

QUANTIFICAÇÃO DE DISCREPÂNCIAS ENTRE FEIÇÕES LINEARES POR RETÂNGULOS EQUIVALENTES

Luiz Felipe Ferreira
Instituto Militar de Engenharia – IME
Departamento de Eng. Cartográfica – DE/6
Pça Gen. Tibúrcio 80 – Rio de Janeiro – RJ
CEP: 22290-270 – FAX: (0XX021) 275-9047
E-mail: felipe@taurus.ime.eb.br

Jorge Pimentel Cintra
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – EPUSP
Departamento de Engenharia de Transportes – PTR
Cidade Universitária – Caixa Postal 61.548
CEP: 05424-970 – São Paulo – SP

RESUMO

O presente trabalho insere-se em uma pesquisa de doutoramento (Ferreira, 1998) sobre a geração de bases cartográficas digitais destinadas à navegação terrestre e, portanto abrangendo, fundamentalmente, feições lineares representativas das vias de tráfego. Um dos principais problemas encontrados referia-se a quantificação de discrepâncias entre duas representações de uma mesma feição linear, não apenas pela qualidade dos resultados como, principalmente, pelo tempo necessário à sua obtenção. Propõe-se um método que transforma duas representações de uma mesma feição em um polígono que terá sua área e perímetro calculados analiticamente. Estes valores serão associados a um retângulo dito equivalente. A menor dimensão deste retângulo corresponde ao afastamento médio entre as duas representações inicialmente consideradas. Os resultados demonstram ser possível eliminar os inconvenientes apresentados, permitindo, inclusive, maior flexibilidade na agregação de feições e avaliação de uma malha de trânsito.

ABSTRACT

This paper is part of a doctoral research on digital cartographic data generation applied to terrestrial navigation which deals, mainly, with linear features that maps a traffic network. An important problem faced was how to quantify the planimetric shifts between two cartographic representations of a linear feature considering the quality of the results and time needed. It is proposed a method that mix the two representations into a polygon whose area and perimeter is analytically calculated. This measures are associated to a rectangle named equivalent. The smaller dimension of the rectangle corresponds to the wanted averaged shift. It shows that some inconvenient in previous methods are eliminated as well as more flexibility obtained when aggregating features to evaluate the whole traffic network.

1. COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Em muitos casos práticos existem duas imagens ou figuras representativas da mesma realidade e que apresentam discrepâncias entre si. É o caso, por exemplo, de dois mapas de curvas de nível gerados por diferentes programas de modelagem digital de terrenos: a superposição de ambos, em geral, mostra variações muito grandes na posição planimétrica de cada curva. Outro caso é a comparação entre uma base cartográfica e o respectivo levantamento a partir de uma foto aérea sem correção das distorções inerentes à perspectiva central e relevo. Pode-se citar ainda a discrepância entre um levantamento topográfico convencional e outro executado com GPS, que é o caso de interesse mais imediato.

O deslocamento entre as representações da feição pode advir de fonte sistemática ou aleatória, por exemplo, pelo emprego de parâmetros inadequados na transformação entre sistemas geodésicos, projeções cartográficas distintas ou simplesmente natureza distinta do processo de levantamento. Não importa, neste contexto, os motivos que proporcionaram tal afastamento e sim que existe uma não coincidência entre as imagens ou, mais precisamente, existem diferenças entre as coordenadas dos pontos homólogos nas duas representações. Como medir e quantificar essas diferenças? O problema torna-se particularmente difícil quando não é possível identificar muitos pontos homólogos, ou seja, não se dispõe de uma associação ponto a ponto apesar do conhecimento explícito de que ambas as representações correspondem a uma mesma feição - Figura 1.

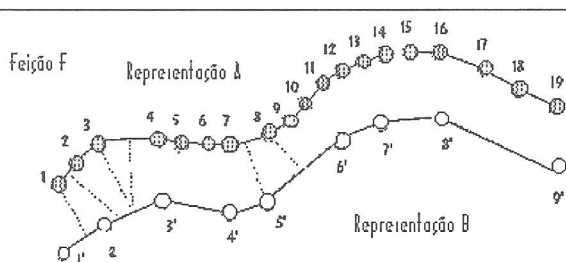


Figura 1 – Representações distintas de uma mesma feição

O presente trabalho pretende apresentar uma metodologia que permita “medir” ou quantificar a discrepância entre duas feições, resolvendo o problema de forma precisa e rápida.

2. O PROCESSO CLÁSSICO

Classicamente é empregado o método de estatística pontual para determinar o erro padrão de uma carta e, conseqüentemente, classificá-la em categorias. São estabelecidos quantitativos percentuais sobre o total de pontos avaliados bem como limites de discrepância entre as observações relativas a uma feição pontual obtidas no campo e sobre sua representação no documento cartográfico. Alguns exemplos:

Resolução da III Reunião Pan-Americana de consulta em Cartografia - Caracas - 1946.

“ ... 90 % dos pontos testados, relativos a acidentes nítidos no terreno não devem apresentar afastamento, das suas reais posições, superiores a $\pm 0,5$ mm na escala da carta”

Resolução n.º 5 da I Reunião Brasileira de Cartografia - São Paulo - 1958.

“ ... em planimetria, pelo menos 90 % dos pontos nítidos, identificáveis no terreno, estarão corretamente locados com erro gráfico menor que 0,5 mm.”

U.S. National Map Accuracy - Bureau of the Budget

“ ... 90 % dos elementos bem definidos, como interseção de caminhos, marcos trigonométricos, cantos de grandes edifícios, etc., com exceção daqueles que estejam inevitavelmente deslocados pelo uso de convenções cartográficas, devem estar posicionados com erro inferior a 0,5 mm na escala da carta ... ”

Os limites apresentados correspondem à melhor classificação de um documento cartográfico e apenas ilustram o tratamento usualmente adotado. Telles e Rodrigues (1990) apresentam um detalhamento destas especificações como por exemplo: os limites aceitáveis para os 10% restantes, critérios de rejeição do documento como um todo ou remanejamento para outras classes de cartas e definição de classes para diversos países..

Esta forma de avaliação e classificação de mapas pode falsear resultados pois a escolha dos pontos é uma tarefa subjetiva que, quando conduzida por profissionais distintos, poderá produzir resultados dispares.

Outro inconveniente refere-se à dificuldade para a avaliação de diferenças entre representações distintas de feições lineares ou planares. Como exemplo pode-se citar a comparação - cálculo do erro relativo - entre duas bases cartográficas de uma mesma região. A determinação do afastamento médio entre duas

representações de uma estrada, linha de transmissão, limite administrativo ou contorno de lagoa ficará condicionada a seleção nas duas imagens de uma série de pontos homólogos sobre o alinhamento ou borda da feição - nem sempre "bem identificáveis" - e posterior tratamento estatístico. Mesmo que esta operação seja realizada inserindo-se pontos a intervalos regulares, dependerá do ponto inicial escolhido e, conseqüentemente, poderá gerar valores distintos após a totalização dos resultados. A Figura 2 ilustra o problema apresentado, de forma bastante simplificada, considerando 2 conjuntos de medições.

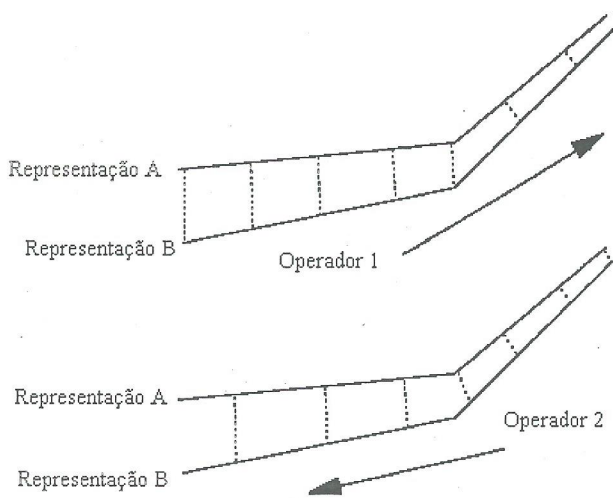


Figura 2 - Medição de afastamentos por amostragem

Mesmo sem realizar uma quantificação rigorosa pode-se notar que os resultados produzidos pelo operador 2 produzirão resultados "melhores" que aqueles gerados pelo operador 1, simplesmente por ter iniciado as medições pelo outro extremo das representações da feição, onde as mesmas encontram-se mais próximas. Outra possível fonte de incerteza encontra-se relacionada com o perpendicularismo no momento da medição, isto é, se tomado com referência à representação A ou B. Lugnani (1980) já havia sinalizado que a inserção de pontos a intervalos regulares não garante uma rigorosa correspondência ponto-a-ponto.

3. O RETÂNGULO E A EQUAÇÃO DE 2º GRAU

Como alternativa ao método tradicional de medir afastamentos, propõe-se realizar essa tarefa através da medição da área existente entre as duas

representações da feição e, para simplificar, a substituição da figura resultante por um retângulo equivalente. A Figura 3 representa a seqüência proposta.

Em função disso, vale desenvolver e recordar alguns elementos teóricos referentes aos retângulos que serão utilizados a seguir. Assim, seja um retângulo de lados x_1 e x_2 , correspondendo à largura e comprimento, respectivamente.

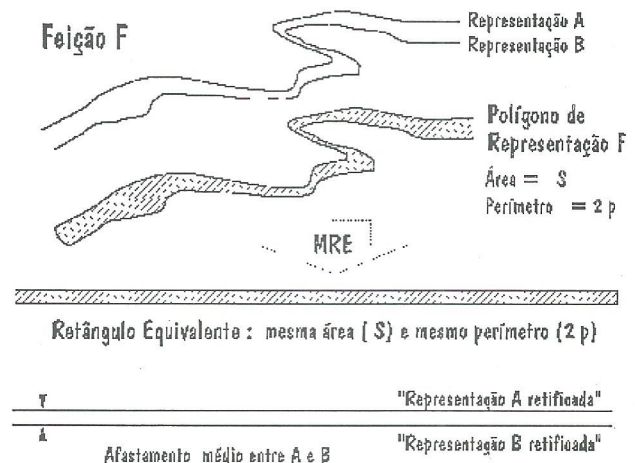
Sua área - S - é dada por:

$$S = x_1 \cdot x_2 \quad (1)$$

e seu perímetro - $2p$ - por:

$$2p = 2x_1 + 2x_2 \quad (2)$$

Propõe-se o problema inverso que consiste na recuperação dos lados originais x_1 e x_2 , do retângulo, a partir das duas grandezas derivadas, S e p . Serão abordados 3 procedimentos de solução, denominados



P-0, P-I e P-II.

Figura 3 - Construção do retângulo equivalente

3.1. O procedimento P-0

Este procedimento, que por definição é aproximado e já foi testado anteriormente (Lugnani, 1980), inicia-se por admitir que o semiperímetro seja a aproximação de um dos lados procurados - $x_2 = p$ - o que corresponderia, rigorosamente, a que o outro lado fosse nulo - $x_1 = 0$ - pois todo o contorno da figura seria distribuído no comprimento, não restando nenhuma componente transversal. A aproximação vale para figuras ou retângulos muito alongados. Nesta hipótese, não rigorosa, o lado x_1 poderá ser

obtido dividindo-se a área total pelo semiperímetro, ou seja:

$$X_2 = p \quad (3)$$

$$X_1 = \frac{S}{p}$$

Obviamente neste procedimento como o valor de x_2 está superestimado, a determinação de x_1 será subestimada, uma vez que deveriam ser corretamente calculados por:

$$x_2 = p - x_1 \quad (4)$$

$$x_1 = \frac{S}{p - x_1}$$

O erro obtido na apuração de x_1 é inversamente proporcional à relação $x_2:x_1$.

Tem-se então:

$$\frac{x_2}{x_1} = k \therefore x_2 = k \cdot x_1$$

$$p = (1+k) \cdot x_1 \quad (5)$$

$$S = k \cdot x_1^2$$

o valor correto de x_1 seria obtido por:

$$x_1 = \frac{S}{k \cdot x_1} \quad (6)$$

e, o aproximado, a partir de (3) por:

$$X_1 = \frac{S}{(1+k) \cdot x_1} \quad (7)$$

Logo, quanto maior o valor de k , melhor será a aproximação de x_1 - mais próxima do valor correto - devido à menor influência do termo unitário no denominador da expressão (7),

(8)

ou seja, quando cresce o valor de k , a relação entre os valores correto e aproximado de x_1 tendem a se igualar pois o termo $1/k$ tende a zero.

3.2. O Procedimento P-I

Um refinamento deste procedimento pode ser obtido através de um processo iterativo, com valores iniciais calculados pelas equações (3) e recalculados

iterativamente pelas equações (5) transformadas nas seguintes:

$$x_{BREVEi+1} = \sqrt{S \div k_i} \quad (9)$$

O estabelecimento de uma diferença máxima entre duas iterações consecutivas será determinante da qualidade final dos valores obtidos para x_1 e $x_2 = k \times x_1$, isto é, quanto menor a diferença entre duas iterações sucessivas, mais estáveis serão os resultados. A forma mais simples é determinar o término do processo sobre o valor de x_i , quando for obtida uma diferença especificada na unidade linear de trabalho - p. ex: 1 metro, 1 centímetro. Vale ressaltar ainda que o estabelecimento de uma tolerância muito pequena pode resultar em problemas numéricos ou computacionais de tal sorte que este valor nunca seja atingido.

3.3. O Procedimento P-II

Uma terceira forma de recuperação dos valores x_1 e x_2 consiste na solução exata e direta do sistema de duas equações e duas incógnitas De (1) e (2) decorre:

$$x_2 = p - x_1$$

$$S = x_1 \cdot (p - x_1) \quad (10)$$

$$x_1^2 - p \cdot x_1 + S = 0$$

A solução desta equação do 2º grau irá fornecer, corretamente, através das Fórmulas de Baskara, os valores correspondentes aos lados x_1 e x_2 do retângulo procurado.

$$x_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4S}}{2} \quad (11)$$

$$x_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4S}}{2}$$

4. O RETANGULO EQUIVALENTE

Dadas duas representações A e B de uma feição F - Figura 3 - pode-se criar um polígono fechado unindo-se convenientemente os extremos das figuras.

A partir do conhecimento das coordenadas descritoras dos pontos que definem geometricamente cada representação pode-se, facilmente, calcular a área e o perímetro deste polígono.

A questão agora é encontrar um indicador ou indicadores da divergência ou não coincidência dessas representações já que, como visto anteriormente -

Figura 1, Item 2 -, não basta medir afastamentos pontuais entre uma e outra.

O primeiro indicador natural dessa diferença seria a área do polígono: quanto maior a área, maior a diferença ou deslocamento planimétrico de uma linha com relação a outra. Este indicador é empregado em implementações de algoritmos de generalização cartográfica como por exemplo Douglas & Peuker.

No entanto, só a área pode não fornecer uma idéia precisa do que está ocorrendo pois pode-se ter uma feição curta com representações muito afastadas produzindo uma área numericamente idêntica a uma feição longa com representações muito próximas.

Surge, naturalmente, um segundo indicador que é o perímetro. Este fornece, de alguma maneira, o comprimento da feição.

O conjunto destes dois indicadores - área e perímetro - serve como medida do afastamento porém não proporciona, diretamente, nem a forma nem uma noção geométrica precisa da configuração.

Deste modo recorre-se à noção de Retângulo Equivalente com suas duas dimensões - comprimento x_2 e largura x_1 - traduzindo, respectivamente, o comprimento retificado e o posicionamento relativo ou afastamento entre as representações. A vantagem de contar com estes indicadores derivados da área e do perímetro é poder comparar, de modo rápido e seguro, a discrepância relativa entre feições lineares oriundas de mapas ou levantamentos distintos.

Na prática tem-se figuras complexas, com recortes e reentrâncias. O problema portanto é o de encontrar um retângulo, equivalente em área e comprimento - dimensão x_2 -, ao polígono de representação dado, ou seja, conhecidos S e p do polígono, qual valor deverá ser atribuído a x_1 -afastamento planimétrico procurado- para que sejam válidas as expressões (1) e (2). A Figura 4 ilustra 4 exemplos de polígonos de representação simples.

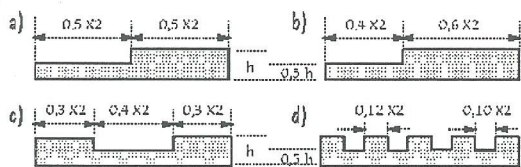


Figura 4 – Polígonos de representação simples.

Caso se deseje um retângulo, equivalente em área e comprimento x_2 , o valor esperado para x_1 será obtido a partir da divisão da área total calculada pelo valor real x_2 . Assim, para os casos ilustrados tem-se:

Tabela 1 - Erro na aproximação do perímetro.

	S	2p	x_1	2_p	ϵ
	u.a.	u.l.	u.l.	u.l.	u.l.
a	$0,75x_2h$	$2x_2+2h$	$0,75h$	$\frac{2x_2+1,5}{h}$	$0,5h$
b	$0,80x_2h$	$2x_2+2h$	$0,80h$	$\frac{2x_2+1,6}{h}$	$0,4h$
c	$0,80x_2h$	$2x_2+3h$	$0,80h$	$\frac{2x_2+1,5}{h}$	$1,4h$
d	$0,80x_2h$	$2x_2+6h$	$0,80h$	$\frac{2x_2+1,5}{h}$	$4,4h$

Analisando-se os casos acima vê-se que as figuras 4a) e 4b) possuem o mesmo perímetro e áreas diferentes. Por outro lado, 4b), 4c) e 4d) possuem a mesma área e perímetros diferentes. A diferença entre o perímetro real do polígono de representação e do Retângulo Equivalente calculado - última coluna da Tabela 1 - é um indicador da maior ou menor quantidade de reentrâncias existentes.

5. AVALIAÇÃO

À primeira vista a solução direta e exata (P-II) seria preferível. No entanto as soluções aproximada (P-0) e iterativa (P-I) podem ser úteis em determinadas situações.

Enquanto P-0, produz resultados subestimados em função da proporção k entre x_1 e x_2 , o procedimento P-I calcula valores exatos dentro de uma tolerância preestabelecida.

Para avaliar a aproximação do procedimento P-0, pode-se definir o erro relativo percentual, sobre a variável x_1 , partindo das expressões (5) e (7) da seguinte forma:

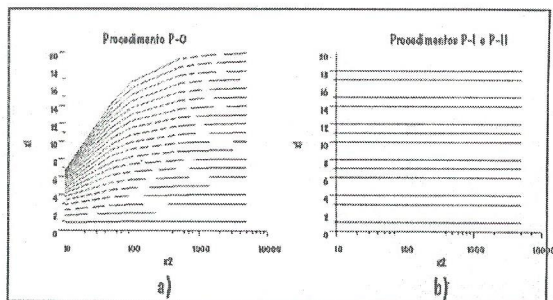
$$\epsilon = x_1 - X_1 \cdot \text{over } x_1 = \frac{1}{1+k} \quad (12)$$

Pode-se então, a título ilustrativo, apresentar uma tabela quantitativa mostrando que o erro de aproximação é pequeno quando se tem representações de feições de grande comprimento situadas próximas entre si.

Tabela 2 - Erro relativo devido ao fator k.

k	ϵ
1	50%
2	33%
10	9%
100	1%

As Figuras 5a e 5b reforçam as afirmações anteriores. Inicialmente foram selecionados valores discretos para x_1 e x_2 e calculados os valores correspondentes de S e p. O segundo passo foi a solução do problema inverso, ou seja, recuperação de x_1 , por cada procedimento, a partir daqueles valores. O eixo das ordenadas representa o valor original de x_1 variando na faixa entre 1 e 20 unidades lineares, com intervalo unitário. O eixo das abscissas representa o valor original de x_2 variando no intervalo 10 a 5000 unidades lineares, em escala logarítmica. As curvas apresentadas correspondem aos valores estimados



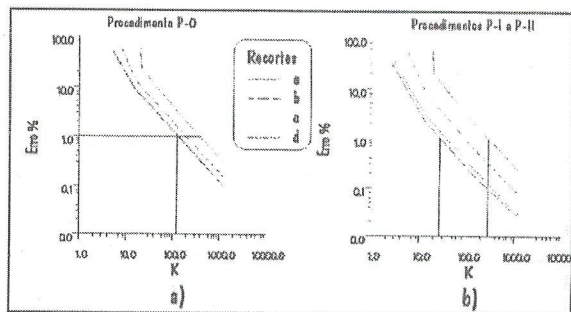
para a variável x_1 .

Figura 5 – Testes de validação do MRE – polígonos sem reentrâncias.

Independente do procedimento adotado haverá sempre uma super-estimação de x_2 pois o modelo geométrico eleito é o de um retângulo e, portanto, as reentrâncias não são consideradas. Como consequência imediata, ao se pretender manter a área fixa, haverá uma subestimação de x_1 produzindo um perímetro sempre inferior ao da figura original - Tabela 1. A diferença para o valor real é proporcional a quantidade e profundidade dos "recortes" no polígono, isto é, embora 4b), 4c) e 4d) possam a mesma área e seja esperado um mesmo valor de x_1 , o caso 4b) será o melhor avaliado, por possuir semiperímetro mais próximo da dimensão x_2 que também se deseja manter fixa.

As Figuras 6a e 6b apresentam o erro percentual em função do coeficiente de proporcionalidade k bem como dão uma idéia da quantidade de "recortes", para os casos apresentados na Figura 4.

As Figuras 7a e 7b, de forma análoga, apresentam os resultados para 4 triângulos com valores de base iguais



a 10, 15, 16 e 20 unidades lineares.

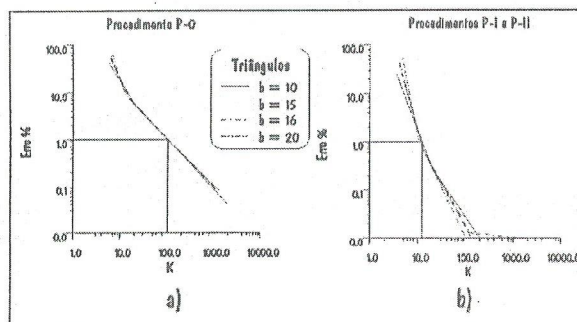


Figura 6 – Testes de validação do MRE – polígonos com reentrâncias.

Figura 7 – Testes de validação do MRE – triângulos.

A partir das figuras 5 a 7, pode-se inferir um estimador de qualidade para a determinação através da relação $x_2:x_1$ efetivamente calculada. Embora não represente, no caso geral, a real proporcionalidade entre as dimensões procuradas, muito se aproxima. O pior caso apresentado corresponde à figura 4d, por ser a que possui maior quantidade de "recortes". Nesta situação, uma relação $k = x_2:x_1$ próxima de 300, garante um erro relativo percentual abaixo de 1%. Este valor reforça a influência dos recortes quando comparado com o valor 100 obtido na Tabela 2. Quanto maior este valor, melhor terá sido a determinação e, propõe-se esta relação como um primeiro estimador de qualidade da determinação.

$$Q_1 = x_2 \div x_1 \quad (13)$$

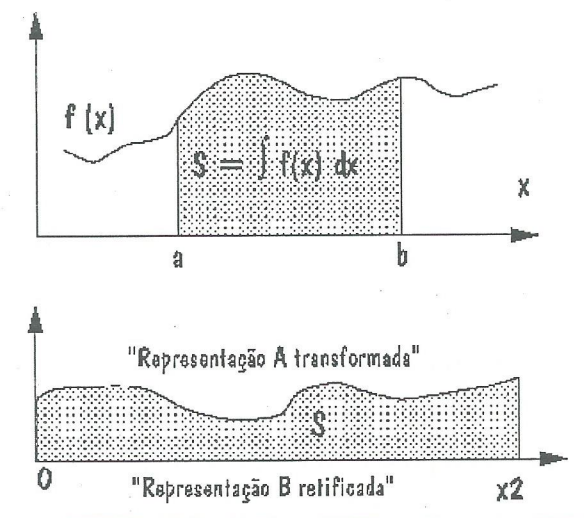
Outro estimador de qualidade consiste em comparar a variação entre o semiperímetro p e a dimensão x_2 obtida. Neste caso, quanto mais próximo do valor

nulo, melhor a qualidade da determinação, pois denotará menor quantidade de recortes no polígono.

$$Q_2 = ((p + x_2) - 1) \times 10^6 \text{ ppm} \quad (14)$$

6. CONCLUSÕES

O método proposto para comparação de bases cartográficas digitais fundamenta-se na determinação do Retângulo Equivalente ao polígono formado por duas representações de uma dada feição. Por equivalente, entenda-se mesma área e mesma dimensão longa. Assim, sejam duas representações de uma mesma feição linear descritas por meio das seqüências de pontos definidores de suas geometrias - Figura 3. Em meio digital, esta seqüência é representada por uma sucessão de coordenadas bidimensionais. Ao conectar-se as duas extremidades das representações, obtém-se um polígono fechado, denominado Polígono de Representação. Analiticamente pode-se facilmente calcular tanto a sua área - por exemplo, através da Fórmula de Gauss ou do Trapézio- quanto seu perímetro - somatório das distâncias entre cada dois vértices consecutivos -. Aplicando-se o problema inverso proposto, calcula-se as duas raízes x_2 e x_1 onde x_2 se aproximará do semiperímetro, ou seja do comprimento da feição analisada e x_1 representará o afastamento médio entre as duas bordas do polígono, ou seja, a discrepância



média entre as duas representações.

Figura 8 - Analogia ao Teorema do Valor Médio.

Pode-se fazer ainda, uma analogia - Figura 8 - entre o Teorema do Valor Médio e o método proposto. As expressões (15) demonstram a correspondência entre os elementos. A aplicação do teorema fica impossibilitada devido ao desconhecimento das funções que descrevem as representações.

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \cdot \int u(x) dx \quad (15)$$

$$X_1 = \frac{1}{x_2 - O} \cdot S$$

Nesta linha de solução uma alternativa complexa e custosa do ponto de vista computacional seria a definição das representações por meio de polinômios determinados pelo Método dos Mínimos Quadrados ou funções *Spline*. A complexidade advém da necessidade de estabelecimento do grau a ser considerado para o polinômio, se deverá ser considerado completo ou não e em quais casos.

Os cuidados que devem ser tomados, para aplicação do método, são àqueles inerentes aos processos analíticos de determinação das áreas e perímetros como por exemplo:

-tratar apenas polígonos côncavos. Caso haja cruzamento entre as representações - bordas do polígono de representação - devem ser calculados os pontos de interseção e o polígono original deverá ser fracionado em polígonos menores estritamente côncavos - Figura 9;

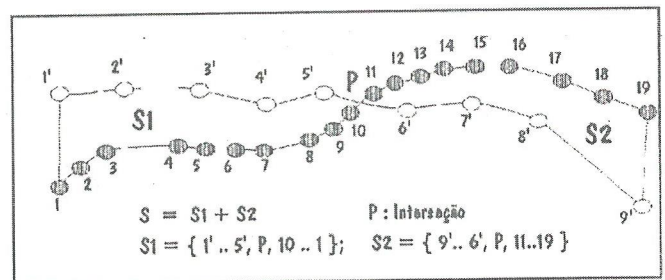


Figura 9 - Fracionamento dos polígonos para cálculo das áreas.

- calcular tanto a área quanto o perímetro em algum sistema de coordenadas compatível com a precisão e escala de trabalho. Se necessário, transformar as coordenadas dos pontos descritores da feição para alguma projeção cartográfica adequada considerando os conceitos de equidistância e equivalência ou aplicando os coeficientes de deformação.

O método demonstrou ainda grande flexibilidade quando é necessária a agregação de feições. Caso tenham sido calculados os retângulos equivalentes para uma quantidade n de feições, o valor médio para a região será obtido pela aplicação do método sobre o somatório das áreas e perímetros individuais. Desta forma, uma vez determinadas as componentes básicas - área e perímetro - para cada feição, fica simples

calcular valores regionalizados agregando-se as feições de maneiras distintas. Pode-se, por exemplo, proceder a análises sobre quais regiões do mapa possuem tendência sistemática bem como determinar regiões de maior ou menor confiabilidade sem condenar o documento na sua totalidade.

O método proposto foi efetivamente aplicado sobre vários arquivos descritos por coordenadas curvilíneas geodésicas transformadas para as Projeções Mercator Transversa corrigida do fator de deformação em área e Equivalentes de Albers e Cilíndrica Normal. Os resultados demonstraram que o método, além de analiticamente consistente apresenta como principais vantagens:

- grande rapidez na obtenção dos resultados;
- não tendenciosidade;
- avaliação uniformemente distribuída.

Um possível refinamento, que não apresentou alteração substancial em casos práticos, corresponde à desconsideração dos lados menores $x1$ no cálculo do perímetro, ou melhor, assumir $x2$, no procedimento P-0 como a média dos comprimentos das representações A e B.

Sugere-se ainda o cálculo das áreas sobre superfícies matemáticas genéricas - extensão da Fórmula do Trapézio. De interesse imediato, o elipsóide de revolução achatado, empregado em geodesia e cartografia. Outra sugestão refere-se a proposta de uma solução tridimensional agregando-se a terceira coordenada que define uma feição terrestre espacialmente. Neste caso, as opções compreendem o cálculo da área de uma "folha" desenvolvendo-se no espaço 3-d ou o volume de um paralelepípedo equivalente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CINTRA, J.P. & FERREIRA, L.F. Integração de Dados GPS com Cartas Eletrônicas para fins de Navegação. SAE Technical Paper Series 962384 P. ISSN 0148-7191. V Mobility Technology Conference. São Paulo. 7 a 9 outubro de 1996. 7 pp.

FERREIRA, L.F.; OLIVEIRA, L.C. & CINTRA, J.P. Digitalização de Folhas em Borda de Fuso UTM. Florianópolis. Anais do 1º Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico Multifinalitário. Tomo II. pp 49-58. 7 a 10 de agosto 1994.

FERREIRA, L.F. Avaliação e Integração de Bases Cartográficas para Cartas Eletrônicas de Navegação Terrestre. São Paulo. 1998. 183 pp. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. FERREIRA, L.F. & OLIVEIRA, L.C. Cálculo de Áreas Planas. Rio de Janeiro. Instituto Militar de Engenharia. 1989. 72 pp.

FUNDREM, Verificação do Padrão de qualidade de Materiais Cartográficos da RMRJ. Rio de Janeiro, 1979. 51 pp.

LUGNANI, J.B. Using Digital Entities as Control. Fredericton. 1980. 159 pp. Tese (Doutorado) - The University of New Brunswick.

NOVAES, J.R.D. Teste de Cartas. Revista Brasileira de Cartografia, N.º 2. pp.18-22.

OLIVEIRA, L.C.; FERREIRA, L.F.; MENEZES, P.M. & ARAÚJO, R.L. Aferição de Cartas! Um Alerta e uma Proposta de Estudo. Brasília. Anais 13º Congresso Brasileiro de Cartografia. pp 537-550. 1987.

TELLES, J.D. & RODRIGUES, T.S. Controle da Qualidade de Documentos Cartográficos. Projeto de Fim de Curso. Instituto Militar de Engenharia. 1990. 116 pp.