apoiadas nos registros dos trabalhos de campo do IBGE, facilitaram a detecção de problemas daquela natureza. A determinação do Geóide SAD 69, apresentada como produto final deste trabalho, corresponde à obtida no teste 9.

Resulta muito interessante a confrontação dos resultados do quadro 1 com alguns obtidos no IBGE, mediante a técnica convencional de extração de desníveis geoidais do mapa de base astro-geodésica, equacionando-se a transformação apenas com translações e um fator de escala (parametrização parcial do modelo Bursa-Wolf). São praticamente iguais, as estimativas das translações resultantes dos dois métodos quando aplicados sob condições similares. De forma equivalente ao conjunto de incógnitas altimétricas do modelo (9), o fator de escala resulta fortemente correlacionado com as translações na técnica convencional, sendo impossível determinar esses parâmetros, simultaneamente, de forma não tendenciosa. É o problema das correlações presente na aplicação do modelo (9).

Outra constatação realizável com base no quadro 1 é a da melhor definição de TZ, relativamente a TX e TY. Não apenas sua estimativa mostra pouca variação com a mudança de dados em cada teste, como também é sempre mais precisa que as de TX e TY. Ocorre o seguinte: a baixa latitude média das estações conectoras proporciona geometria favorável a uma determinação mais precisa de TZ, sendo também, por essa razão, menor a influência sobre aquela componente, de suas correlações com as incógnitas altimétricas. Todavia, essa influência não deixa de ser significativa, conforme observado em 4.2.

Os resíduos cartesianos do ajustamento são padronizados pelo programa PTMG. As médias e desvios-padrão de cada conjunto de resíduos padronizados ( $\bar{v}_X$ ,  $\bar{v}_Y$  e  $\bar{v}_Z$ ) também são calculados e listados. O comportamento observado para esses indicadores estatísticos foi ótimo em todos os testes realizados sob condições adequadas de ponderação. Por exemplo, no teste 8 as médias resultaram 7,6 e 4mm, na ordem acima, e os desvios-padrão foram de 0,821, 0,758 e 0,909m, quando as condições ideais seriam médias nulas e desvios-padrão de 1m. Tais resultados estão bem de acordo com o comportamento previsto para os resíduos de um ajustamento cujas observações sejam coordenadas Doppler (vide características básicas do posicionamento Doppler em 3.1). As melhores respostas, sempre verificadas para os resí-



duos de tipo  $\bar{v}Z$ ; parecem estreitamente relacionadas com a colocação do parágrafo anterior, concernente à baixa latitude média das estações conectoras; pois, com isso, são as componentes terciárias dos vetores-posição de cada ponto, no sistema regional, que resultam menos afetadas pelos erros presentes nas coordenadas fixadas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ), independentemente da parametrização das componentes altimétricas daqueles vetores. Assim, a boa aderência à distribuição normal, esperada para os erros do posicionamento Doppler, transparece melhor para as componentes terciárias das observações. Os resíduos de tipo  $\bar{v}X$  e  $\bar{v}Y$ , por seu turno, sofrem mais os efeitos de erros em ( $\phi$ ,  $\lambda$ ). Isto se observa melhor através dos resíduos elipsoidais, correspondentes aos cartesianos, também calculados e listados pelo PTMG. É sintomático o fato das estações conectoras do tipo EP (estação poligonal), via de regra apresentarem as maiores magnitudes para os resíduos  $v\phi^s$  e  $v\lambda^s$ . No teste 8,  $|v\phi^s|$ , máximo, foi de 0,303" para a estação 90720 (Pará);  $|v\lambda^s|$ , máximo, resultou 0,364" para 90939 (Goiás). Ambas são estações poligonais, tendo sido aproveitadas 101 e 41 passagens de satélite em suas respectivas operações de rastreamento. A 90720, aliás, foi uma das excluídas no teste 9, para o traçado final de mapa geoidal. A exclusão dessas estações, com resíduos elipsoidais visivelmente acima da média, em módulo, não chega a afetar, significativamente, os parâmetros de translação, como foi possível observar em testes não registrados no Quadro 1. Com efeito, distorções em  $\phi$  e  $\lambda$  exercem pouca influência sobre o vetor-translação.

Os resíduos altimétricos anulam-se em todas as estações. Esse resultado está inteiramente de acordo com o previsto, face à parametrização das alturas elipsoidais  $h_i$ . O "fechamento altimétrico" teria mesmo que resultar perfeito para o modelo (9). A estimativa de precisão dos parâmetros de translação pode ser considerada muito boa, face à precisão obtível para as coordenadas Doppler.

## 5. Mapa Geoidal

Na fig. 7, apresenta-se o mapa geoidal SAD 69, resultante da aplicação do modelo estudado, sob as condições gerais do teste nº 9 do Quadro 1. O traçado das iso-curvas resultou da aplicação de um programa apropriado da CALCOMP, o GPCP II. Da solução numérica, gravada em fita, passou-se à gráfica mediante uso de "plotter". O arquivo de dados principal para o GPCP II é constituído, linha por linha, pelas coordenadas 2-D de cada estação, em alguma projeção cartográfica, reduzidas a uma certa escala de plotagem; e pelo respectivo valor da função no ponto; caso, tal função é o desnível geoidal. A projeção adotada foi a policônica, com meridiano central de 54°W, e escala 1/22.000.000.

Das 99 estações utilizadas, nada menos que 75 apresentam  $NPA \geq 35$ ; 22 preenchem  $20 \leq NPA < 35$  e apenas duas respondem com  $12 \leq NPA < 20$ . Quanto às altitudes ortométricas das estações, são 65 obtidas por nivelamento trigonométrico, 33 por nivelamento geométrico e apenas 1 por barometria. As estimativas de erro, consideradas para as altitudes correspondentes aquelas técnicas, foram, respectivamente: 1m, 0,005m e 3m. Somente após a conclusão do projeto de ajustamento global da rede altimétrica de 1º ordem, em fase atual de desenvolvimento no IBGE, é que haverá condições de se revisar, criteriosamente, aquelas estimativas. A rede de nivelamento trigonométrico, à qual pertence a maioria das estações, será subsequente, apoiada naquela e também ajustada. As condições indicadas produziram uma determinação geoidal com desvio-padrão da ordem de 3,5m.

A conformação geral do mapa da fig. 7 apresenta boa concordância com a determinação de base astro-geodésica (fig. 1), em particular, na metade oriental do território brasileiro, justamente onde se distribui a grande maioria das estações conectoras. A conhecida deficiência localizada d mapa astrogeodésico, na forma de uma curva, atipicamente sinuosa, entre os limites 18°S/20°S e 42°W/45°W (MG), desaparece na presente determinação. Isso comprova a ocorrência de algum problema nas antigas observações e/ou cálculos astronômicos para aquela região.

Procedeu-se a uma comparação numérica entre as duas determinações geoidais, utilizando-se as 43 estações situadas entre os limites 13°S/19°S e 39°W/60°W. Nessa faixa de enquadramento, as estações apresentam um padrão razoavelmente uniforme de distribuição no sentido E-W, justamente no qual tendem a ocorrer as maiores discrepâncias entre diferentes determinações geoidais para o SAD 69, dada a própria conformação geral das iso-curvas. A média das diferenças modulares foi cerca de 4,6m ( $\sigma=2,5m$ ). Entretanto, não se pode considerar tal discrepância significativa pois, além do desvio-padrão de 3,5m da presente determinação, há que se considerar, ainda, a estimativa de precisão do mapa astro-geodésico, algo em torno de 5m. Essa concordância estatística, entre as duas determinações, pode ser interpretada como indício de uma possível deficiência de exatidão do mapa da fig. 7 pois, como se sabe, aquela é uma característica inerente a toda determinação astro-geodésica que se estenda por grande área de abrangência, como é o caso. A causa mais provável da deficiência de exatidão do mapa geoidal da fig. 7 foi analisada no estudo das correlações entre os parâmetros do modelo (9) (vide 4.2).

Um padrão de distribuição uniforme das estações conectoras favorece a obtenção de bons resultados com o programa GPCP II. O padrão atual é bom na região centro-sul, mas apenas regular no nordeste. A superação dessa deficiência, de ordem operacional, está prevista no planejamento das campanhas do projeto PTMG, para curto prazo. Questão mais crítica, porém é a da insuficiência de pontos de controle no quadrante noroeste do território, onde não chega a rede planimétrica fundamental. Nota-se, no confronto entre as duas determinações, como naquela região surgem diferenças notáveis, na própria conformação das iso-curvas. Para esse problema, pode-se adotar solução análoga à considerada na extensão da base astro-geodésica de Fischer, qual seja: aplicação dos parâmetros de translação, resultantes do modelo (9), sobre as (134) estações Doppler estabelecidas naquela área crítica, em pontos com disponibilidade de informação altimétrica de boa precisão. Haveria, no entanto, que se avaliar a extensão do efeito das correlações incidentes sobre o vetor-translação, obtido através do modelo (9), nos resultados de sua aplicação às coordenadas Doppler.

## 6. Conclusões

O problema das correlações geradas entre suas inúmeras incógnitas é sem dúvida, o mais crítico, na utilização do modelo (9), em transformações do tipo das focalizadas neste trabalho. Os resultados dos vários testes de ajustamento, bem como o próprio mapa geoidal, confeccionando com base em seus parâmetros altimétricos ajustados, parecem confirmar a boa consistência interna do modelo estudado. Todavia, a não ser que se disponha de uma determinação geoidal não tendenciosa — justamente o que se busca obter, em última instância — para comparação, fica difícil avaliar a extensão do efeito das correlações sobre a exatidão da presente determinação.

Essas conclusões justificam, plenamente, a nosso ver, o esforço já desenvolvido na Divisão de Pesquisa em Geodésia, do IBGE, tendo em vista a obtenção de parâmetros de translação que se possa, com boa margem de segurança, considerar como as componentes do vetor-posição da origem do SAD 69, em relação ao Sistema Terrestre Médio. Esperamos, dentro em breve, apresentar a nova metodologia e os resultados com ela obtidos, à comunidade cartográfica nacional.

#### Referências Bibliográficas

- Andrade, J.B., (1984) — Determinação Simultânea de Parâmetros de Transformação entre Referenciais Geodésicos e de Desníveis Geoidais. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas — UFPR, Curitiba, Brasil.
- Fischer, I. — The Geoid in South America, Referred to Various Reference Systems. Revista Cartográfica nº 18 Do IPGH.
- Gemael, C. (1974) — Aplicações do Cálculo Matricial em Geodésia 2ª parte: Ajustamento de Observações. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas — UFPR, Curitiba, Brasil.
- Heiskanen, W. & Moritz, H. (1967) — Physical Geodesy. W. H. Freeman and CO., San Francisco, USA.
- Hoar, G. J. (1982) — Satellite Surveying. Magnavox Advanced Products and Systems Company Torrance, USA.
- Hothem, L. D. (1979) — Determination of Accuracy, Orientation and Scale Proceedings of the Second International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning, Austin, USA.
- Kadlec, F. A. & Gomes, J.P. (1978) — Cálculo de Parâmetros de Transferência de Sistemas Geodésicos. Revista Brasileira de Cartografia nº 22.
- Lachapelle, G. & Kouba, J. (1980) — Relationship between Terrestrial and Satellite Doppler Systems. Collected Papers, Surveys and Mapping Branch, Department of Energy, Mines and Resources, Ottawa, Canada.
- Lambeck, K. (1971) — The Relation of Some Geodetic Datums to a Global Geocentric Reference System. Bulletin Géodésique nº 99
- Leick, A. & Gelder, B. H. W. van (1975) — On Similarity Transformations and Geodetic Network Distortions Based on Doppler Satellite Observations. The Ohio State University, Report of Department of Geodetic Science nº 235, Columbus, USA.
- Mueller, I. I. (1974) — Review of Problems Associated with Conventional Geodetic Datums. The Canadian Surveyor Vol.28, nº 5.
- Soler, T. (1976) — On Differential Transformations between Cartesian and Curvilinear (Geodetic) Coordinate Systems. The Ohio State University, Report of the Department of Geodetic Science nº 236, Columbus, USA.
- Vanicek, P. (1975) — Report on Geocentric and Geodetic Datums. University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering, Technical Report nº 32, Fredericton, Canada.
- Vanicek, P. & Krakiwsky, E. J. (1982) — Geodesy: The Concepts. North Holland Publishing Company, Netherlands.
- Vanicek, P. & Wells, D. E. (1974) — Positioning of Horizontal Geodetic Datums. The Canadian Surveyor Vol 28, nº5.
- Wells, D. E. & Vanicek, P. (1975) — Alignment of Geodetic and Satellite Coordinate Systems to the Average Terrestrial System. Bulletin Géodésique nº 117.





CARTA GEODAL (PRELIMINAR) DO BRASIL

DERIVADA DE DETERMINAÇÕES ASTROGEODÉSICAS COMBINADAS  
COM DETERMINAÇÕES DOPPLER SOBRE PONTOS NIVELADOS

ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA - SAO 69  
(Sistema de Referência UGSI-1967)

- SEM. EIXO MAIOR = 6 378 160 m

- ACHATAMENTO = 1/298,25

- AFASTAMENTO EM DÍG. N. = 0 (ZERO)

FIGURA 1



LEGENDA

- Δ . VÉRTICE DE TRIANGULAÇÃO
- . ESTAÇÃO-POLIGONAL
- . EST.-HIRAM OU EST.-SHIRAH

FIGURA 2





FIGURA 3





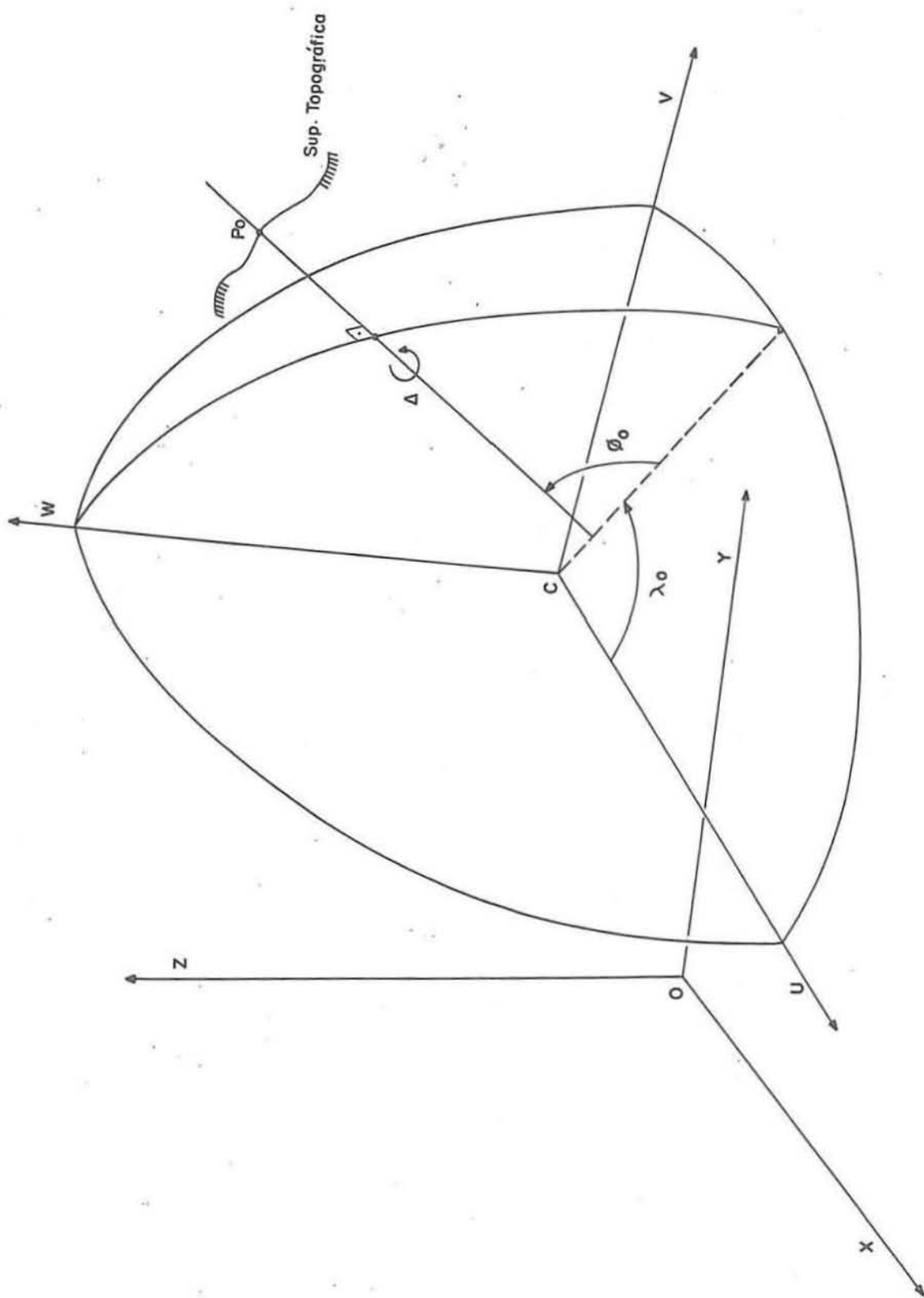


FIGURA 5





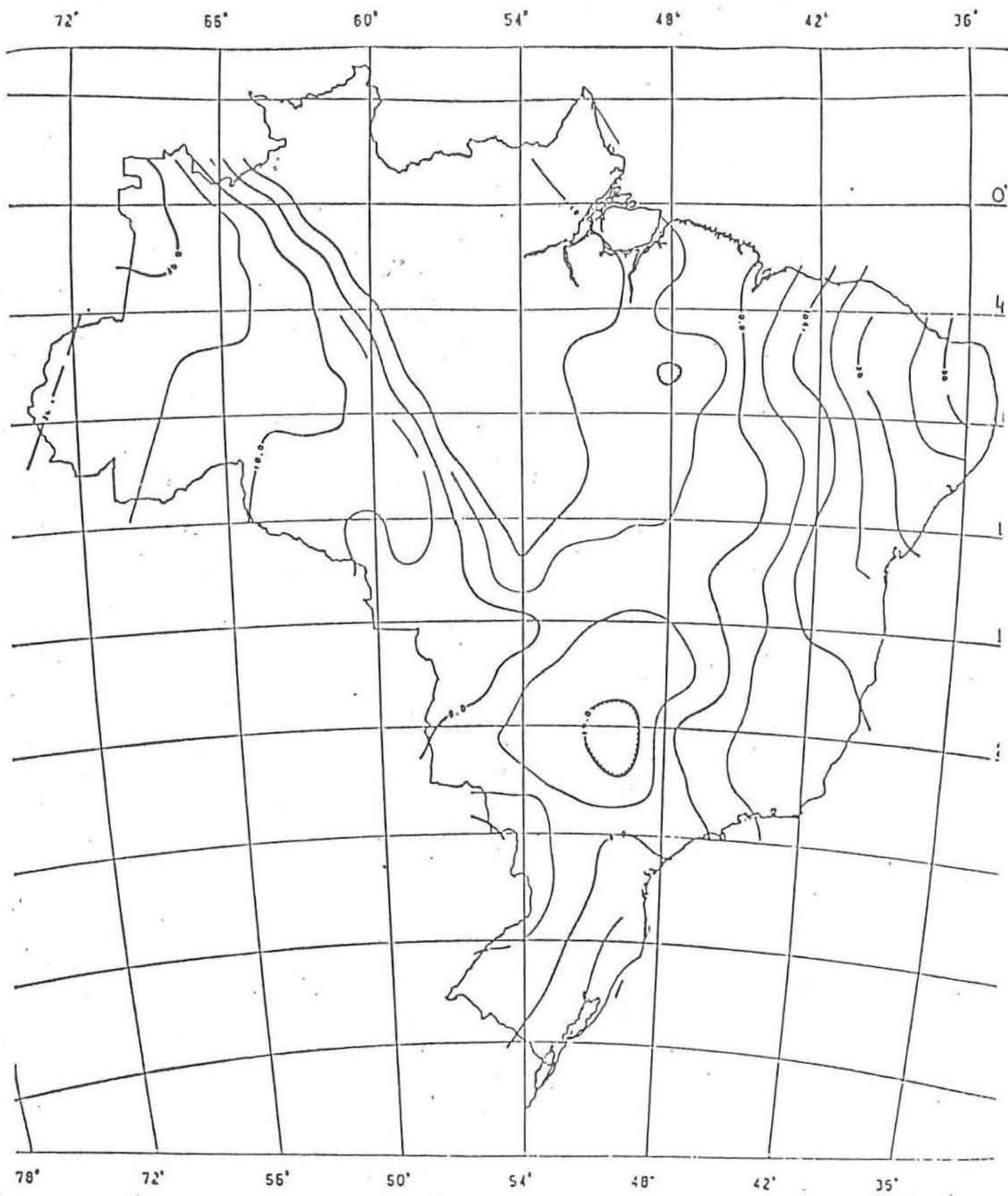


FIGURA 7

## QUADRO 1

STE nº	DADOS				RESULTADOS				
	ENQUADRAMENTO DAS ESTAÇÕES	KEYP	ER1; ER2; ER3 (m)	ESTAÇÕES EXCLUÍDAS		TX (m)	TY (m)	TZ (m)	$\hat{\sigma}_0$
1	12°S / 23°S 39°W / 53°W	1	—x—	55; 58; 114; 131; 133; 134; 259; 277; 556; 560; 768; 788	38	-91,43±3,64	-39,28±3,84	-42,94±1,71	5,2560
2	IDEM	2	3,0; 3,5; 4,0	IDEM	38	-91,09±3,66	-39,54±3,84	-43,07±1,71	0,5447
3	IDEM	2	2,5; 3,0; 3,5	IDEM	38	-91,03±3,66	-39,58±3,84	-43,09±1,72	0,7757
4	IDEM	2	2,0; 2,5; 3,0	IDEM	38	-90,95±3,66	-39,65±3,84	-43,12±1,72	1,1936
5	9°S / 25°S 36°W / 60°W	2	2,0; 2,5; 3,0	—x—	74	-84,67±1,59	-46,17±1,79	-45,52±0,77	1,1422
6	4°N / 33°S 34°W / 74°W	1	—x—	—x—	107	-89,09±1,28	-42,31±1,39	-43,06±0,56	8,7657
7	IDEM	2	2,5; 3,0; 3,5	—x—	107	-89,25±1,28	-42,03±1,39	-42,94±0,57	1,2803
8	IDEM	2	2,8; 3,2; 3,8	—x—	107	-89,20±1,28	-42,11±1,39	-42,98±0,57	1,0422
9	IDEM	2	2,8; 3,2; 3,8	134; 176; 277; 281; 282; 720; 916; 931	99	-88,28±1,28	-42,98±1,38	-43,45±0,57	0,9977