PROJEÇÃO DE MERCATOR: RESOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO USANDO O MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

ROBERTO A. FERNANDES

SUMÁRIO

Este artigo descreve como solucionar o problema inverso da projeção de Mercator (dadas as coordenadas de um ponto na superfície de representação, obter as correspondentes coordenadas na superfície de referência) utilizando o método de Newton-Raphson para determinação das raizes reais de uma equação. Adicionalmente são apresentados programas para calculadoras de lógica RPN que solucionam os problemas direto e inverso nessa projeção cartográfica.

INTRODUÇÃO

Como se sabe, a projeção cilíndrica de Mercator é usada na produção das cartas náuticas da Diretoria de Hidrografia e Navegação (DHN). A resolução do problema direto nessa projeção (i.é., conhecidas as coordenadas de um ponto na superfície de referência, calcular as coordenadas do mesmo ponto na superfície de representação) é tratada rotineiramente na Divisão de Cartografia da DHN, nada havendo a acrescentar. A resolução do problema inverso (i.é., conhecidas as coordenadas (X,Y) de um ponto na superfície de representação, calcular as coordenadas (φ,λ) do mesmo ponto na superfície de referência), no entanto, não é tão trivial, devido à impossibilidade de explicitar φ (latitude geodésica) na expressão de ψ (latitude isométrica) (1). O problema, naturalmente comporta várias alternativas de solução. O artigo a seguir descreve como a questão foi resolvida, atendendo as especificações de precisão e tempo de resposta estabelecidos, empregando-se o método de Newton - Raphson para determinação das raízes reais de uma equação.

Cabe observar que essa solução foi concebida inicialmente há pouco menos de dez anos, ao se tratar da questão da digitalização das Folhas de Bordo (FB) no sistema de Cartografia Apoiada por Computador (CAC) da DHN. No entanto, dificuldades adicionais surgidas devido ao receio de ocorrência de deformações no suporte (papel ou plástico) que contem o mapa ou carta a ser digitalizado fizeram com que essa solução fosse abandonada em favor de uma conversão de coordenadas via transformação geométrica (transformação afim geral), aproveitando-se a existência, no sistema convencional empregado pela DHN, de pontos de controle situados nas proximidades dos cantos do mapa a ser digitalizado. Esses pontos de controle fornecem o conjunto de pontos comuns aos dois espaços envolvidos no problema (sistema de coordenadas da mesa de digitalização e sistema de coordenadas geodésicas) com um grau de liberdade que permite "absorver" o "trabalho" do plástico ou papel. É verdade que se poderia tentar insistir na solução pelo método de Newton - Raphson, usando os pontos de controle e realizando um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados (MMQ): para as circunstâncias descritas, entretanto, o encaminhamento da questão via transformação geométrica pareceu bem mais simples, além de não impactar de forma tão significativa o tempo de processamento. O surgimento de circunstâncias distintas das citadas, ligadas ao esquema de cartas eletrônicas, veio resgatar a solução via Newton - Raphson de um imerecido esquecimento.

A PROJEÇÃO DE MERCATOR

No sistema cilíndrico de Mercator, caso tangente, são as seguintes as condições iniciais (ver figura 1):

- as transformadas dos meridianos são obtidas pelas projeções desses meridianos sobre o cilindro tangente à superfície de referência, no Equador. Dessa forma as transformadas dos meridianos serão retas perpendiculares ao Equador e igualmente espaçadas;

- na superfície de referência os paralelos são circunferências paralelas ao Equador. Dessa forma, as transformadas dos paralelos serão representadas como retas paralelas ao Equador e com o mesmo comprimento que este;

- o centro da representação é tomado como sendo a interseção do Equador com o meridiano central. A transformada do Equador contem o eixo X e a transformada do meridiano central contém o eixo Y.

O desenvolvimento, no plano, do cilindro tangente ao Equador é mostrado na figura 2.

A partir das condições iniciais estabelecidas percebe-se que:

- X é uma função linear da longitude: $X = C1.\lambda + C2$;

- Y é função apenas da latitude: $Y = f(\varphi)$.

A projeção de Mercator é uma projeção conforme. Conformidade significa preservação de ângulos, o que será obtido se o fator de escala independer da orientação de um arco elementar. Analiticamente, a condição de conformidade pode ser expressa como a seguir (2):

$$m^2 = \frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g}$$

sendo m = fator de escala

e, f, g = quantidades fundamentais de Gauss relativas à superfície de referência;

E, F, G = quantidades fundamentais de Gauss relativas à superfície de representação.

À vista das condições iniciais estabelecidas e considerando que, para o caso presente, a superfície de referência é um elipsóide, tem-se:

$$e = M^2$$
$$f = F = 0$$
$$g = N^2\cos\varphi$$
$$E = \left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2 \quad (3)$$
$$F = \left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 \quad (3)$$

sendo: M = pequena normal

N = grande normal

Substituindo, na condição analítica de conformidade, as quantidades fundamentais de Gauss por suas expressões, vem:

$$\frac{\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2}{M^2} = \frac{C1^2}{N^2\cos^2\varphi}$$

Extraindo as raizes e separando as variáveis ...

$$dY = C1\frac{M}{N\cos\varphi}.d\varphi$$

Ocorre que $\frac{M}{N\cos\varphi} = d\psi$ (latitude isométrica);

assim, substituindo $d\psi$ por seu valor e integrando a equação diferencial, vem ..

$$Y = C1.\ln\left|[\mathrm{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}.\varphi)].\left(\frac{1 - e.sen\varphi}{1 + e.sen\varphi}\right)^{e/2}\right| + C3$$

na expressão anterior e é a excentricidade do elipsóide utilizado.

A determinação das constantes de integração, para o caso comum, com o cilindro tangente ao Equador, fornece (2):

- $C1 = a$, sendo a o semi - eixo maior do elipsóide empregado;

- $C2 = -a.\lambda o$, sendo λo a longitude do meridiano de referência. Se esse meridiano for o de Greenwich, como ocorre normalmente, $C2 = 0$;

- $C3 = 0$.

Quando se convenciona que a superfície de projeção é um cilindro secante - como ocorre na DHN -, com dois paralelos - padrão, tem-se:

- $C1 = N m\cos\varphi m$, sendo φm a latitude do paralelo padrão ou de referência: $\varphi m = (\varphi 1 + \varphi 2)/2$, sendo $\varphi 1$ e $\varphi 2$ os paralelos de secância;

- $C2 = -N m\cos\varphi m.\lambda o$. Quando o meridiano de referência for o de Greenwich, como ocorre normalmente, $C2 = 0$.

- $C3 = 0$.

Dessa forma, para o caso em que a latitude de referência é o próprio Equador (4), as expressões que permitem a resolução do problema direto, possibilitando a construção do reticulado da carta de mercator, são:

$$X = a.\lambda \quad (5)$$

$$Y = a.\ln\left|[45^\circ + \frac{1}{2}.\varphi)].\left(\frac{1 - e.sen\varphi}{1 + e.sen\varphi}\right)^{e/2}\right| = a.\psi$$

sendo: (X,Y) = coordenadas na superfície de representação (coordenadas planas);

(φ, λ) = coordenadas na superfície de referência (coordenadas geodésicas no elipsóide);

e = excentricidade do elipsóide;

a = semi - eixo maior do elipsóide;

ψ = latitude isométrica (1)

Observar que a unidade em que estarão expressos X e Y será a mesma usada para a, desde que λ e ψ estejam expressos em radianos.

PROBLEMA INVERSO

O problema inverso, na projeção de Mercator, terá de ser resolvido por um processo iterativo, uma vez que não existe possibilidade de colocar φ como função explícita de ψ. Os passos a seguir são:

- calcular a longitude λ:

$$\lambda = \frac{X}{a} \quad (6)$$

A expressão acima fornece λ em radianos.

- calcular a latitude isometrica:

$$\psi = \frac{Y}{a} \quad (7)$$

A expressão acima fornece ψ em radianos.

- calcular a latitude geodésica φ correspondente à latitude isométrica ψ por um processo iterativo. No caso presente empregou-se o método de Newton - Raphson (Menezes, 1981; Mirshawka, 1987).

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

Seja a função não linear $f(x) = 0$; os passos a seguir para sua solução, segundo o método de Newton - Raphson, são:

- estimar um valor inicial xo para a solução;

- calcular aproximações sucessivas da solução de forma iterativa (xn), segundo a fórmula das tangentes ou de Newton - Raphson:

$$xn = xn\text{-}1 - \frac{f(xn-1)}{f'(xn-1)}$$

- interromper as iterações quando $|xn - xn\text{-}1| < \varepsilon$, sendo ε a tolerância fixada. A solução para $f(x) = 0$ será $x = xn$ e a incerteza estará no entorno de $\pm\ \varepsilon$.

Aplicando o método ao caso presente, considerando que

$$\psi = \ln tg(45^\circ + \frac{1}{2}.\varphi) + \frac{1}{2}.e.\ln\frac{1 - e.sen\varphi}{1 + e.sen\varphi}$$

e que a função não linear cuja solução é procurada é $f(\varphi) = 0$, i.é.,

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}\,[\ln(1+sen\varphi) - \ln(1-sen\varphi) +$$

$$+ e.\ln(1-e.sen\,\varphi) - e.\ln(1+e.sen\,\varphi)\,] - \psi = 0$$

segue-se que:

- a estimativa inicial da solução pode ser obtida admitindo-se a Terra esférica e, como conseqüência, $e = 0$. Nesse caso,

$$\psi = \ln[\,tg(45^\circ + \frac{\varphi o}{2})]$$

donde...

$$\varphi o = 2tg^{-1}(e^{\psi}) - \frac{\pi}{2}$$

Observar que, na expressão acima, e é a base dos logaritmos naturais ($e = 2,718281828$).

- as soluções subseqüentes são obtidas empregando-se a expressão

$$\varphi n = \varphi n\text{-}1 - \frac{f(\varphi n-1)}{f'(\varphi n-1)}$$

sendo

$$f(\varphi n-1) = \frac{1}{2}[\ln(1+sen\varphi n-1) - \ln(1-sen\varphi n-1) +$$

$$+ e.\ln(1-e.sen\varphi n-1) - e.\ln(1+e.sen\varphi n-1)] - \psi = 0$$

$$f'(\varphi n-1) = \frac{(1-e^2)}{(1-e^2sen^2\varphi n-1).\cos\varphi n-1}$$

- a convergência será obtida quando $|\Delta\varphi| \leq 10^{-6}$ (i.é, ao centésimo de segundos, com φ expresso na forma GG.MMSS notação da calculadora HP - 41CV).

PROGRAMAS DE PROCESSAMENTO

Em anexo são apresentados programas de processamento para a calculadora HP - 41CV para resolução do problema direto (programa MERPD) e inverso (programa MERPI) da projeção de Mercator. Os programas utilizam o elipsóide de Hayford, de uso corrente na DHN, como superfície de referência ($a = 6.378.388,0$ m; $e = 0,081991890$); no entanto, caso seja de interesse do utilizador alterar os valores dos parâmetros definidores do elipsóides, não existem dificuldades maiores para fazê-lo. Os programas empregam as expressões e a lógica apresentadas neste artigo, devendo ser observado que as expressões correspondem ao caso do cilindro tangente.

Programa MERPD:

- resolve o problema direto da projeção da Mercator, caso cilindro tangente, utilizando o elipsóide de Hayford;

- o programa solicita os valores da latitude (LAT?) e longitude (LON?), os quais devem ser fornecidos na forma GG.MMSSdd; imediatamente antes de cada solicitação de dados o programa alerta o utilizador, por meio de um sinal sonoro;

- o programa exibe no visor os valores de X e Y, em metros, ao milímetro;

- após uma conversão $(\varphi,\lambda) \rightarrow (X,Y)$ o programa volta a solicitar novos valores para conversão.

Programa MERPI:

- resolve o problema inverso da projeção de Mercator, caso do cilindro tangente, utilizando o elipsóide de Hayford;
- o programa solicita os valores de X (X?) e Y (Y?), os quais devem ser fornecidos em metros, com a precisão disponível; imediatamente antes de cada solicitação de dados o programa alerta o utilizador, por meio de um sinal sonoro;
- o programa exibe no visor o valor da longitude (LON=GG.MMSSdd);
- o programa exibe no visor o valor inicial da latitude (LAT_0 = GG.MMSSdd);
- o programa exibe no visor o número da iteração (NR ITER=1 ou 2 ou 3). Observar que não se espera ter de iterar mais de três vezes;
- o programa calcula e exibe no visor o valor da latitude correspondente a cada iteração (LAT=GG.MMSSdd);
- quando ocorre convergência, i.é., quando $|\Delta\varphi| = |\varphi n - \varphi n\text{-}1| < 0{,}0000001$, admite-se obtido o valor final da latitude, o qual é exibido no visor (LAT_f=GG.MMSSdd); não sendo o caso o programa volta a iterar;
- após uma conversão $(X,Y) \rightarrow (\varphi,\lambda)$ o programa volta a solicitar novos valores para conversão.

DADOS DE TESTE

Os valores apresentados a seguir foram obtidos com os programas MERPD e MERPI. Observar que conferem com os valores calculados mediante o uso do formulário DHN - 5102 (em anexo), com um detalhe: aqui se trabalhou com o cilindro tangente no Equador. No Equador, portanto, a deformação é nula; dessa forma, ao usar o formulário DHN - 5102, considerou-se o valor de u (unidade da carta) sobre o Equador. A DHN, normalmente, emprega a opção cilindro secante e no cálculo do reticulado usa um valor da unidade da carta relativo à latitude média entre os dois paralelos de secância, devido à questão da superposição entre cartas náuticas consecutivas. A resolução das equações diferenciais fornece a mesma solução, mas os valores das constantes de integração são diferentes nos dois casos, conforme se viu, já que as condições iniciais são diferentes.

LAT	Y (m)	LONG	X (m)
0°	0,0	0°	0,0
5°	553.589,906	5°	556.619,358
10°	1.111.487,506	10°	1.113.238,716
15°	1.678.166,840	15°	1.669.858,074
20°	2.258.450,780	20°	2.226.477,431
25°	2.857.728,749	-	-
30°	3.482.235,799	-	-

OBSERVAÇÕES

(1) Ou latitude crescida.

(2) Para detalhes complementares deve ser consultada a bibliografia relacionada ao final do artigo.

(3) A expressão é obtida por meio da matriz de transformação que liga a superfície de referência à superfície de representação.

(4) Essa situação pode ser vista como um caso limite do cilindro secante, sendo Nm = a e cosφm = 1. O estabelecimento das expressões que resolvem o problema direto, para o cilindro secante, é inteiramente similar à mostrada no texto principal, i. é.,

$$X = Nm.\cos\varphi m.\lambda$$

$$Y = Nm.\cos\varphi m.\ln\{[tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}.\varphi)]\,(\frac{1 - e.sen\varphi}{1 + e.sen\varphi})$$

$$= Nm\cos\varphi m.\psi$$

(5) $X = a.(\lambda - \lambda_0)$, para o caso em que o meridiano de referência não for o de Greenwich.

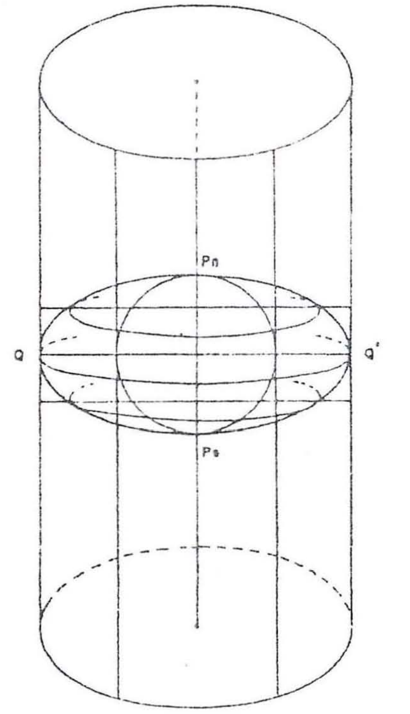

Figura 1

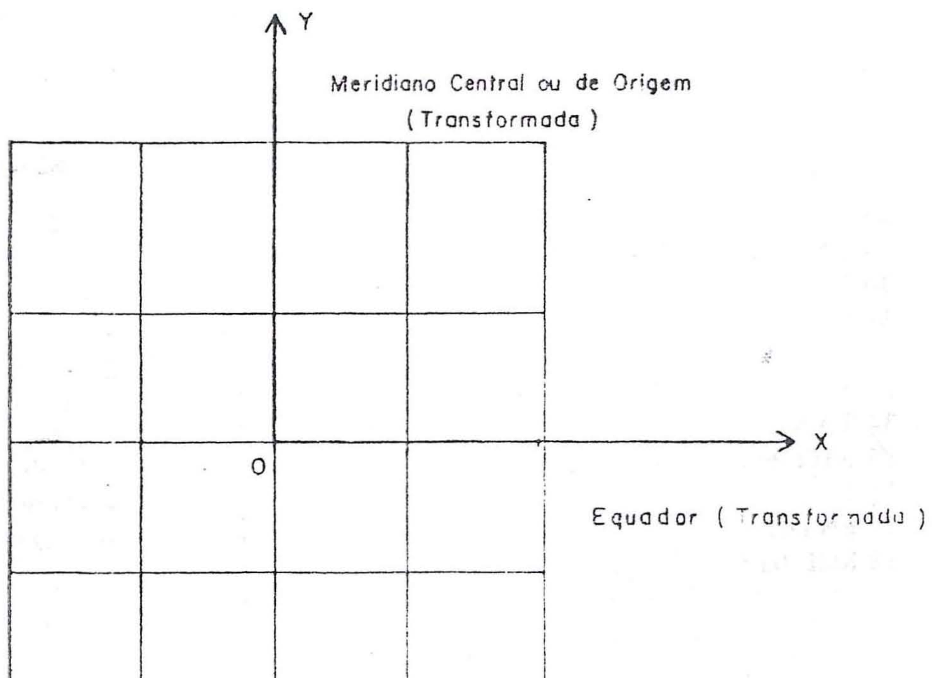

Figura 2

PROGRAMA MERPD

```
01 LBL "MERPD"
02 FIX 9
03 6378388
04 STO 00
05 8199189 E-8
06 STO 01
07 STO 02
08 BEEP
09 "LAT ?"
10 PROMPT
11 HR
12 STO 02
13 BEEP
14 "LON ?"
15 PROMPT
16 HR
17 STO 03
18 D-R
19 ENTER
20 RCL 00
21 *
22 FIX 3
23 "X =
24 ARCL X
25 AVIEW
26 STOP
27 FIX 9
28 RCL 02
29 ENTER
30 2
31 /
32 45
33 +
34 TAN
35 STO 04
36 1
37 ENTER
38 RCL 01
39 ENTER
40 RCL 02
41 SIN
42 *
43 -
44 STO 05
45 1
46 ENTER
47 RCL 01
48 ENTER
49 RCL 02
50 SIN
51 *
52 +
53 ST / 05
54 RCL 01
55 ENTER
56 2
57 /
58 STO 06
59 RCL 05
60 ENTER
61 RCL 06
62 Y X
63 ENTER
64 RCL 04
65 *
66 LN
67 ENTER
68 RCL 00
69 *
70 FIX 3
71 "Y =
72 ARCL X
73 AVIEW
74 STOP
75 GTO 02
```

```
01 LBL "MERPI"
02 FIX 9
03 6378388
04 STO 11
05 8199189 E-8
06 STO 01
07 LBL 01
08 BEEP
09 "X ?
10 PROMPT
11 STO 02
12 BEEP
13 "Y ?"
14 PROMPT
15 STO 03
16 RCL 02
17 ENTER
18 RCL 11
19 /
20 R-D
21 HMS
22 FIX 6
23 "LON =
24 ARCL X
25 AVIEW
26 STOP
27 FIX 9
28 RCL 03
29 ENTER
30 RCL 11
31 /
32 STO 04
33 0
34 STO 05
35 RCL 04
36 ENTER
37 E X
38 ATAN
39 2
40 *
41 90
42 -
43 STO 06
44 HMS
45 FIX 5
46 "LATO =
47 ARCL X
48 AVIEW
49 STOP
50 LBL 03
51 FIX 9
52 1
53 ST + 05
54 RCL 05
55 FIX 0
56 "NR ITER
57 ARCL X
58 AVIEW
59 STOP
60 FIX 9
61 RCL 06
62 SIN
63 STO 07
64 ENTER
65 RCL 01
66 *
67 STO 08
68 1
69 ENTER
70 RCL 07
71 +
72 LN
73 STO 09
74 1
75 ENTER
76 RCL 07
77 -
78 LN
79 ST - 09
80 1
81 ENTER
82 RCL 08
83 -
84 LN
85 ENTER
86 RCL 01
87 *
88 ST + 09
89 1
90 ENTER
91 RCL 08
92 +
93 LN
94 ENTER
```

```
95 RCL 01
96 *
97 ST - 09
98 RCL 09
99 ENTER
100 2
101 /
102 RCL 04
103 -
104 STO 09
105 1
106 ENTER
107 RCL 01
108 X 2
109 -
110 STO 00
111 1
112 ENTER
113 RCL 01
114 X 2
115 ENTER
116 RCL 07
117 X 2
118 *
119 -
120 ENTER
121 RCL 06
122 COS
123 *
124 ST/ 00
125 RCL 00
126 ST/ 09
127 RCL 09
128 CHS
129 R-D
130 ENTER
131 RCL 06
132 +
133 STO 06
134 HMS
135 FIX 5
136 ˜LAT =
137 ARCL X
138 AVIEW
139 STOP
140 FIX 9
141 1E-7
142 ENTER
143 RCL 09
144 ABS
145 X>Y?
146 GTO 03
147 RCL 06
148 HMS
149 FIX 6
150 ˜LATF =
151 ARCL X
152 AVIEW
153 STOP
154 GTO 01
```

CÁLCULO DA PROJEÇÃO DE MERCATOR

No. — Título —

φ_1 = 0° φ_m = 0° E_n = 1 : 1 λ_1 = 0° D_{E-W} = — mm

φ_2 = 30° S $1'p(\varphi_m)$ = 1.855,39783 m u = 1.855,39783 m λ_2 = 20° W D_{N-S} = — mm

$\Delta\varphi$ = 1800' $\Delta\lambda$ = 1200' Diagonal = — mm

Latitudes	Latitudes crescidas	Diferenças	Distâncias a partir do paralelo N	Diferenças	Longitudes	Diferenças	Distâncias a partir do meridiano E	Diferenças
0°	0,0		—		0°		—	
5°	298,36723	298,36723	553.589,911		5°	300'	556.619,349	
10°	599,05616	599,05616	1.111.487,499		10°	600'	1.113.238,716	
15°	904,47816	904,47816	1.678.166,815		15°	900'	1.669.858,047	
20°	1217,23260	1217,23260	2.258.450,725		20°	1200'	2.226.477,396	
25°	1540,22424	1540,22424	2.857.128,713					
30°	1876,81352	1876,81352	3.482.235,732					

DHN - 6102

Calculado por [signature] em ______ Traçado por ______ em ______

Verificado por ______ em ______ Verificado por ______ em ______

BIBLIOGRAFIA

BAKKER, Múcio Piragibe Ribeiro. A Projeção Mercator. Niterói, Diretoria de Hidrografia e Navegação, 1975. 125p.

BRASIL. Diretoria de Hidrografia e Navegação. Tábua de Latitudes Crescidas e Comprimento de Arcos de Paralelos e Meridianos (Elipsóide Internacional). Sem Data.

GEMAEL, Camil. Sistemas de Projeção. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1976. 127p.

MENEZES, Wanda Cristina. Cálculo Numérico: Notas de Aula. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1981. 133p.

NIRSHAWKA, Victor. Usando a HP - 41CV na Engenharia. São Paulo, Livraria Nobel, 1986. 130p.

ROSIER, François Albert. Sistemas de Projeção (manuscrito). Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1981. NC.

TUCCI, Wilson José (e outros). Busca de Raizes na HP - 41 (Método de Newton). Revista Microhobby no. 13: 22-23, 1984.