PROPAGAÇÃO DE ERROS EM OPERAÇÕES TOPO-GEODÉSICAS

Roberto A. Fernandes
CMG (Rrm) - Hidrógrafo

RESUMO.
As normas mais recentes da Organização Hidrográfica Internacional (1995) estabelecem padrões mínimos para os levantamentos hidrográficos (LH), com o propósito de garantir sua confiabilidade, e determinam que a incerteza espacial relativa aos dados obtidos no levantamento seja adequadamente quantificada. Com essa finalidade - quantificar adequadamente a incerteza espacial associada às coordenadas determinadas no LH - este artigo desenvolve exemplos de propagação de variâncias e covariâncias a partir de situações reais relativas aos métodos topo - geodésicos convencionais mais empregados pela Diretoria de Hidrografia e Navegação (DHN).

INTRODUÇÃO.
Todas as medidas (ou observações, neste contexto) realizadas em qualquer ciência experimental estão sujeitas às chamadas "flutuações probabilísticas" (ou 'erros de observação", no jargão dos autores clássicos), uma vez que uma medida (observação) se comporta como uma variável aleatória, podendo assumir qualquer valor do espaço amostral, com uma certa probabilidade. É necessário, contudo, estabelecer um valor único para a grandeza medida, trabalho que fica por conta do assim denominado "Ajustamento de Observações". Quando se trabalha com observações diretas de mesmo grau de confiânça, p. e., tal valor único - dito valor mais provável da grandeza - é fornecido pela média aritmética simples dos valores obtidos pela observação. Dessa forma, todos estão habituados a adotar como valor angular de uma certa direção a média aritmética simples das várias reiterações realizadas. Isso, no entanto, não é ainda o suficiente: no mesmo tipo-de-cálculo DHN-5308 (Valor Médio de Direção) em que são registrados os valores das reiterações e sua média (que será o valor adotado para a direção) é calculado e registrado o valor do erro médio quadrático (m) relativo ao valor adotado. O erro médio quadrático (emq) constitui um estimador da exatidão da medida e informa sobre o afastamento do valor adotado em relação ao verdadeiro valor da grandeza. Em outras palavras: o emq informa sobre o erro associado ao valor adotado para a grandeza. Naturalmente esse erro se propagará a qualquer outro valor que seja calculado (coordenadas, p. e.) usando o valor original. O conhecimento das exatidões associadas aos vários valores utilizados nas diversas operações topo-geodésicas é que possibilitará manter redes geodésicas geométricas e homogêneas, cadastros de coordenadas confiáveis, além de permitir estimar o nível de confiança da posição de uma sondagem batimétrica. O ramo da Teoria dos Erros que permite avaliar a exatidão do resultado de uma operação topográfica, geodésica ou hidrográfica em função das exatidões dos valores utilizados para chegar a esse resultado denomina-se Teoria da Propagação dos Erros. Essa Teoria permite, p. e., que se conheça a exatidão das coordenadas dos vértices de uma poligonal, permitindo também a

simulação da poligonal, em gabinete, e a escolha da melhor alternativa ou melhor ante-projeto, antes mesmo de sua concretização, no campo. O preço a pagar pela não utilização dessa ferramenta é a realização de trabalhos cujo valor real ninguém conhece e a geração de produtos cartográficos cujos inevitáveis conflitos terão de ser resolvidos por processos intuitivos e cuja confiabilidade não é possível estimar.

EXATIDÃO. ERRO MÉDIO QUADRÁTICO (emq).

Seja uma sequência finita L de observações da mesma quantidade física:

$$L = (l_1, l_2, l_3, ..., l_n)$$

Como se sabe, o erro médio quadrático (emq) foi estabelecido por Gauss como estimador da exatidão (acurácia, nos textos produzidos pela DHN) com que foi realizada uma observação. O emq (m) de uma observação isolada corresponde à raiz quadrada da média dos quadrados dos erros; como o erro conhecido é o erro aparente (afastamento em relação à média M das observações), vem

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (li - M)^2}{n - 1}} \qquad (1)$$

sendo $$M = \frac{\sum_{i=1}^{n} li}{n} \qquad (2)$$

O emq constitui um padrão de comparação entre duas séries de medidas: para duas séries contendo o mesmo número de observações, é mais exata (acurada) a que apresentar o menor valor do emq.

Cabe notar que a exatidão (estimada pelo emq) pretende medir o afastamento em relação ao verdadeiro valor da grandeza, enquanto a precisão (medida pelo desvio padrão) mede o afastamento em relação à média. Dessa forma, o conceito de precisão inclui os erros acidentais e o conceito de exatidão inclui os erros acidentais e sistemáticos. Precisão e exatidão são calculadas usando-se as mesmas expressões.

Erro relativo é a relação entre o erro cometido ao se determinar o valor de uma grandeza e o valor dessa grandeza. P. e., se uma poligonal possui um comprimento de 12.000 metros e apresentou um erro de fechamento linear de 0,5 metro, seu erro relativo foi de 1:24.000. O erro relativo também pode ser estimado usando-se o valor mais provável da grandeza e seu erro médio quadrático. Convencionalmente, o valor do erro relativo é apresentado sob a forma de fração, com numerador igual a um, embora possa ser expresso também sob a forma de ppm (partes por milhão). Dessa forma, quando se fala em 6 ppm, p. e., isto significa 6 mm/km ou 6 x 10^{-6} ou 1:166.667 (arredondando). O erro relativo é muito usado para expressar tolerâncias.

PROPAGAÇÃO DE ERROS.

O enfoque clássico da Teoria dos Erros estabelece a chamada lei de propagação dos erros (vide Santos Franco, 1950; Palumbo Brandão, 1963; Castello Branco, 1968):

$$m^2_Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 . m^2_{Xi} \qquad (3)$$

sendo $y = f(xi)$, i = 1,2,3,...,n, em que os xi são valores obtidos em observações independentes, possuindo emq m_{X1}, m_{X2}, m_{X3}, ... , m_{Xn}, respectivamente. A lei de propagação dos erros permite calcular a exatidão de uma grandeza y (expressa por m_Y) a partir das exatidões das medidas xi, i = 1,2,3,...,n (expressas por m_{Xi}, i = 1,2,3,...,n).

Cabe notar que a lei de propagação dos erros pode ser escrita usando-se notação matricial:

$$[m^2_Y] = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1} \; \frac{\partial y}{\partial x_2} \; \ldots \; \frac{\partial y}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} m^2_{X1} & & 0 \\ & m^2_{X2} & \\ & & \text{-------} \\ 0 & & m^2_{Xn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \text{-----} \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Um exemplo simples permite visualizar melhor a lei de propagação dos erros:

Seja uma interseção a vante em que foram medidos os ângulos $A = 45^0\ 27'\ 22''$ e $B = 62^0\ 33'\ 27''$, sendo $m_A = \pm\ 3''$ e $m_B = \pm\ 4''$. Calcular a exatidão do ângulo deduzido P.

O modelo matemático ($y = f\,(x)$) que liga P a A e B é: $P = 180^0 - (A + B)$. Dessa forma...

$$m^2_P = \left[\frac{\partial(180^0 - (A+B)}{\partial A} \quad \frac{\partial(180^0 - (A+B)}{\partial B} \right] \begin{bmatrix} m^2_A & 0 \\ 0 & m^2_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial(180^0 - (A+B)}{\partial A} \\ \frac{\partial(180^0 - (A+B)}{\partial B} \end{bmatrix}$$

$$\therefore m^2_P = [\,-1\ \ -1\,] \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 25\ ('')^2$$

e, portanto, $m_P = \pm\ 5''$. O valor do ângulo P é $071^0\ 59'\ 11'' \pm 5''$. Os 5" representam a incerteza relativa ao valor adotado.

É possível notar que a lei de propagação dos erros propaga variâncias (m^2); isto ocorre porque se admitiu que no modelo $y = f\,(xi)$ os xi eram independentes e, portanto, não correlacionados, possuindo em consequência covariâncias nulas. Esse fato particulariza a lei de propagação dos erros: no caso geral é necessário admitir que os xi podem estar correlacionados e, como decorrência, é necessário propagar variâncias e covariâncias. Isto é feito pela lei de propagação de variâncias e covariâncias (vide Camil Gemael, 1994):

$$\Sigma_Y = D\Sigma_X D^T \qquad (4)$$

sendo:

$Y = f\,(X)$. Y tem dimensões (s x 1) e X tem dimensões (n x 1);

$$\Sigma_Y = \text{matriz variância - covariância (mvc) de } Y = \begin{bmatrix} m^2_{y1} & m_{y1y2} & \cdots & m_{y1ys} \\ m_{y2y1} & m^2_{y2} & \cdots & m_{y2ys} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{ysy1} & m_{ysy2} & \cdots & m^2_{ys} \end{bmatrix}_{(s \times s)}$$

D = matriz das derivadas de $Y = f\,(X)$ em relação a X, tomada no ponto X_0 (vetor dos valores iniciais, situado nas vizinhanças de X), de dimensões (s x n).

A expressão (4) foi obtida pelo desenvolvimento da Y = f(X) usando a série de Taylor; X_0 é o ponto de expansão do desenvolvimento em série.

$$D = \left.\frac{\partial Y}{\partial X}\right|_{X_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Y_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Y_2}{\partial X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial Y_s}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_s}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Y_s}{\partial X_n} \end{bmatrix}_{X_0} \quad (s \times n)$$

$$\Sigma_X = \text{matriz variância - covariância (mvc) de } X = \begin{bmatrix} m^2_{x1} & m_{x1x2} & \cdots & m_{x1xn} \\ m_{x2x1} & m^2_{x2} & \cdots & m_{x2xn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{xnx1} & m_{xnx2} & \cdots & m^2_{xn} \end{bmatrix} (n \times n)$$

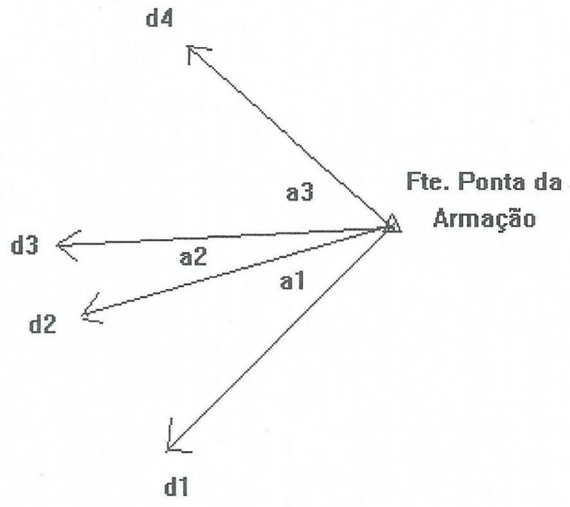
A seguir serão estudadas, por meio de exemplos, as propagações de erro que ocorrem nas operações topo - geodésicas mais comumente utilizadas pela DHN.

PROPAGAÇÃO DE ERROS NA MEDIDA DE DIREÇÕES.

Uma equipe do CAHO guarneceu a estação Farolete Ponta da Armação e observou direções de acordo com um programa de observações angulares (vide esquema), obtendo os seguintes resultados:

	Estação Visada	Direção (valor adotado)	emq (m)	Distâncias Zenitais	emq (m)
d1	Fte. Laje	000-00-00,0	2,0"	089-54-54,0	1,5"
d2	Fte.Villegagnon	024-10-32,5	2,5"	089-55-26,0	1,5"
d3	Torreão I.Fiscal	053-06-45,0	2,5"	089-22-11,0	2,0"
d4	Fte.Feiticeiras	081-12-00,5	1,5"	089-52-03,5	2,5"

- esquema da situação:



Calcular a exatidão dos ângulos horizontais a1, a2 e a3, os quais serão utilizados posteriormente em operações topo-geodésicas.

O modelo matemático $Y = f(X)$ que liga as observações (direções - d) a resultados (ângulos - a) é [ângulos = f(direções)]:

$f1$: $a1 = - d1 + d2$
$f2$: $a2 = - d2 + d3$
$f3$: $a3 = - d3 + d4$

A propagação de variâncias e covariâncias se faz de acordo com a respectiva lei:

$$\Sigma_Y = D\Sigma_X D^T$$

No caso, $\Sigma_a = D\Sigma_d D^T$, sendo Σ_d de dimensões (4 x 4), D (3 x 4) e Σ_a (3 x 3). A mvc das direções será:

$$\Sigma_d = \begin{bmatrix} m_{d1}^2 & m_{d1d2} & m_{d1d3} & m_{d1d4} \\ m_{d2d1} & m_{d2}^2 & m_{d2d3} & m_{d2d4} \\ m_{d3d1} & m_{d3d2} & m_{d3}^2 & m_{d3d4} \\ m_{d4d1} & m_{d4d2} & m_{d4d3} & m_{d4}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2{,}0")^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2{,}5")^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2{,}5")^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1{,}5")^2 \end{bmatrix}$$

Notar que, como as medidas das direções são independentes umas das outras, suas covariâncias são nulas.

A matriz D será

$$D = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{Xo} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f1}{\partial d1} & \frac{\partial f1}{\partial d2} & \frac{\partial f1}{\partial d3} & \frac{\partial f1}{\partial d4} \\ \frac{\partial f2}{\partial d1} & \frac{\partial f2}{\partial d2} & \frac{\partial f2}{\partial d3} & \frac{\partial f2}{\partial d4} \\ \frac{\partial f3}{\partial d1} & \frac{\partial f3}{\partial d2} & \frac{\partial f3}{\partial d3} & \frac{\partial f3}{\partial d4} \end{bmatrix}\right|_{Xo} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\Sigma_a = D\Sigma_d D^T = \begin{bmatrix} m_{a1}^2 & m_{a1a2} & m_{a1a3} \\ m_{a2a1} & m_{a2}^2 & m_{a2a3} \\ m_{a3a1} & m_{a3a2} & m_{a3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}25 & -6{,}25 & 0 \\ -6{,}25 & 12{,}50 & -6{,}25 \\ 0 & -6{,}25 & 8{,}50 \end{bmatrix} (")^2$$

Dessa forma, os ângulos horizontais observados e seus emq são:

Estação Guarnecida	Estações Visadas	Ângulo Horizontal	m
Fte.Ponta da Armação	Fte. Laje Fte. Villegagnon	024-10-32,5	3,20"
Fte. Ponta da Armação	Fte. Villegagnon Torreão Ilha Fiscal	028-56-12,5	3,54"
Fte.Ponta da Armação	Torreão Ilha Fiscal Fte.das Feiticeiras	028-05-15,5	2,92"

É possível depreender-se, da mvc dos ângulos, que os ângulos a1 e a3 não são correlacionados estatisticamente (as covariâncias m_{a1a3} e m_{a3a1} são nulas); no entanto, os ângulos a1 e a2, bem como a2 e a3, são correlacionados estatisticamente (e variam em sentidos opostos). É claro que os erros que afetam os ângulos serão propagados a todas as operações que deles se valerem.

PROPAGAÇÃO DE ERROS EM UMA IRRADIAÇÃO.

Uma equipe do CAHO guarneceu as estações Farolete Ponta da Armação e Torreão da Ilha Fiscal, com o propósito de determinar as coordenadas UTM dessa última estação, por irradiação. Foi medida a distância entre as duas estações utilizando-se um distanciômetro Telurômetro MRA 5, obtendo-se o valor (após as reduções cabíveis) de 3.563,55 m. Dispõe-se, ainda, dos seguintes elementos:

- coordenadas UTM da estação Farolete Ponta da Armação:

N = 7.468.179,34 m
E = 691.351,63 m

Não estão disponíveis informações sobre a exatidão dessas coordenadas;

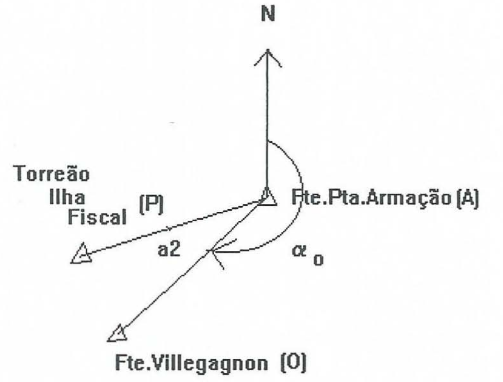
- azimute Farolete Ponta da Armação - Farolete Villegagnon (determinado pelo processo das distâncias zenitais absolutas): α_0 = 216-42-39,40 ± 1,5";

- ângulo horizontal Farolete Villegagnon - Farolete Ponta da Armação - Torreão da Ilha Fiscal : a2 = 028-56-12,5 ± 3,54"(vide exemplo anterior);

- exatidão das distâncias medidas com o Telurômetro MRA 5 (obtida do manual do equipamento):

± 1,5 cm + 5 ppm

- esquema da situação:



Calcular a exatidão das coordenadas do Torreão da Ilha Fiscal.

A função $Y = f(X)$, no caso presente, é:

$f1$: $N_P = N_A + l_{AP}.\cos\alpha_1$
$f2$: $E_P = E_A + l_{AP}.\mathrm{sen}\alpha_1$

e, portanto, $(N_P, E_P) = f(N_A, E_A, l_{AP}, \alpha_1)$, o que significa que a exatidão das coordenadas do Torreão da Ilha Fiscal depende das exatidões das coordenadas do Farolete da Ponta da Armação, da distância medida Farolete Ponta da Armação - Torreão da Ilha Fiscal e do azimute Farolete Ponta da Armação - Torreão da Ilha Fiscal.

- exatidão das coordenadas (N_A, E_A):
a exatidão das coordenadas do Farolete da Ponta da Armação deveria ser conhecida; entretanto, de fato, não é. Dessa maneira, a exatidão das coordenadas do Torreão da Ilha Fiscal terá de ser calculada sem que se conheça a exatidão das coordenadas que lhe deram origem; o valor encontrado, portanto, estará super avaliando essas coordenadas, uma vez que a propagação de erros levada em conta considera apenas os erros em distância e azimute, i. é.,

$$\Sigma(N_P, E_P) = D\Sigma(\alpha_1, l_{AP})D^T$$

- exatidão da distância l_{AP}:

$m_l^2 = (15 \text{ mm} + 3{,}56 \text{ km x } 5 \text{ mm/km})^2$

$\therefore m_l^2 = (32{,}82\text{mm})^2 \qquad \therefore m_l^2 = 0{,}00108 \text{ m}^2$

Assim, $l_{AP} = 3.563{,}55 \text{ m} \pm 0{,}033 \text{ m}$

- exatidão do azimute α_1 (A_{AP}):

a exatidão do azimute α_1 depende das exatidões do azimute α_0 e do ângulo a2:

$$\alpha_1 = \alpha_0 + a2,$$

de modo que $\alpha_1 = f(\alpha_0, a2)$. A lei de propagação de variâncias e covariâncias aplicada ao caso fica:

$$\Sigma(\alpha_1) = D\Sigma(\alpha_0,a2)D^T$$

sendo

$$D = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_0} = \left[\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial f}{\partial a2} \end{matrix}\right]_{X_0} = [\ 1 \quad 1\ ]$$

e

$$\Sigma(\alpha_0,a2) = \begin{bmatrix} m^2_{\alpha o} & m_{\alpha oa2} \\ m_{a2_{\alpha o}} & m^2_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}25 & 0 \\ 0 & 12{,}50 \end{bmatrix} ('')^2$$

Em consequência...

$$\Sigma(\alpha_1) = [\ m^2_{\alpha 1}\ ] = [\ 14{,}75\ ]\ ('')^2$$

e, portanto, $\alpha_1 = 245\text{-}38\text{-}51{,}90 \pm 3{,}84''$.

Estamos em condições, agora, de realizar a propagação de variâncias e covariâncias às coordenadas de P:

$$\Sigma(N_P, E_P) = D\Sigma(\alpha_1,l_{AP})D^T$$

sendo

$$\Sigma(\alpha_1, l_{AP}) = \begin{bmatrix} m^2_{\alpha 1} & m_{\alpha 1 l} \\ m_{l_{\alpha}1} & m^2_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}75\ ('')^2 & 0 \\ 0 & 0{,}00108\ m^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3{,}46690 \times 10^{-10}\ (rad)^2 & 0 \\ 0 & 0{,}00108\ m^2 \end{bmatrix}$$

e

$$D = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial l_{AP}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial l_{AP}} \end{bmatrix}_{X_0}$$

Determinando o valor das derivadas no ponto de expansão X_0 ...

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} = -\, l_{AP}.\text{sen}\alpha_1 = 3.246{,}49 \text{ m}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial l_{AP}} = \cos\alpha_1 = -\,0{,}41235$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_1} = l_{AP}.\cos\alpha_1 = -1.469{,}41 \text{ m}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial l_{AP}} = \text{sen}\alpha_1 = -\,0{,}91103$$

Assim...

$$D = \begin{bmatrix} 3.246{,}49\text{m} & -\,0{,}41235 \\ -\,1.469{,}41 \text{ m} & -\,0{,}91103 \end{bmatrix}$$

e

$$D^T = \begin{bmatrix} 3.246{,}49\ m & -1.469{,}41m \\ -0{,}41235 & -0{,}91103 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\Sigma(N_P, E_P) = \begin{bmatrix} m^2_{Np} & m_{NpEp} \\ m_{EpNp} & m^2_{Ep} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}837644 \times 10^{-3} & -1{,}24814 \times 10^{-3} \\ -1{,}24814 \times 10^{-3} & 1{,}644935 \times 10^{-3} \end{bmatrix} (m^2)$$

Assim...

N_P = 7.466.709,927 m ± 0,062 m
E_P = 688.105,138 m ± 0,041 m

É possível notar que as coordenadas N e E são correlacionadas. O fato era esperado uma vez que ambas as coordenadas são funções das mesmas variáveis.

PROPAGAÇÃO DE ERROS NA INTERSEÇÃO A VANTE.

Uma equipe do CAHO guarneceu as estações Farolete Ponta da Armação e Torreão da Ilha Fiscal e, de cada uma dessas estações, fazendo origem na outra, visou o Farolete das Feiticeiras, com a finalidade de determinar as coordenadas UTM dessa última estação por interseção a vante. Dispõe-se dos seguintes elementos:

- coordenadas UTM da estação Farolete Ponta da Armação (B):

N_B = 7.468.179,34 m
E_B = 691.351,63 m
Não estão disponíveis informações sobre a exatidão dessas coordenadas.

- coordenadas UTM da estação Torreão da Ilha Fiscal (A):

N_A = 7.466.709,927 m ± 0,062 m
E_A = 688.105,138 m ± 0,041 m

(vide exemplo anterior).

- distância Farolete Ponta da Armação - Torreão da Ilha Fiscal:

l_{AB} = 3.563,55 m ± 0,033 m

(vide exemplo anterior).

- ângulos horizontais:

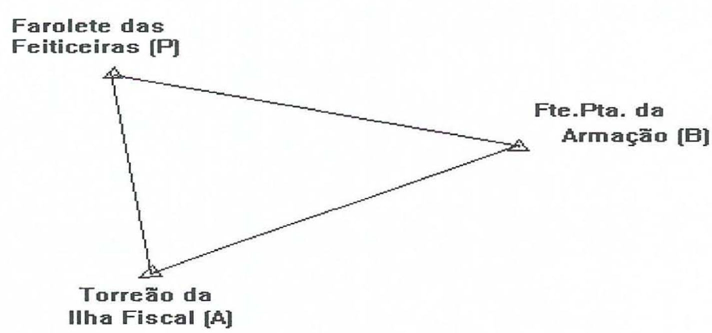
Estação Guarnecida	Estações Visadas	Ângulo Horizontal	emq
Torreão Ilha Fiscal (A)	Farolete Feiticeiras (P) Farolete Pta.Armação (B)	069-08-23,50	2,50"
Farolete Pta. Armação (B)	Torreão Ilha Fiscal (A) Farolete Feiticeiras (P)	028-05-15,50	2,92"

- azimute Farolete Ponta da Armação - Torreão da Ilha Fiscal:

A_{BA} = 245-38-51,90 ± 3,84"

(vide exemplo anterior).

- esquema da situação:



Calcular a exatidão das coordenadas do Farolete das Feiticeiras.

O modelo matemático [$Y = f(X)$] para a interseção a vante é:

$f1$: $N_P = N_A + l_{AP}.\cos A_{AP}$
$f2$: $E_P = E_A + l_{AP}.\text{sen}A_{AP}$

ou, a partir da estação B:

$N_P = N_B + l_{BP}.\cos A_{BP}$
$E_P = E_B + l_{BP}.\text{sen}A_{BP}$

Assim, $(N_P, E_P) = f(N_A, E_A, l_{AP}, A_{AP})$, a partir da estação A. Montagem similar poderia ser feita a partir da estação B. A lei de propagação de variâncias e covariâncias aplicada ao caso presente fica:

$$\Sigma(N_P, E_P) = D\Sigma(N_A, E_A, l_{AP}, A_{AP})D^T$$

- exatidão das coordenadas (N_A, E_A):

$N_A = 7.466.709,927 \text{ m} \pm 0,062 \text{ m}$
$E_A = \quad 688.105,138 \text{ m} \pm 0,041 \text{ m}$

(vide exemplo anterior).

- exatidão da distância Torreão da Ilha Fiscal - Farolete Feiticeiras (l_{AP}): esse valor não está disponível, sendo necessário calculá-lo.

O modelo matemático que fornece l_{AP} é:

$$f: \; l_{AP} = \frac{l_{AB}}{\text{sen}P}.\text{sen}B$$

Assim, $l_{AP} = f(l_{AB}, B, P)$. A lei de propagação de variâncias e covariâncias aplicada ao caso fica:

$$\Sigma(l_{AP}) = D\Sigma(l_{AB}, B, P)D^T$$

onde $\Sigma(l_{AB}, B, P) = \begin{bmatrix} m^2_{lab} & m_{labB} & m_{labP} \\ m_{Blab} & m^2_{B} & m_{BP} \\ m_{Plab} & m_{PB} & m^2_{P} \end{bmatrix}$

- - exatidão da distância l_{AB}:

l_{AB} = 3.563,55 m ± 0,033 m

(vide exemplo anterior).

- - exatidão do ângulo B:

B = 028-05-15,50 ± 2,92"

(vide exemplo sobre propagação de erros na medida de direções).

- - exatidão do ângulo deduzido P: esse valor não está disponível, sendo necessário calculá-lo. O modelo matemático que fornece P é:

f: $P = 180^0 - (A + B)$

sendo A = 069-08-23,50 ± 2,50"
B = 028-05-15,50 ± 2,92"

A lei de propagação de variâncias e covariâncias aplicada ao caso fica:

$$\Sigma_P = D \Sigma_{A,B} D^T$$

onde $$D = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_0} = \left[\frac{\partial f}{\partial A} \quad \frac{\partial f}{\partial B} \right]_{X_0} = [\,-1 \quad -1\,]$$

$$\Sigma_{A,B} = \begin{bmatrix} m^2_A & m_{AB} \\ m_{BA} & m^2_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}50^2 & 0 \\ 0 & 2{,}92^2 \end{bmatrix} ('')^2$$

de modo que

P = 082-46-21,00 ± 3,84"

Dispõe-se, agora, dos elementos para obter a exatidão de l_{AP}:

modelo matemático:

$$f: l_{AP} = \frac{l_{AB}}{\text{sen}P}.\text{sen}B$$

lei de propagação de variâncias e covariâncias para o caso:

$\Sigma l_{AP} = D\Sigma(l_{AB}, B, P)D^T$

onde

$$D = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_0} = \left[\frac{\partial f}{\partial l_{AB}} \quad \frac{\partial f}{\partial B} \quad \frac{\partial f}{\partial P}\right]_{X_0}$$

Determinando o valor das derivadas no ponto de expansão X_0 ...

$$\frac{\partial f}{\partial l_{AB}} = \frac{\text{sen}B}{\text{sen}P} = 0{,}47459$$

$$\frac{\partial f}{\partial B} = \frac{l_{AB}}{\text{sen}P}.\cos B = 3.169{,}04510 \text{ m}$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} = -\frac{l_{AB}.\cos P}{\text{sen}^2 P}.\text{sen}B = -214{,}47728 \text{ m}$$

Dessa forma,

$$D = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_0} = [\,0{,}47459 \quad 3.169{,}04510\text{m} \quad -214{,}47728 \text{ m}\,]$$

$$\Sigma(l_{AB}, B, P) = \begin{bmatrix} m^2_{lab} & m_{labB} & m_{labP} \\ m_{Blab} & m^2_{B} & m_{BP} \\ m_{Plab} & m_{PB} & m^2_{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0{,}033\text{ m})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2{,}92'')^2 & 0 \\ 0 & 0 & (3{,}84'')^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}00108\ m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8{,}50('')^2 & 0 \\ 0 & 0 & 14{,}75('')^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00108\ m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}99788 \times 10^{-10}\ rad^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}46690 \times 10^{-10}\ rad^2 \end{bmatrix}$$

$\therefore m^2_{lAP} = [\ 2{,}265643 \times 10^{-3}\ ]\ (m)^2$

De forma que $l_{AP} = 1.691{,}234\ m \pm 0{,}0476\ m$

Notar que, se tivessemos considerado

$$f1:\ l_{AP} = \frac{l_{AB}}{senP}.senB$$

$$f2:\ l_{BP} = \frac{l_{AB}}{senP}.senA$$

i. é., $(l_{AP}, l_{BP}) = f\,(l_{AB}, A, B, P)$, teríamos obtido a mvc das distâncias AP e BP (e, portanto, suas exatidões). Poderíamos, então, fazer a propagação de erros às coordenadas de P tanto a partir da estação A como a partir da estação B.

- exatidão do azimute A_{AP}: esse valor não está disponível, devendo ser calculado. O modelo matemático que fornece A_{AP} é:

$$f:\ A_{AP} = A_{AB} - A$$

A lei de propagação de variâncias e covariâncias aplicada ao caso fica:

$$\Sigma(A_{AP}) = D\Sigma(A_{AB}, A)D^T$$

onde

$$D = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial A_{AB}} & \dfrac{\partial f}{\partial A} \end{bmatrix}_{X_0} = [\ 1\ \ -1\ ]$$

e

$$\Sigma(A_{AB}, A) = \begin{bmatrix} m^2_{Aab} & m_{Aab,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}75('')^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lfloor\ m_{A,Aab} \quad m^2_A \ \rfloor \quad \lfloor\ 0 \quad 6{,}25\ ('')^2\ \rfloor$$

De forma que A_{AP} = 356-30-28,40 ± 4,58".

Estamos, agora, finalmente, em condições de efetuar a propagação de erros às coordenadas do Farolete Feiticeiras...

$$\Sigma(N_P, E_P) = D\Sigma(N_A, E_A, l_{AP}, A_{AP})D^T$$

$$\text{onde } D = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f1}{\partial N_A} & \frac{\partial f1}{\partial E_A} & \frac{\partial f1}{\partial l_{AP}} & \frac{\partial f1}{\partial A_{AP}} \\ \frac{\partial f2}{\partial N_A} & \frac{\partial f2}{\partial E_A} & \frac{\partial f2}{\partial l_{AP}} & \frac{\partial f2}{\partial A_{AP}} \end{bmatrix}_{X_0}$$

Determinando o valor das derivadas no ponto X_0, correspondente à situação real...

$f1$: $N_P = N_A + l_{AP}.\cos A_{AP}$
$f2$: $E_P = E_A + l_{AP}.\operatorname{sen} A_{AP}$

$$\frac{\partial f1}{\partial N_A} = 1$$

$$\frac{\partial f1}{\partial E_A} = 0$$

$$\frac{\partial f1}{\partial l_{AP}} = \cos A_{AP} = 0{,}9981432$$

$$\frac{\partial f1}{\partial A_{AP}} = -\operatorname{sen} A_{AP}.l_{AP} = 103{,}0149377 \text{ m}$$

$\partial f2$

$$\frac{\partial f2}{\partial N_A} = 0$$

$$\frac{\partial f2}{\partial E_A} = 1$$

$$\frac{\partial f2}{\partial l_{AP}} = \mathrm{sen}A_{AP} = -\,0{,}0609111$$

$$\frac{\partial f2}{\partial A_{AP}} = l_{AP}.\cos A_{AP} = 1.688{,}093708 \text{ m}$$

e, portanto,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}9981432 & 103{,}0149377 \text{ m} \\ 0 & 1 & -\,0{,}0609111 & 1.688{,}093708 \text{ m} \end{bmatrix}$$

e

$\Sigma(N_A, E_A, l_{AP}, A_{AP}) =$

$$= \begin{bmatrix} 3{,}837644 \times 10^{-3} \text{ m}^2 & -1{,}24814 \times 10^{-3} \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ -1{,}24814 \times 10^{-3} \text{ m}^2 & 1{,}644935 \times 10^{-3} \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}265643 \times 10^{-3} \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4{,}935930 \times 10^{-10} (\text{rad})^2 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\Sigma(N_P, E_P) = \begin{bmatrix} m^2_{Np} & m_{NpEp} \\ m_{EpNp} & m^2_{Ep} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}100119 \times 10^{-3} & -1{,}30005 \times 10^{-3} \\ -1{,}30005 \times 10^{-3} & 3{,}059914 \times 10^{-3} \end{bmatrix} (\text{m})^2$$

e, portanto,

N_P = 7.468.398,021 m $\pm$ 0,078 m
E_P = 688.002,123 m $\pm$ 0,055 m

PROPAGAÇÃO DE ERROS NA POLIGONAL.
Uma equipe da DHN realizou uma poligonal secundária entre os vértices Farol Ilha do Medo e Alumar, passando pelos vértices Silo e T-07. Dispõe-se dos seguintes elementos:

- Coordenadas UTM do Farol Ilha do Medo:

N = 9.721.183,730 m
E = 570.581,480 m

A exatidão dessas coordenadas não é conhecida.

- azimute Farol Ilha do Medo - Farolete Ponta da Madeira:

α_0 = 193-57-32,232 $\pm$ 3,47"

- ângulos horizontais

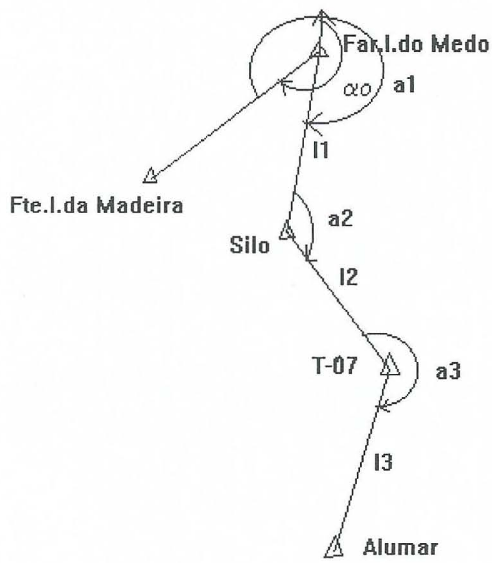
Estação Guarnecida	Estações Visadas	Ângulo Horizontal	emq
Farol Ilha do Medo	Farolete Pta. da Madeira Silo	a_1 = 348-51-44,580	2,70"
Silo	Farol Ilha do Medo T-07	a_2 = 166-13-06,375	2,50"
T-07	Silo Alumar	a_3 = 195-00-45,250	2,75"

- distâncias horizontais (efetuadas as reduções):

Farol Ilha do Medo - Silo - l_1 = 5.903,013 m
Silo - T-07 - l_2 = 6.289,283 m
T-07 - Alumar - l_3 = 5.157,267 m

As distâncias foram medidas com o Telurômetro MRA 5.

- esquema da situação:



Calcular a exatidão das coordenadas do vértice Alumar.

O modelo matemático das coordenadas de um vértice qualquer da poligonal é:

$$N_n = N_0 + \sum_{i=1}^{n} l_i.\cos\alpha_i$$

$$E_n = E_0 + \sum_{i=1}^{n} l_i.\text{sen}\alpha_i$$

no caso do vértice Alumar, n=3, ou seja,

$f1$: $N_3 = N_0 + l_1.\cos\alpha_1 + l_2.\cos\alpha_2 + l_3.\cos\alpha_3$
$f2$: $E_3 = E_0 + l_1.\text{sen}\alpha_1 + l_2.\text{sen}\alpha_2 + l_3.\text{sen}\alpha_3$

Assim, $(N_3, E_3) = f(N_0, E_0, l_1, l_2, l_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. A lei de propagação de variâncias e covariâncias aplicada ao caso fica

$\Sigma(N_3, E_3) = D\Sigma(N_0, E_0, l, \alpha)D^T$

A exatidão das coordenadas de Alumar depende das exatidões das coordenadas do vértice Farol Ilha do Medo, das distâncias entre os vértices da poligonal e dos azimutes dos lados da poligonal.

- exatidão das coordenadas do Farol Ilha do Medo:

$N_0 = 9.721.183,730$ m
$E_0 = \quad 570.581,480$ m

A exatidão dessas coordenadas deveria ser conhecida. Não o é, entretanto.

- exatidão das distâncias l_1, l_2 e l_3: o manual do Telurômetro MRA 5 fornece a exatidão das distâncias medidas com esse equipamento ($\pm$ 1,5 cm + 5 ppm). Assim,

$l_1 = 5.903,013 \text{ m} \pm 0,045 \text{ m}$
$l_2 = 6.289,283 \text{ m} \pm 0,046 \text{ m}$
$l_3 = 5.157,267 \text{ m} \pm 0,041 \text{ m}$

Não existe correlação entre as distâncias (suas covariâncias são nulas). Assim,

$$\Sigma l = \begin{bmatrix} m^2_{l1} & m_{l1l2} & m_{l1l3} \\ m_{l2l1} & m^2_{l2} & m_{l2l3} \\ m_{l3l1} & m_{l3l2} & m^2_{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00198 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00216 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00166 \end{bmatrix} (m)^2$$

- exatidão dos azimutes: as exatidões dos azimutes não estão disponíveis, devendo ser calculadas. O modelo matemático que fornece os azimutes é:

$$\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1).180^0$$

Assim,

$f1$: $\alpha_1 = \alpha_0 + a_1$
$f2$: $\alpha_2 = \alpha_0 + a_1 + a_2 \quad - 180^0$
$f3$: $\alpha_3 = \alpha_0 + a_1 + a_2 + a_3 - 360^0$

No ponto X_0: $\alpha_1 = 182\text{-}49\text{-}16{,}812$

$\alpha_2 = 169\text{-}02\text{-}23{,}187$

$\alpha_3 = 184\text{-}03\text{-}08{,}437$

As exatidões dos azimutes dependem das exatidões do azimute inicial (α_0) e dos ângulos poligonais (a_1, a_2, a_3). Assim...

$$\Sigma\alpha = D\Sigma(\alpha_0,a)D^T$$

sendo
$$\Sigma(\alpha_0,a) = \begin{bmatrix} m^2_{\alpha o} & m_{\alpha oa1} & m_{\alpha oa2} & m_{\alpha oa3} \\ m_{a1_{\alpha o}} & m^2_{a1} & m_{a1a2} & m_{a1a3} \\ m_{a2_{\alpha o}} & m_{a2a1} & m^2_{a2} & m_{a2a3} \\ m_{a3_{\alpha o}} & m_{a3a1} & m_{a3a2} & m^2_{a3} \end{bmatrix}$$

como tanto o azimute inicial e os ângulos poligonais e esses entre sí são independentes estatísticamente...

$$\Sigma(\alpha_0,a) = \begin{bmatrix} (3{,}47")^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2{,}70")^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2{,}50")^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2{,}75")^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } D = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f1}{\partial \alpha_0} & \dfrac{\partial f1}{\partial a_1} & \dfrac{\partial f1}{\partial a_2} & \dfrac{\partial f1}{\partial a_3} \\ \dfrac{\partial f2}{\partial \alpha_0} & \dfrac{\partial f2}{\partial a_1} & \dfrac{\partial f2}{\partial a_2} & \dfrac{\partial f2}{\partial a_3} \\ \dfrac{\partial f3}{\partial \alpha_0} & \dfrac{\partial f3}{\partial a_1} & \dfrac{\partial f3}{\partial a_2} & \dfrac{\partial f3}{\partial a_3} \end{bmatrix}_{X_0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $\Sigma\alpha = D\Sigma(\alpha_0,a)D^T$

$$\Sigma\alpha = \begin{bmatrix} m^2_{\alpha 1} & m_{\alpha_1\alpha_2} & m_{\alpha_1\alpha_3} \\ m_{\alpha_2\alpha_1} & m^2_{\alpha} & m_{\alpha_2\alpha_3} \\ m_{\alpha_3\alpha_1} & m_{\alpha_3\alpha_2} & m^2_{\alpha 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19{,}3309 & 19{,}3309 & 19{,}3309 \\ 19{,}3309 & 25{,}5809 & 25{,}5809 \\ 19{,}3309 & 25{,}5809 & 33{,}1434 \end{bmatrix} (")^2$$

de modo que $\Sigma(N_0, E_0, l, \alpha) = \Sigma(l, \alpha) =$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}00198 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00216 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}00166 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19{,}3309 & 19{,}3309 & 19{,}3309 \\ 0 & 0 & 0 & 19{,}3309 & 25{,}5809 & 25{,}5809 \\ 0 & 0 & 0 & 19{,}3309 & 25{,}5809 & 33{,}1434 \end{bmatrix} \begin{matrix} (m)^2 \\ \\ (")^2 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}00198 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00216 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}00166 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4{,}54362 \times 10^{-10} & 4{,}54362 \times 10^{-10} & 4{,}54362 \times 10^{-10} \\ 0 & 0 & 0 & 4{,}54362 \times 10^{-10} & 6{,}01264 \times 10^{-10} & 6{,}01264 \times 10^{-10} \\ 0 & 0 & 0 & 4{,}54362 \times 10^{-10} & 6{,}01264 \times 10^{-10} & 7{,}79017 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \begin{matrix} (m)^2 \\ \\ (rad)^2 \end{matrix}$$

Como $(N_3, E_3) = f(l_1, l_2, l_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$$D = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f1}{\partial l_1} & \dfrac{\partial f1}{\partial l_2} & \dfrac{\partial f1}{\partial l_3} & \dfrac{\partial f1}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial f1}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial f1}{\partial \alpha_3} \end{bmatrix}$$

$$\left\lfloor \frac{\partial f2}{\partial l_1} \quad \frac{\partial f2}{\partial l_2} \quad \frac{\partial f2}{\partial l_3} \quad \frac{\partial f2}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial f2}{\partial \alpha_2} \quad \frac{\partial f2}{\partial \alpha_3} \right\rfloor_{X_0}$$

Calculando o valor das derivadas no ponto X_0, correspondente ao ponto de expansão...

$$\frac{\partial f1}{\partial l_1} = \cos\alpha_1 = -\,0{,}9987879$$

$$\frac{\partial f1}{\partial l_2} = \cos\alpha_2 = -\,0{,}9817594$$

$$\frac{\partial f1}{\partial l_3} = \cos\alpha_3 = -\,0{,}9974999$$

$$\frac{\partial f1}{\partial \alpha_1} = -\,l_1.\mathrm{sen}\alpha_1 = 290{,}5564382 \text{ m}$$

$$\frac{\partial f1}{\partial \alpha_2} = -\,l_2.\mathrm{sen}\alpha_2 = -1.195{,}765735 \text{ m}$$

$$\frac{\partial f1}{\partial \alpha_3} = -\,l_3.\mathrm{sen}\alpha_3 = 364{,}4526472 \text{ m}$$

$$\frac{\partial f2}{\partial l_1} = \mathrm{sen}\alpha_1 = -\,0{,}0492217$$

$$\frac{\partial f2}{\partial l_2} = \mathrm{sen}\alpha_2 = 0{,}1901275$$

$$\frac{\partial f2}{\partial l_3} = \mathrm{sen}\alpha_3 = -\,0{,}0706678$$

$$\frac{\partial f2}{\partial \alpha_1} = l_1.\cos\alpha_1 = -\ 5.895,857820 \text{ m}$$

$$\frac{\partial f2}{\partial \alpha_2} = l_2.\cos\alpha_2 = -\ 6.174,562735 \text{ m}$$

$$\frac{\partial f2}{\partial \alpha 3} = l_3.\cos\alpha_3 = -\ 5.144,373351 \text{ m}$$

e, portanto, a matriz D é ...

$$\begin{bmatrix} -0,9987879 & -0,9817594 & -0,9974999 & 290,5564382 & -1.195,765735 & 364,4526472 \\ -0,0492217 & 0,1901275 & -0,0706678 & -5.895,857820 & -6.174,562735 & -5.144,373351 \end{bmatrix}$$

Dessa forma,

$\Sigma(N_P, E_P) = D\Sigma(l, \alpha)D^T =$

$$= \begin{bmatrix} m^2_{Np} & m_{NpEp} \\ m_{EpNp} & m^2_{Ep} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,966828 \times 10^{-3} & 5,089855 \times 10^{-3} \\ 5,089855 \times 10^{-3} & 158,2659 \times 10^{-3} \end{bmatrix} (m)^2$$

e, portanto, N = 9.703.968,936 m $\pm$ 0,077 m
E = 571.122,237 m $\pm$ 0,398 m.

Notar que:

- as coordenadas são correlacionadas, como era de se esperar;
- é possível calcular a propagação de variâncias e covariâncias no gabinete, antes da execução da poligonal, no campo, usando valores aproximados para ângulos e distâncias e os emq constantes dos manuais do equipamento ou típicos da operação. Dessa forma, é possível simular alternativas ainda na fase de planejamento da poligonal e optar pela que apresente melhores condições;
- a propagação de variâncias e covariâncias foi feita no plano, considerando apenas as coordenadas planimétricas; no entanto, seria possível considerar também a altitude: nesse caso, a matriz D deixa de ter as dimensões (2 x 2n) para ter dimensões (3 x 3n) e a matriz Σ (N_P, E_P) passa a ser Σ (N_P, E_P, h), deixando de ter dimensões (2 x 2) para ter dimensões (3 x 3).

PROPAGAÇÃO DE ERROS NO NIVELAMENTO TRIGONOMÉTRICO.
Uma equipe do CAHO guarneceu a estação Farolete Ponta da Armação e observou direções e distâncias zenitais como a seguir (vide propagação de erros na medida de direções):

	Estação Visada	Direção (valor adotado)	emq (m)	Distâncias Zenitais	emq (m)
d1	Fte. Laje	000-00-00,0	2,0"	089-54-54,0	1,5"
d2	Fte.Villegagnon	024-10-32,5	2,5"	089-55-26,0	1,5"
d3	Torreão I.Fiscal	053-06-45,0	2,5"	089-22-11,0	2,0"
d4	Fte.Feiticeiras	081-12-00,5	1,5"	089-52-03,5	2,5"

Dispõe-se, ainda, dos seguintes elementos:

- distância Farolete Ponta da Armação - Torreão da Ilha Fiscal:

$l_{AP} = 3.563,55 \text{ m} \pm 0,033 \text{ m}$

(vide propagação de erros em uma irradiação).

- altura instrumental do teodolito = 1,60 m ± 2,5 cm

- altura do sinal visado (Torreão da Ilha Fiscal) = 0 m

Calcular a exatidão da altitude do Torreão da Ilha Fiscal, sabendo-se que a altitude da estação Farolete Ponta da Armação é de 1,751 m.

O modelo matemático do nivelamento trigonométrico é:

$$\Delta h = l_{AP}.tg(90^0 - z) + a_i - a_s$$

Assim, $\Delta h = f(l_{AP}, z, a_i, a_s)$. A lei de propagação de variâncias e covariâncias aplicada ao caso resulta:

$$\Sigma(\Delta h) = D\Sigma(l_{AP}, z, a_i, a_s)D^T$$

No caso,

$$\Sigma(l_{AP}, z, a_i, a_s) = \begin{bmatrix} (0,033 \text{ m})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2,0")^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$
\begin{bmatrix}
\ldots & & & \\
0 & 0 & (0{,}025\ m)^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
0{,}00109\ m^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 9{,}401722 \times 10^{-11}\ rad^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}000625\ m^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0\ m^2
\end{bmatrix}
$$

e

$$D = \left[\frac{\partial f}{\partial l_{AP}} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \quad \frac{\partial f}{\partial a_i} \quad \frac{\partial f}{\partial a_s} \right]$$

Calculando as derivadas no ponto de expansão X_0 da função...

$$\frac{\partial f}{\partial l_{AP}} = tg(90^0 - z) = 0{,}011001$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = l_{AP}.sec^2(90^0 - z) = 3.563{,}98126\ m$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_s} = -1$$

Assim,

$$D = [\ 0{,}011001 \quad 3.563{,}98126\ m \quad 1 \quad -1\ ] \text{ e } D^T = \begin{bmatrix} 0{,}011001 \\ 3.563{,}98126\ m \\ 1 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

[- 1]

e, portanto, $\sum(\Delta h) = m^2_{\Delta h} = 1{,}819342 \times 10^{-3}\ m^2$.

Assim, h (Torreão da Ilha Fiscal) = 42,553m ± 0,043 m.

CONCLUSÃO.

As normas mais recentes da Organização Hidrográfica Internacional (1995) estabelecem padrões mínimos para os levantamentos hidrográficos, com o propósito de garantir sua confiabilidade e determinam que a incerteza espacial relativa aos dados obtidos no levantamento seja adequadamente quantificada, abandonando-se definitivamente avaliações com base em elementos subjetivos. Esse fato torna necessário o conhecimento da exatidão dos pontos das rede principal e secundária, determinados ou utilizados no levantamento ou, como alternativa, o uso exclusivo do GPS para posicionamento, em terra e no mar, aceitando sem questionamento os valores de exatidão fornecidos pelos programas de processamento comercializados pelo fabricante ou distribuidor do equipamento. Esse procedimento, além de limitar extraordinariamente os trabalhos, parece chocar-se com as severas normas de contenção de despesas que tem regido alguns setores do Serviço Público brasileiro, aí incluidos os serviços cartográficos. O presente artigo mostra, com exemplos concretos, extraidos do dia-a-dia do CAHO, como efetuar a propagação de erros e calcular exatidões para os métodos topo - geodésicos convencionais mais empregados pela DHN, mesmo quando não se dispõe de qualquer dado anterior a respeito do assunto. Deixou-se de abordar aqui apenas o processo da interseção a ré (problema de Pothenot) para que o artigo não se tornasse exageradamente longo e exaustivo.

BIBLIOGRAFIA.

CAMIL GEMAEL. Introdução ao Ajustamento de Observações - Aplicações Geodésicas. Editora da Universidade Federal do Paraná, 1994

CASTELLO BRANCO, M. Síntese da Teoria dos Erros. Instituto Militar de Engenharia, 1968.

FERNANDES, R. A. Introdução ao Ajustamento de Observações. Diretoria de Hidrografia e Navegação, 1994.

MESQUITA, M. M. et al. Relatório da Semana Topográfica. Diretoria de Hidrografia e Navegação, 1995.

ORGANIZAÇÃO HIDROGRÁFICA INTERNACIONAL. Publicação no. 44, 1995.

PALUMBO BRANDÃO, M. P. Teoria dos Erros. Diretoria de Hidrografia e Navegação, 1963.

SANTOS FRANCO, A. Astronomia de Campo. Diretoria de Hidrografia e Navegação, 1950.

SCHENK, S. R. et al. Relatório da Semana Topográfica. Diretoria de Hidrografia e Navegação, 1995.