



## O QUASE-GEOIDE DO ESTADO DE SÃO PAULO E A AVALIAÇÃO DOS MODELOS RECENTES DO GOCE

*Quasi Geoid in the State of São Paulo and the Evaluation of Recent GOCE Models*

**Gabriel do Nascimento Guimarães<sup>1</sup> Ana Cristina Oliveira Cancoro de Matos<sup>2</sup>  
& Denizar Bliztkow<sup>2</sup>**

**<sup>1</sup>Universidade Federal de Uberlândia – UFU**  
**Instituto de Geografia – Campus Monte Carmelo**  
Rodovia LMG 746, km 1 CEP: 38500-00 – Monte Carmelo - MG  
gabriel@ufu.br

**<sup>2</sup>Universidade de São Paulo – USP**  
**Departamento de Engenharia de Transportes**  
Caixa Postal 61.548 CEP: 05424-970 - São Paulo - SP  
acoematos@gmail.com, dbliztko@usp.br

*Recebido em 30 de Outubro, 2014/ Aceito em 25 de Agosto, 2015*  
*Received on October 30, 2014/ Accepted on August 25, 2015*

### RESUMO

Desde 2008, alguns esforços têm sido realizados em termos de medições gravimétricas no Estado de São Paulo com o objetivo de melhorar o modelo geoidal. A cobertura gravimétrica está bastante completa para uma resolução de 5". Além disso, trabalhos de campo estão sendo realizados para preencher as lacunas nos estados vizinhos em um raio de 100 km. Este é um resultado do Projeto Temático FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) que visou realizar o estabelecimento de um modelo geoidal, um sistema de altitudes e um estudo do possível movimento vertical da crosta. O projeto envolveu vários laboratórios de universidades brasileiras. Esses esforços resultaram em um modelo geoidal chamado GEOIDSP, limitado por 19°S e 26°S de latitude e 44°W e 54°W de longitude, que foi derivado por meio de duas metodologias: a integral modificada de Stokes por meio da Transformada Rápida de Fourier (FFT) e a Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ). A decomposição espectral foi empregada no cálculo dos modelos, sendo que a componente de longo comprimento de onda foi representada pelo modelo EGM2008 e os modelos mais recentes baseados na missão GOCE até grau e ordem 200. Os modelos foram avaliados em termos de comparações absolutas a partir de estações GPS sobre nivelamento. Os resultados mostram coerência entre eles. Outro objetivo deste estudo foi verificar a potencialidade dos modelos baseados na missão do satélite GOCE. Ao todo 11 modelos foram avaliados. A avaliação foi conduzida em termos da comparação da anomalia de altura obtida pelos modelos globais do geopotencial com a ondulação geoidal derivada das estações GPS sobre nivelamento. Os resultados mostram que os modelos TIM\_R4 e R5, DIR\_R4 e R5 e EIGEN\_6c3STAT, para grau até 210, apresentaram melhor consistência quando comparados aos pontos GPS sobre nivelamento.

**Palavras chaves:** Geoide, Gravimetria, GOCE, Avaliação.

## ABSTRACT

Since 2008, some efforts have been made in terms of gravimetric measurements in the State of São Paulo in order to improve the geoid model. The gravity coverage is fairly complete for a resolution of 5'. In addition, fieldwork is underway to fill gaps in the neighboring states in a 100 km radius. This is a result of FAPESP (Research Support Foundation of the State of São Paulo) Thematic Project, which aimed to make the establishment of a geoid model, a height system and a study of the possible vertical movement of the crust. The project involved several laboratories of Brazilian universities. These efforts resulted in a geoid model called GEOIDSP bounded by 19° S and 26° S in latitude and 44° W and 54° W in longitude, which was derived by two methods: the modified Stokes via Fast Fourier Transform (FFT) and the Least Squares Collocation (LSQ). The spectral decomposition was used in the computation models, where the long wavelength component were represented by EGM2008 and the latest models based on GOCE mission to degree and order 200. The models were evaluated in terms of absolute comparisons with GPS on benchmarks. The results show coherence among them. Another objective of this study was to verify the capability of GOCE based models. In all, 11 models were tested beyond EGM2008. The evaluation was performed in terms of height anomaly obtained by global geopotential models and geoid height from GPS on benchmarks. The results show that TIM\_R4 and R5, DIR\_R4 and R5 and EIGEN\_6c3STAT models are more consistent when compared to the GPS on benchmark stations.

**Keywords:** Geoid, Gravimetry, GOCE, Evaluation.

## 1. INTRODUÇÃO

No passado, a Geodésia era dividida em Geométrica, Espacial e Física. Entretanto, essa divisão já não tem sentido, pois, atualmente há uma interação entre essas três partes. É plausível então, dizer que a Geodésia se preocupa com 3 objetos: o estudo da forma e das dimensões da Terra, os parâmetros de orientação da Terra no espaço e o campo de gravidade. A determinação da forma da Terra é realizada por meio do conhecimento do campo de gravidade envolvendo a distribuição de massa e o efeito rotacional do planeta. Para se determinar a função potencial do referido campo é necessário envolver o que se denomina de “Problema de Valor de Contorno da Geodésia” (PVCG).

O PVCG consiste na determinação do campo de gravidade externo às massas aonde a superfície de contorno é desconhecida. Stokes propôs uma formulação para obter o potencial perturbador como uma função da anomalia de gravidade na superfície do geoide. Entretanto, esta proposição implica em algumas dificuldades, uma vez que é um problema interno às massas. Uma nova formulação foi proposta por Molodenskii. Trata-se de um problema externo às massas, pois utiliza a superfície física como contorno. Neste contexto, não é necessário o conhecimento, mesmo que aproximado, de um modelo de distribuição da densidade interno à crosta entre a superfície geoidal e a superfície física. No entanto, não possui significado físico como a superfície

geoidal, uma vez que ela não representa uma superfície equipotencial. A expressão proposta por Molodenskii é uma integral não linear que não pode ser solucionada diretamente. A solução é linearizá-la introduzindo valores adequados. Neste caso, a Terra real é substituída por uma Terra normal e a solução aproximada para a superfície de contorno é o teluroide. O que é calculado não é o geoide, mas o quase geoide. A anomalia da gravidade e as deflexões da vertical estão referidas à superfície física e não à superfície geoidal. Além disso, a ondulação geoidal é substituída pela anomalia de altura e a altitude ortométrica pela altitude normal. Neste trabalho será empregado a terminologia geoide e ondulação geoidal ao invés de quase geoide e anomalia de altura.

A era espacial, iniciada com o lançamento do satélite *Sputnik*, contribuiu para o aperfeiçoamento do conjunto dos coeficientes do desenvolvimento em série de funções harmônicas esféricas do potencial gravitacional; os primeiros modelos datam da década de 60. A evolução dos satélites artificiais permitiu o aperfeiçoamento dos modelos, sendo que o EGM2008 (*Earth Gravity Model 2008*) (PAVLIS *et al.*, 2008) é um dos mais utilizados. A partir dessas missões espaciais, três satélites foram projetados com o objetivo de medir o campo gravitacional da Terra: CHAMP (*CHAlleging Minisatellite Payload*) (REIGBER *et al.*, 1996), GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*) (GRACE, 1998) e GOCE (*Gravity*

field and steady-state Ocean Circulation Explorer) (DRINKWATER *et al.* 2003). O último foi desenvolvido pela Agência Espacial Europeia (European Space Agency - ESA) e desde o seu lançamento, dezenas de modelos do geopotencial de diferentes grau e ordem têm sido disponibilizados.

A superfície geoidal tem despertado interesses específicos. Ao contrário da superfície física e do teluroide, ela é uma superfície de nível do campo de gravidade possuindo características físicas. A determinação de um modelo geoidal pode ser realizada a partir de várias técnicas: a integração numérica da fórmula de Stokes diretamente ou com o uso da FFT (*Fast Fourier Transform*), a Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ), o desenvolvimento em série das funções harmônicas esféricas, a obtenção direta da ondulação geoidal pela diferença entre a altitude geodésica (GNSS) e a ortométrica (nivelamento geométrico), a altimetria por radar a bordo de satélites (nos oceanos) e as possíveis combinações entre elas. Neste artigo a fórmula de Stokes aplicando a FFT além da CMQ foram utilizadas para calcular o modelo geoidal.

Uma vez que o modelo geoidal é calculado, a maneira de analisar sua qualidade é comparar com observações GNSS nas referências de nível (RRNN). A ondulação geoidal obtida a partir da altitude geodésica subtraída da altitude ortométrica (normal) permite comparar com a ondulação geoidal advinda do modelo geoidal. Neste caso, é possível também verificar a qualidade do modelo do geopotencial e a compatibilidade entre eles.

Este trabalho tem como objetivo verificar a contribuição da densificação gravimétrica no estado de São Paulo objetivando o cálculo de um modelo geoidal consistente, bem como sua validação com os modelos derivados da missão GOCE.

## 2. A DENSIFICAÇÃO GRAVIMÉTRICA

A técnica utilizada para medir as variações da aceleração de gravidade de forma absoluta ou relativa em toda a superfície terrestre é denominada de gravimetria. Na determinação absoluta o valor de  $g$  é obtido diretamente em uma estação enquanto, na relativa, determina-se a diferença de  $g$  entre duas estações.

A partir das medidas de aceleração de gravidade pode-se obter as anomalias de gravidade, que reduzidas ao geoide são aplicadas na integral de Stokes para o cálculo das ondulações geoidais. Devido à dificuldade de obtenção de medidas gravimétricas sobre toda a superfície terrestre, foram propostas modificações na função da integral de Stokes. Os longos comprimentos de onda são calculados a partir de um modelo do geopotencial, o que significa estender a série até um dado grau e ordem  $L$ . Os curtos comprimentos de onda podem ser calculados por meio de uma modificação na integral de Stokes, permitindo restringi-la a uma calota de raio  $\psi_0$ . No cálculo do modelo geoidal as observações gravimétricas terrestres representam os curtos comprimentos de onda.

A Figura 1a ilustra a distribuição, no estado de São Paulo e no entorno, das estações gravimétricas até o ano de 2008. É importante mencionar que diversas instituições colaboraram com o fornecimento dos dados: Observatório Nacional, PETROBRÁS, Agência Nacional de Petróleo (ANP) e o IBGE. A Figura 1b mostra os dados incorporados desde o início de 2009 até o momento. A densificação gravimétrica está sendo possível graças ao Projeto Temático, iniciado em setembro de 2008, fomentado pela FAPESP.

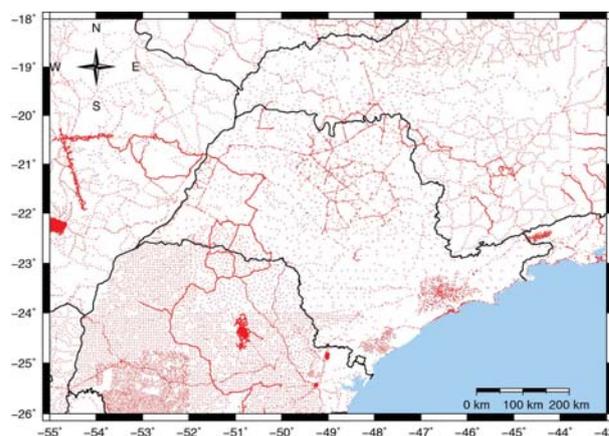


Fig. 1a – Estações gravimétricas em 2008.

Tendo em vista que a integral de Stokes exige que se disponha de dados de anomalias de gravidade até uma distância média de 150 km ao redor do ponto de cálculo orientou-se o cuidado para uma faixa pertinente nos estados vizinhos a São Paulo. Além disso, uma atenção foi dada para as regiões onde o gradiente do

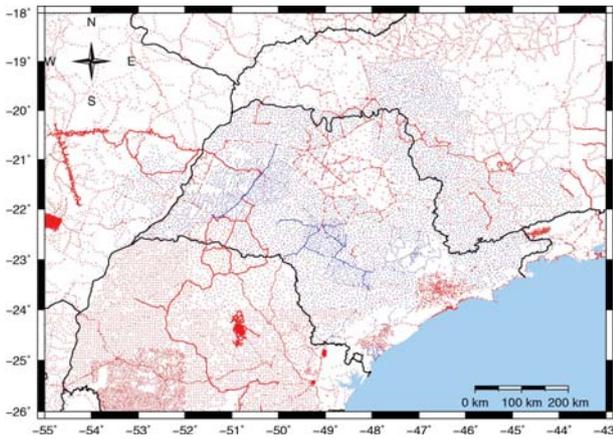


Fig. 1b – Estações gravimétricas em 2014.

geóide é maior. Nestas áreas foi determinado um espaçamento entre os pontos de 5 km e nas demais 8 km. No sul do estado devido à região serrana e, conseqüentemente, a carência de acessos, não foi possível preencher os vazios.

### 3. CÁLCULO DO MODELO GEOIDA.

A determinação de um modelo geoidal pode ser realizada a partir de várias técnicas: a integração numérica da fórmula de Stokes diretamente ou com o uso da FFT (*Fast Fourier Transform*), a Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ), o desenvolvimento em série das funções harmônicas esféricas, a obtenção direta da ondulação geoidal pela diferença entre a altitude geodésica (GNSS) e a ortométrica (nivelamento geométrico), a altimetria por radar a bordo de satélites (nos oceanos) e as possíveis combinações entre elas. Neste trabalho a fórmula de Stokes aplicando a FFT e a CMQ serão utilizadas para calcular o modelo geoidal. A primeira, fornece o potencial perturbador como uma função das anomalias de gravidade. O uso da FFT é para acelerar o processo que envolve uma quantidade grande de dados na forma discreta. A segunda, é um método matemático para a determinação do campo de gravidade combinando diferentes tipos de medidas geodésicas.

#### 3.1 Integral de Stokes

A fórmula de Stokes é a maneira usual de determinar as ondulações geoidais. Os modelos do geopotencial desenvolvidos na era espacial permitiram separar a altura geoidal em duas componentes: longo e médio comprimentos de onda e curto comprimento de onda. Os modelos

permitem obter as componentes de longo e médio comprimentos de onda, com isto limita a integral de Stokes numa região próxima ao ponto de cálculo. O grau e ordem do modelo a ser usado deverá ser escolhido oportunamente em função da disponibilidade mais atualizada. Os dados gravimétricos são processados visando a obtenção das anomalias da gravidade ar livre e a partir delas a obtenção das anomalias de Helmert, as quais devem ser usadas na fórmula de Stokes. A área de integração é limitada numa vizinhança conveniente em função do grau e ordem do modelo selecionado. A fórmula modificada de Stokes utilizada para a obtenção das ondulações geoidais é (ELLMANN & VANÍČEK, 2007):

$$N(\Omega) = \frac{R}{4\pi\gamma_0(\phi)} \iint_{\Omega_{\psi_0}} S^M(\psi_0, \psi(\Omega, \Omega')) * \Delta g(r_g, \Omega) d\Omega' + \frac{R}{2\gamma_0(\phi)} \sum_{n=2}^M \frac{2}{n-1} \Delta g_n^h(r_g, \Omega) + \frac{\delta V^l(r_g, \Omega)}{\gamma_0(\phi)} + \frac{\delta V^a(r_g, \Omega)}{\gamma_0(\phi)} \quad (1)$$

onde:

$$\Delta g(r_g, \Omega) = \left( \Delta g^h(r_g, \Omega) - \sum_{n=2}^M \Delta g_n^h(r_g, \Omega) \right) \quad (2)$$

A metodologia para determinar o modelo geoidal utilizando a FFT é apresentada na Figura 2.

O esquema para o cálculo do modelo geoidal pode ser resumido em 5 etapas (BLITZKOW *et al.*, 2008):

1. Cálculo das anomalias pontuais ar livre por meio de dados terrestres de gravimetria (coordenadas, altitude ortométrica e aceleração de gravidade);
2. Cálculo das anomalias completas de Bouguer, para posterior obtenção das anomalias médias ar livre em quadrículas de 5'. Para esses cálculos são necessárias as anomalias pontuais ar livre e um modelo digital de terreno;
3. Cálculo das anomalias de gravidade de Helmert na superfície terrestre, que são obtidas adicionando à anomalia média ar livre, o efeito atmosférico direto (DAE), o efeito direto topográfico (DTE), e o efeito topográfico indireto secundário (SITE);
4. Integração de Stokes com a utilização da técnica "remove-restore";

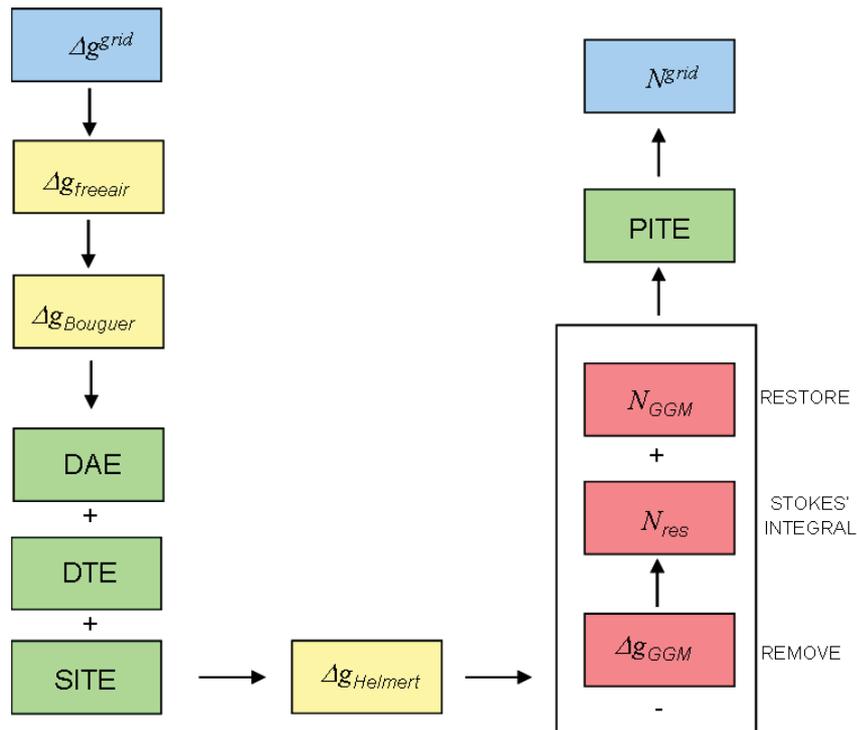


Fig. 2 – Esquema de cálculo usando a FFT. Fonte: Guimarães (2013).

5. Adição do efeito indireto topográfico primário (PITE) nas ondulações geoidais referidas a um “geoide fictício” denominado co-geoide (GEMAEL, 1999), para obtenção das ondulações geoidais referidas ao novo geoide.

O cálculo da integral de Stokes foi realizado pela técnica da FFT utilizando o programa FFTMOD (LI & SIDERIS, 1993) com a modificação do kernel.

### 3.2 Colocação por Mínimos Quadrados

A CMQ é um método matemático para determinar as componentes do campo anômalo a partir da combinação de medidas geodésicas de diferentes tipos (anomalia da gravidade, deflexões da vertical, distúrbio da gravidade, ondulação geoidal). O modelo matemático da CMQ é representado pela seguinte expressão:

$$l = AX + s + n \quad (3)$$

A componente determinística  $AX$  é representada pelo modelo do geopotencial. A componente  $s$  é chamada de sinal, enquanto  $n$  é o ruído. No cálculo da CMQ é necessário o conhecimento da função covariância  $l-AX+S+N$

dos dados envolvidos no processo. Teoricamente, qualquer dado pode ser utilizado para obter a função covariância, entretanto, a anomalia da gravidade é mais empregada, pois sua distribuição espacial é mais homogênea do que os outros dados disponíveis. Em geral, a função covariância reflete o comportamento do campo anômalo. Do ponto de vista estatístico, ela apresenta a correlação estatística de duas quantidades do campo anômalo em dois pontos diferentes. A função covariância mais empregada, no sentido de ajustar a função covariância empírica, foi proposta por Tscherning; Rapp (1974):

$$K(P, Q) = \sum_{n=2}^N k_n \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos\psi) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+24)} \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos\psi) \quad (4)$$

Uma modificação da técnica original da CMQ é adotada de modo a acelerar o procedimento numérico para determinação do modelo geoidal. Esse método, chamado de *Fast Collocation*, foi proposto por Bottoni e Barzaghi

(1993). Isso possibilita obter uma solução da CMQ a partir de uma grande quantidade de dados, cobrindo áreas extensas. A metodologia para determinar o modelo geoidal utilizando a CMQ é ilustrada pela Figura 3.

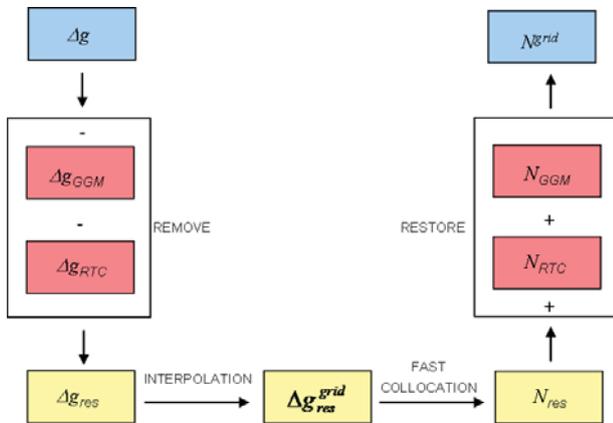


Fig. 3 – Esquema de cálculo usando a CMQ. Fonte: Guimarães (2013).

A metodologia para calcular o modelo geoidal por meio da CMQ é descrita abaixo:

1. Cálculo das anomalias pontuais ar livre por meio de dados terrestres de gravimetria (coordenadas, altitude ortométrica e aceleração de gravidade);
2. Utilização da técnica “remove-restore” para remover os longos comprimentos de onda do modelo do geopotencial e a correção residual do terreno.
3. Interpolação em quadrículas de 5' para o resíduo da anomalia da gravidade;
4. Cálculo da função covariância empírica e da função modelo;
5. Cálculo do resíduo da ondulação geoidal aplicando o método *Fast Collocation* (BOTONI; BARZAGHI, 1993);

Utilização da técnica “remove-restore” para restaurar a componente de longos comprimentos de onda e o resíduo da correção do terreno para obter a ondulação geoidal.

#### 4. DADOS UTILIZADOS

O estado de São Paulo foi escolhido para o cálculo do modelo geoidal utilizando duas técnicas distintas. A área do modelo geoidal, que inclui o estado de São Paulo e vizinhanças se estende desde a latitude  $-26^{\circ}$  até  $-19^{\circ}$  e longitude  $-54^{\circ}$  até  $-44^{\circ}$ . A área que representa

os dados gravimétricos utilizados no cálculo é um grau maior que a área do modelo; a área que compreende o modelo digital do terreno e modelo digital batimétrico é um grau maior em relação a área dos dados gravimétricos.

#### 4.1 Dados Gravimétricos

As observações gravimétricas terrestres e oceânicas representam a fonte de informação mais essencial do campo de gravidade da Terra e distribuição de densidade interna. As observações gravimétricas terrestres conduzidas com gravímetros relativos e absolutos formam a fonte de dados para a avaliação dos curtos comprimentos de onda do campo de gravidade da Terra. (HECK & GRÜNINGER, 1987).

Neste trabalho, utilizaram-se os dados da Rede Nacional Brasileira de Gravimetria (BLITZKOW *et al.*, 2010). A área de estudo consiste em mais de 46.000 estações (Figura 4) gentilmente fornecidas pelo Observatório Nacional (ON), PETROBRAS, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas (IAG) e Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP). Vale ressaltar que o projeto da FAPESP contribuiu significativamente para a densificação dos dados gravimétricos terrestres. A área de estudo é maior que um milhão km<sup>2</sup>, suficiente para avaliar os modelos baseados na missão GOCE. A precisão dos dados gravimétricos é igual ou melhor do que 0.1 mGal (BLITZKOW *et al.*, 2010). A informação gravimétrica foi validada por um pacote computacional chamado DIVA desenvolvido pelo *Bureau Gravimétrique International* (BGI). No oceano o modelo DTU10 (ANDERSEN, 2010) foi utilizado. Esse modelo é uma atualização do DNSC08 (*Danish National Space Center 2008*) e a resolução espacial é de 1-2 km.

#### 4.2 Modelos Globais do Geopotencial

Os Modelos Globais do Geopotencial (MGGs) expressam uma função substancial para a determinação do geóide. Estes são responsáveis pelas informações dos longos comprimentos de onda. Neste trabalho foram utilizados os modelos baseados na missão do GOCE e o EGM2008. Detalhes sobre o EGM2008 podem ser encontrado em (PAVLIS *et al.*, 2008) e (HOLMES & PAVLIS, 2008).

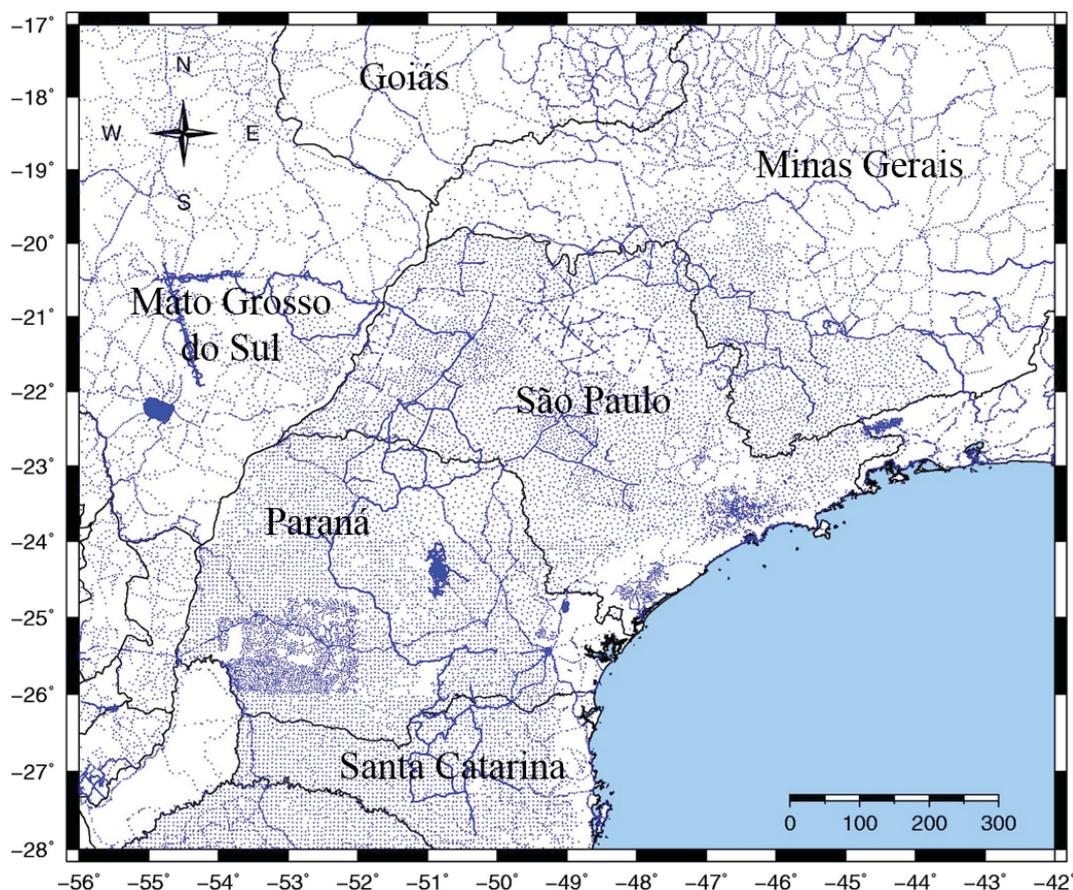


Fig. 4 – Dados gravimétricos utilizados no cálculo do modelo geoidal.

O modelo do geopotencial é um conjunto de coeficientes da função potencial gravitacional da Terra desenvolvida em série de funções harmônicas esféricas. A era espacial, iniciada com o lançamento do *Sputnik*, que em russo significa “amigo” ou “companheiro”, em 04 de outubro de 1957, foi considerada um marco para o desenvolvimento dos modelos do geopotencial globais, além de contribuir no desenvolvimento do PVCG. Os primeiros modelos datam da década de 60 (GUIER & NEWTON, 1965), (KAULA, 1966), (ANDERLE, 1966), (LUNDQUIST & VEIS, 1966), (ANDERLE & SMITH, 1967) e (KÖHNLEIN, 1967). Os avanços tecnológicos por meio de satélites artificiais mais eficazes, do incremento computacional e do refinamento da base teórica, permitiram o aprimoramento de modelos do geopotencial com grau e ordem cada vez mais elevados.

A partir da década de 90 iniciou-se a chamada década da gravidade (RAPP, 1998). As missões gravitacionais modernas como também ficaram conhecidas, possuíam objetivos específicos. Os satélites foram desenvolvidos

para trafegarem em órbita baixa, além de serem projetados com os mais sofisticados equipamentos: GPS (*Global Positioning System*), DORIS (*Détermination d’Orbite et Radiopositionnement Intégré par Satellite*) e laser. Dessas missões resultaram três satélites: CHAMP, GRACE e GOCE. Vários modelos do geopotencial derivados tanto do CHAMP quanto do GRACE têm sido publicados; em relação aos resultados do GOCE, foi publicado o primeiro modelo geoidal em 29/06/2010 fruto de dois meses de dados. A partir das variações no movimento dos satélites artificiais, torna-se possível obter as perturbações devido ao campo gravitacional e assim modelar as heterogeneidades. Dessa forma, os longos comprimentos de onda (baixo grau) são melhor definidos por meio dos satélites, enquanto que os coeficientes de alto grau são determinados a partir de dados terrestres.

O satélite GOCE foi desenvolvido pela Agência Espacial Europeia. Possui um gradiômetro capaz de produzir mapas homogêneos e altamente acurada do campo

gravitacional da Terra (VISSER *et al.*, 2001; DRINKWATER *et al.*, 2007). Foi lançado em 17 de março de 2009 e de acordo com Rummel (2005), o principal objetivo da missão GOCE foi obter um modelo do campo gravitacional com um nível de acurácia de 1-2 cm em termos de ondulação geoidal e 1-2 mGal para os distúrbios da gravidade e alcançar esses resultados para uma resolução espacial melhor que 100 km. A missão GOCE terminou em 13 de novembro de 2013 com sua entrada na atmosfera terrestre.

Desde Julho de 2010, três soluções baseadas nos dados do GOCG têm sido disponibilizadas para os usuários. As três aproximações são as seguintes: *direct solution* (DIR) (BRUINSMA *et al.*, 2010), *time-wise solution* (TIM) (PAIL *et al.*, 2010) e *space-wise solution* (SPW) (MIGLIACCIO *et al.*, 2010). As diferenças entre as soluções são as estratégias de processamento aplicadas. A Tabela 1 ilustra os modelos utilizados no cálculo.

Tabela 1: Modelos do geopotencial usados no cálculo do geóide

Modelo	Ano	Grau	Dados
GO_CONS GCF_2_DIR_R5	2014	300	Satélite (GRACE, GOCE, LAGEOS)
GO_CONS GCF_2_TIM_R5	2014	280	Satélite (GOCE)
EIGEN-6C3stat	2014	1949	Satélite (GRACE, GOCE, LAGEOS), gravimétrico e altimétrico
GO_CONS GCF_2_DIR_R4	2013	250	Satélite (GOCE, GRACE, LAGEOS)
GO_CONS GCF_2_TIM_R4	2013	260	Satélite (GOCE)
EGM2008	2008	2190	Satélite (GRACE), gravimétrico e altimétrico

### 4.3 Modelo Digital do Terreno

Para o presente estudo, o modelo digital SAM3s\_v2 (MATOS; BLITZKOW, 2008) com resolução de 3" x 3" (aproximadamente 90 m x 90 m) foi utilizado. O modelo se baseia no SRTM3 (FARR *et al.*, 2007), porém as ondulações geoidais do EGM96 (LEMOINE *et al.*, 1998a e 1998b) utilizadas neste modelo foram substituídas pelas do EIGEN-GL04C (FÖRSTE *et al.*, 2006). Os vazios foram suprimidos por cartas digitalizadas e pelo modelo topográfico DTM2002 - *Digital*

*Terrain Model* 2002 (SALEH; PAVLIS, 2002). O DTM2002 combina dados do satélite GLOBE (*Global Land One-kilometer Base Elevation*), versão 1.0, construído pelo *National Oceanic and Atmospheric Administration* (NOAA) e o *National Geophysical Data Center* (NGDC) (HASTING & DUNBAR, 1999) e o ACE (*Altimeter Corrected Elevation*). No oceano o modelo global DTU10 (ANDERSEN, 2010) foi utilizado.

### 4.4 GPS/Nivelamento

Neste trabalho 170 estações GPS/nivelamento foram selecionadas (Fig. 5). O nivelamento da maioria das estações foi realizado pelo IBGE e pelo antigo IGG (Instituto Geográfico e Geológico), atualmente IGC (Instituto Geográfico e Cartográfico). A altitude ortométrica está referenciada ao *Datum* de Imbituba e a altitude geodésica ao elipsoide WGS84 – *World Geodetic System* 1984.

Deste total, 139 estações foram implantadas pelo Laboratório de Topografia e Geodésia da USP (USP-LTG). A altitude geodésica possui uma precisão em torno de 0,06m (SÁ, 2006), enquanto a altitude ortométrica não tem sua precisão conhecida, uma vez que os valores não foram ajustados. As outras 31 estações foram fornecidas pelo IBGE, sendo que 26 delas estão incluídas no último ajustamento da rede altimétrica brasileira (IBGE, 2011).

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O modelo geoidal para o estado de São Paulo (GEOIDSP) foi calculado utilizando duas metodologias. A Fig. 6 ilustra, como exemplo, o modelo calculado a partir do modelo do geopotencial GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R5 (grau e ordem 200) utilizando a FFT.

### 5.1 Comparação absoluta GPS/nivelamento com o GEOIDSP

Para o cálculo do modelo GEOIDSP utilizou-se 6 modelos do geopotencial para os longos comprimentos de onda. Os modelos foram truncados até grau e ordem 200. A Tabela 2 mostra os resultados da comparação da ondulação geoidal advinda do GEOIDSP com aquela derivada das estações GPS sobre nivelamento. A primeira coluna representa o modelo do geopotencial utilizado no cálculo, bem como a técnica empregada (FFT ou CMQ).

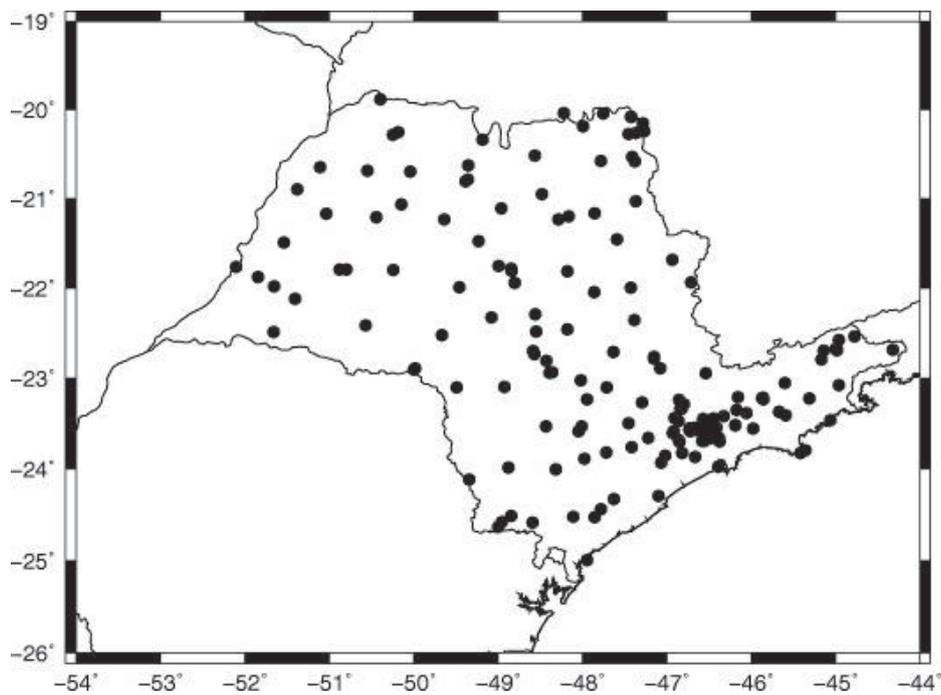


Fig. 5 – Estações GPS/nivelamento.

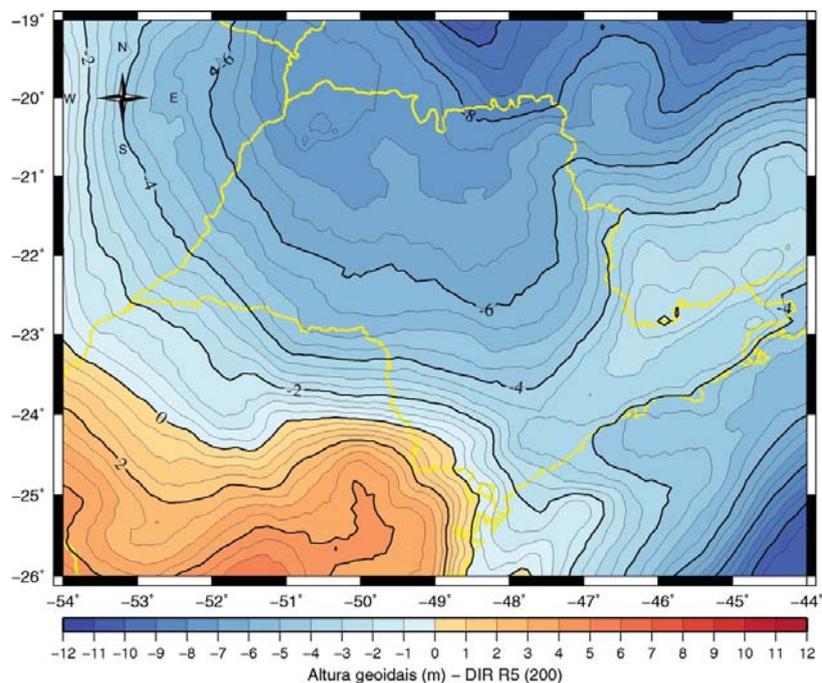


Fig. 6 – Modelo geoidal para o estado de São Paulo.

A comparação entre estas duas grandezas foi realizada em termos de diferença média quadrática (*root mean square difference*), chamada neste trabalho de diferença padrão, uma vez que nenhuma das variáveis pode ser considerada verdadeira. Na estatística utiliza-se a terminologia erro médio quadrático (*root mean square error*) quando se compara uma grandeza considerada verdadeira com outra observada. No caso do desvio

médio quadrático (*root mean square deviation*) a comparação é realizada a partir de valores estimados ou preditos por um modelo e a grandeza observada.

A Tabela 2 mostra que a diferença padrão entre os 12 modelos geoidais calculados varia 5 cm (18 a 23 cm), sendo que os modelos DIR4 e EIGEN6C3, ambos pela FFT, apresentaram melhor consistência quando analisados com as estações GPS/nivelamento. Verifica-se também,

em todas as comparações, que até 15% dos dados (26 estações) estão acima de -0,30 cm e + 0,30 cm. A Fig. 7 ilustra as diferenças dos pontos GPS sobre nivelamento em todo o estado de São Paulo. As imagens do lado esquerdo foram geradas a partir do cálculo com a CMQ, enquanto as do lado direito pela FFT. Verifica-se que as maiores diferenças (maior que 0,40 cm) são encontradas na região próxima ao litoral (círculos escuros). Trata-se de uma região montanhosa onde existem alguns vazios gravimétricos devido a dificuldade de acesso, em termos de estradas e caminhos. No restante do estado as diferenças encontram-se entre -0,20 m a 0,20 m (círculos claros).

Tabela 2: Comparação modelo geoidal e GPS sobre nivelamento

Modelo Geoidal	Média (m)	Diferença Padrão (m)	Máx. (m)	Mín. (m)
EGM2008 (FFT)	0,10	0,19	0,61	-0,43
EGM2008 (CMQ)	0,15	0,23	0,65	-0,36
DIR4 (FFT)	0,12	0,18	0,59	-0,37
DIR4 (CMQ)	0,09	0,20	0,56	-0,50
TIM4 (FFT)	0,11	0,20	0,51	-0,43
TIM4 (CMQ)	0,09	0,20	0,58	-0,47
EIGEN6C3 (FFT)	0,11	0,18	0,59	-0,37
EIGEN6C3 (CMQ)	0,09	0,20	0,51	-0,49
DIR5 (FFT)	0,11	0,19	0,59	-0,41
DIR5 (CMQ)	0,09	0,19	0,56	-0,50
TIM5 (FFT)	0,11	0,19	0,59	-0,41
TIM5 (CMQ)	0,10	0,20	0,58	-0,47

## 5.2 Comparação GPS/nivelamento e MGGs

A comparação envolvendo a ondulação geoidal derivada do GPS/nivelamento e os modelos do geopotencial é uma maneira tradicional de avaliar esses modelos e obter uma indicação sensata sobre a exatidão dos modelos geoidais e do geopotencial. De acordo com Featherstone *et al.*, (2001), em verificações absolutas, as estações GPS devem estar previamente vinculadas a um sistema de referência geocêntrico internacional. Além disso, estes dados podem ser utilizados para aplicar as restrições sobre o termo de ordem zero, a fim de levar em conta o conhecimento inexato da massa da terra e do potencial do geóide (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006). O termo de ordem zero (neste estudo foi utilizado -0,41 m, o mesmo valor assumido no EGM2008) é devido à diferença em termos de constante

geopotencial  $GM$  do modelo geopotencial e do elipsoide. A expressão 5 mostra o termo de ordem zero (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$N_0 = \frac{G\delta M}{R\gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0} \quad (5)$$

onde:  $\gamma_0$  é a gravidade normal na superfície do elipsoide;  $R$  o raio médio da Terra,  $\delta W$  é a diferença de potencial de gravidade entre a superfície geoidal e a do elipsoide e a constante  $G\delta M$  é fornecida pelos modelos do geopotencial e pelo elipsoide de referência.

Os modelos foram obtidos a partir do serviço oferecido pelo *International Centre for Global Earth Models* (ICGEM), disponível em <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html>. Uma grade regular 5' x 5', além do sistema de referência WGS84 e do sistema de maré "tide free" foram selecionados. A Tabela 3 mostra um resumo do grau máximo dos coeficientes do desenvolvimento em série das funções harmônicas esféricas utilizadas em cada cálculo.

Tabela 3: Grau e ordem utilizados nos cálculos

Modelos	N máximo						
	210	224	240	250	260	280	300
DIR_R5	✓						✓
TIM_R5	✓					✓	
EIGEN-6C3stat	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
DIR_R4	✓				✓		
TIM_R4	✓			✓			
DIR_R3	✓		✓				
TIM_R3	✓			✓			
DIR_R2	✓		✓				
TIM_R2	✓			✓			
DIR_R1	✓		✓				
TIM_R1	✓	✓					
EGM2008	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

A análise estatística das diferenças da ondulação geoidal derivada do GPS/nivelamento e da anomalia de altura oriunda dos MGGs é apresentada na Tabela 4.

Verifica-se na Tabela 4 que para o grau e ordem 210 o modelo EIGEN-6C3stat apresentou uma diferença padrão menor do que o restante dos modelos. A diferença deste, baseado na missão do GOCE como o modelo EGM2008, derivado da missão GRACE, em termos de

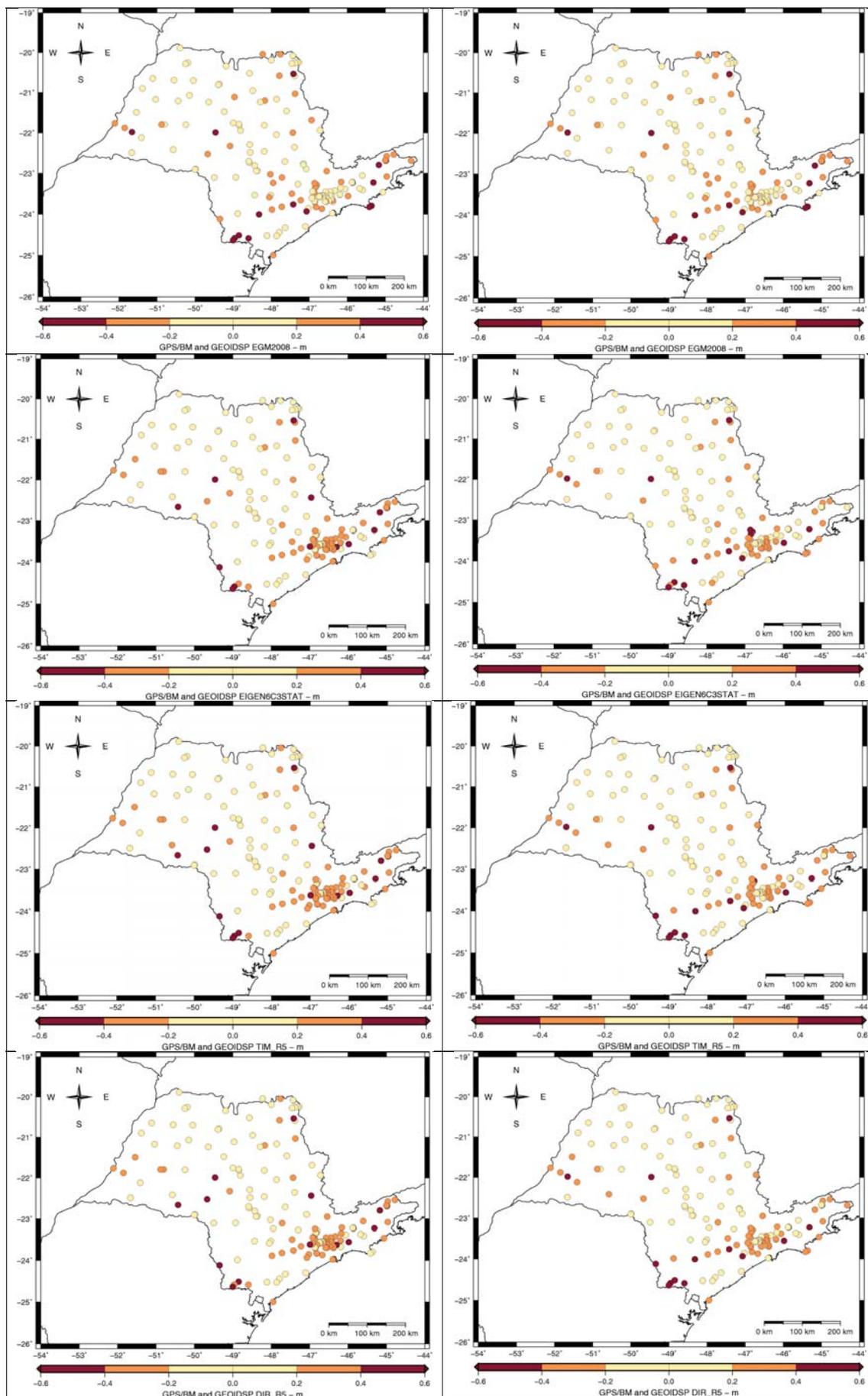


Fig. 7 – Diferença entre os modelos calculados e os pontos GPS sobre nivelamento. Lado esquerdo a partir da CMQ e lado direito por meio da FFT.

Tabela 4: Análise estatística das comparações GPS/Nivelamento e MGGs (metros)

MGGs (n=m)	Média	Diferença Padrão	Máx.	Mín.
DIR_R5 (210)	0,19	0,33	1,03	-0,68
TIM_R5 (210)	0,18	0,33	1,04	-0,68
EIGEN-6C3stat (210)	0,18	0,32	0,99	-0,65
DIR_R4 (210)	0,18	0,33	1,05	-0,68
TIM_R4 (210)	0,18	0,33	1,05	-0,66
DIR_R3 (210)	0,18	0,35	1,01	-0,68
TIM_R3 (210)	0,19	0,36	1,01	-0,70
DIR_R2 (210)	0,21	0,39	1,12	-0,70
TIM_R2 (210)	0,21	0,36	1,04	-0,63
DIR_R1 (210)	0,19	0,39	1,06	-0,69
TIM_R1 (210)	0,17	0,38	1,04	-0,68
EGM2008 (210)	0,21	0,38	1,08	-0,62
EIGEN-6C3stat (224)	0,12	0,34	0,96	-0,68
TIM_R1 (224)	0,16	0,37	1,05	-0,65
EGM2008 (224)	0,15	0,34	1,05	-0,64
EIGEN-6C3stat (240)	0,09	0,32	0,85	-0,55
DIR_R3 (240)	0,11	0,32	1,00	-0,70
DIR_R2 (240)	0,13	0,35	0,98	-0,66
SPW_R2 (240)	0,19	0,37	1,01	-0,67
DIR_R1 (240)	0,09	0,33	0,83	-0,76
EGM2008 (240)	0,12	0,32	0,93	-0,52
EIGEN-6C3stat (250)	0,08	0,30	0,83	-0,64
TIM_R4 (250)	0,12	0,34	0,93	-0,70
TIM_R3 (250)	0,10	0,33	1,03	-0,71
TIM_R2 (250)	0,15	0,32	1,03	-0,59
EGM2008 (250)	0,10	0,29	0,92	-0,59
EIGEN-6C3stat (260)	0,08	0,29	0,80	-0,60
DIR_R4 (260)	0,12	0,32	0,98	-0,64
EGM2008 (260)	0,12	0,27	0,90	-0,51
EIGEN-6C3stat (280)	0,11	0,29	0,85	-0,63
TIM_R5 (280)	0,10	0,32	0,88	-0,66
EGM2008 (280)	0,15	0,28	0,85	-0,49
DIR_R5 (300)	0,10	0,32	0,87	-0,68
EIGEN-6C3stat (300)	0,08	0,28	0,95	-0,58

diferença padrão, é de 6 cm. A partir do grau e ordem 240, nota-se que o comportamento do EGM2008 se torna mais consistente em relação ao EIGEN-6C3stat e aos outros modelos derivados do GOCE. Para o grau e ordem 300 a diferença entre eles é de 1 cm (0,27 cm para o EGM2008 e 0,28 cm para o EIGEN-6C3stat). Analisando os modelos TIM e DIR, observa-se

que para o grau e ordem 210 houve uma melhora na consistência com os dados GPS/nivelamento de 15% do modelo DIR\_R1 para o DIR\_R5. Para o modelo TIM essa melhoria foi de 13%. A razão deste fato é explicada pela maior quantidade de dados da missão GOCE das últimas soluções (R4 e R5) em relação as primeiras (R1 e R2). Além disso, o modelo DIR\_R5 agrega à sua composição dados das missões GRACE e LAGEOS. A Figura 8 ilustra a comparação dos modelos EIGEN, DIR e TIM com o EGM2008, em termos de diferença padrão em relação ao grau. Na figura é evidente a melhor consistência dos modelos mais recentes até grau e ordem 210. Exceto o modelo DIR\_R2, todos os outros apresentaram diferença padrão inferior ao do EGM 2008 para este grau.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo geoidal no estado de São Paulo foi calculado a partir da integral de Stokes via FFT e pela Colocação por Mínimos Quadrados. Para os longos comprimentos de onda (até grau e ordem 200) foram empregados os modelos recentes da missão GOCE (GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR, GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM e EIGEN), além do EGM2008. As comparações absolutas verificaram a consistência entre eles, sendo que os modelos EIGEN6C3STAT e DIR\_R4, calculado pela FFT, apresentaram uma diferença padrão de 0,18 cm em relação aos pontos GPS/nivelamento.

A segunda avaliação, mostrou as comparações entre a ondulação geoidal (GPS/nivelamento) e a anomalia de altura (modelos do geopotencial). Para o grau até 210 o modelo EIGEN6C3STAT apresentou uma diferença padrão de 0,32 cm. Todos os modelos avaliados foram truncados até o grau 210, pois é próximo deste valor que se obtém a melhor resposta dos dados de satélites. Para o grau 300 o modelo EGM2008 apresentou uma diferença padrão de 0,27 cm. Foi verificada uma melhor consistência dos modelos disponibilizados no ano de 2014 em relação aos primeiros modelos que datam de 2010.

Vale ressaltar que deve ser realizado um estudo do sistema de marés, uma vez que o nivelamento está referido a maré média, e os modelos do geopotencial são livres de maré. Além disso, é necessário o preenchimento dos vazios gravimétricos.

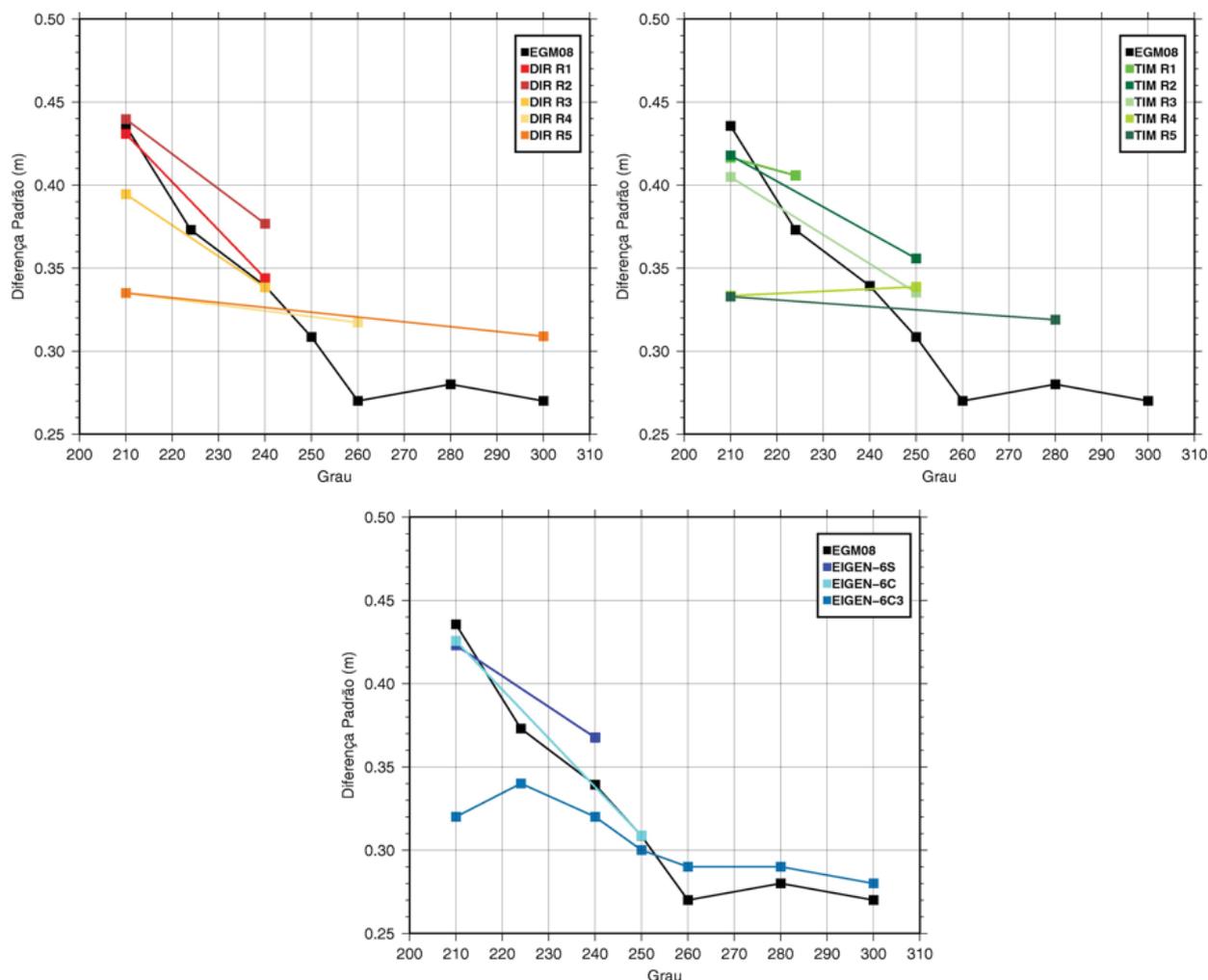


Fig. 8 – Diferença padrão da ondulação geoidal (GPS/nivelamento) versus anomalia de altura (MGs).

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao apoio da FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo por meio do processo 2006/ 04088-2.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERLE, R. Geodetic parameter set NWL-5E-6 based on Doppler satellite observations. Veis, G. (ed.) **Proceeding 2nd International Symposium Geodetic Use of Satellites**, Athens, 179-220p. 1966.

ANDERLE, R.; SMITH, S. **NWL-8 Geodetic parameters based on Doppler satellite observations**. NWL Technical Report n. 2106. Dahlgren. 1967. 17 p.

ANDERSEN, O.B. The DTU10 Gravity field and Mean sea surface. **Second International Symposium of the Gravity Field Service – IGFS2010**. Poster Presentation 20 – 22 September 2010 Fairbanks, Alaska, 2010. 17 p.

BLITZKOW, D.; MATOS, A.C.O.C.; CAMPOS, I.O.; ELLMANN, A.; VANIČEK, P.; SANTOS, M.C. An attempt for an Amazon geoid model using Helmert gravity anomaly. In: Sideris, M.G. (Org.). **Observing our Changing Earth**. 1 ed.: Springer-Verlag, 2008, v. 133, p. 187-194, 2008.

BLITZKOW, D.; MATOS, A.C.O.C.; GUIMARÃES, G.N.; LOBIANCO, M.C.B.; COSTA, S.M.A. A new version of the geoid model for South America. Apresentação no **Second International Symposium of the International Gravity Field Service – IGFS20** – 22 September 2010 Fairbanks, Alaska, 2010. 39 p.

BOTTONI, G.P.; BARZAGHI, R. Fast collocation. **Bulletin Géodésique**. v. 67, p. 119-126, 1993.

BRUINSMA, S.L.; MARTY, J.C.; BALMINO, G.; BIANCALE, R.; FOERSTE, C.; ABRIKOSOV, O.; NEUMAYER, H. GOCE

- gravity field recovery by means of the direct numerical method, (In: Lacoste-Francis, H. (eds.), Proceedings of the ESA Living Planet Symposium, ESA Publication SP 686), The 2010 ESA Living Planet Symposium, Bergen, Norway, 28 June - 2 July 2010. 42 p.
- DRINKWATER, M.R.; HAAGMANS, R.; MUZI, D.; POPESCU, A.; FLOBERGHAGEN, R.; KERN, M.; FEHRINGER, M. The GOCE gravity mission: ESA's first core earth explorer, **Proceedings... of 3rd International GOCE User Workshop**, 6-8 November, 2006, Frascati, Italy, ESA SP-627, ISBN 92-9092-938-3, p.1-8, 2007.
- ELLMANN, A.; VANÍČEK, P. UNB applications of Stokes-Helmert's approach to geoid computation. **Journal of Geodynamics**, v. 43, p. 200-213, 2007.
- DRINKWATER, M.R.; FLOBERGHAGEN, R.; HAAGMANS, R.; MUZI, D.; POPESCU, A. GOCE: ESA's first Earth explorer core mission. In Beutler, G.B., Drinkwater, M.R., Rummel, R., von Steiger, R. (eds.), **Earth Gravity Field from Space – from Sensors to Earth Sciences**. In the Space Sciences Series of ISSI, v. 18, p. 419-432, 2003.
- FARR, T.G.; ROSEN, P. A.; CARO, E.; CRIPPEN, R.; DUREN, R.; HENSLEY, S.; KOBRICK, M.; PALLER, M.; RODRIGUEZ, E.; ROTH, L.; SEAL, D.; SHAFFER, S.; SHIMADA, J.; UMLAND, J.; WERNER, M.; OSKIN, M.; BURBANK, D.; ALSDORF, D. The Shuttle Radar Topography Mission, **Reviews of Geophysics**, v. 45, 1-33p. 2007.
- FEATHERSTONE, W.E.; KIRBY, J. F.; KEARSLEY, A. H. W.; GILLILAND, J. R.; JOHNSTON, G. M.; STEED, J.; FORSBERG, R.; SIDERIS, M. G. The AUSGeoid98 geoid model of Australia: data treatment, computations and comparisons with GPS-levelling data. **Journal of Geodesy**, v. 75, p. 313-330, 2001.
- FÖRSTE C.; FLECHTNER, F.; SCHMIDT, R.; KÖNIG, R.; MEYER, U.; STUBENVOLL, R.; ROTHACHER, M.; BARTHELMES, F.; NEUMAYER, H.; BIANCALE, R.; BRUINSMA, S.; LEMOINE, J.M. A mean global gravity field model from the combination of satellite mission and altimetry/gravimetry surface data – EIGEN-GL04C, **Geophysical Research Abstracts**, v. 8, 2006. 28 p.
- GEMAEL, C. **Introdução a Geodésia Física**. Curitiba: 2ª ed. Editora UFPR, 1999, 302 p.
- GRACE – **Gravity recovery and climate experiment: Science and mission**. Requirements document, revision A, JPLD-15928, NASA's Earth System Science Pathfinder Program, 1998. 84 p.
- GUIER, W.H.; NEWTON, R.R. The Earth's gravity field deduced from the Doppler tracking of five satellites. **Journal of Geophysical Research**, v. 70, p. 4613-4626, 1965.
- GUIMARÃES, G.N. **A geoid model in the state of São Paulo: an attempt for the evaluation of different methodologies**. 2013. 144 F. Tese de Doutorado – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2013.
- HASTING, D.A.; DUNBAR, P.K. **Global land one-kilometer base elevation (GLOBE) Digital Elevation Model** Documentation, v 1, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Geophysical Data Center, 1999. 147 p.
- HECK, B.; GRÜNINGER, W. Modification of Stokes's integral formula by combining two classical approaches. Poster **Presentation in IUGG General Assembly**, Vancouver, 1987.
- HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. 2<sup>nd</sup> Edition, New York: Springer. 403 p, 2006.
- HOLMES, S.; PAVLIS, N.K. **Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)**. Disponível em: [http://earthinfo.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/first\\_release.html](http://earthinfo.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/first_release.html). Acesso em: junho 2014.
- IBGE, Ajustamento simultâneo da rede altimétrico de alta precisão do sistema brasileiro geodésico brasileiro. **Relatório**. Rio de Janeiro, 62p, Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/altimetrica.shtm>> Acesso em Outubro de 2014, 2011.
- KAULA, W.M. Tests and combinations of satellite determinations of the gravity field with gravimetry. **Journal of Geophysical Research**. v. 71, p. 5303-5314, 1966.
- KÖHNLEIN, W.J. The Earth's gravitational field

- as derived from a combination of satellite data with gravity anomalies. **Smithson. Astrophys. Obs. Spec. Report**, 264, p.57-62, 1967.
- LEMOINE, F.G.; PAVLIS, N.K.; KENYON, S.C.; RAPP, R.H.; PAVLIS, E.C.; CHAO, B.F. New high-resolution model developed for Earth's gravitational field, EOS, **Transactions AGU**, 79, 9, March 3, v. 113, p. 117-118. 1998a.
- LEMOINE, F.G.; KENYON, S.C.; FACTOR, J.K.; TRIMMER, R.G.; PAVLIS, N.K.; CHINN, D.S.; COX, C.M.; KLOSKO, S.M.; LUTHCKE, S.B.; TORRENCE M.H.; WANG, Y.M.; WILLIAMSON, R.G.; PAVLIS, E.C.; RAPP, R.H. OLSON, T.R. **The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96**, NASA/TP-1998-206861. National Aeronautics and Space Administration, Maryland, USA. 1998b. 164 p.
- LI, Y.; SIDERIS, M. Minimization and estimation of geoid undulation errors, **Bulletin Géodésique** v. 68 p. 201-209 1993.
- LUNDQUIST, C.A.; VEIS, G. **Geodetic parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth**. Special Report, Cambridge, Massachusetts, EUA, v. 1, n. 200, 1966.
- MATOS, A.C.O.C.; BLITZKOW, D. **Modelagem Digital de Terrenos (MDT) de 3" para a América do Sul**. Relatório de Pós Doutorado – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. 38 p.
- MIGLIACCIO, F.; REGUZZONI, M.; SANSÒ, F.; TSCHERNING, C.C.; VEICHERTS, M. GOCE data analysis: the space-wise approach and the first space-wise gravity field model. **Proceedings of the ESA Living Planet Symposium**, 28 June - 2 July 2010, Bergen, Norway, 2010. 8 p.
- PAIL R.; GOINGINGER, H.; MAYRHOFER, R.; SCHUH, W.D.; BROCKMANN, J.M.; KRASBUTTER, I.; HÖCK, E.; FECHER, T. GOCE gravity field model derived from orbit and gradiometry data applying the time-wise method **Proceedings... of the ESA Living Planet Symposium**, 28 June - 2 July 2010, Bergen, Norway, See also: earth.esa.int/GOCE. 2010. 8 p.
- PAVLIS, N.K.; HOLMES, S.A.; KENYON, S.C.; FACTOR, J.K. **An Earth gravitational model to degree 2160: EGM2008**. Presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13-18, 2008. 38 p.
- RAPP, R.H. Past and future developments. In: **Geopotential modeling, geodesy on the move**. FORSBERG R., FEISSEL M., DIETRICH R. (eds.), Springer-Verlag Berlin. New York, p. 58-78, 1998.
- REIGBER, C.; BOCK, R.; FÖRSTE, C.; GRUNWALDT, L.; JAKOWSKI, N.; LÜHR, H.; SCHWINTZER, P.; TILGNER, C. **CHAMP phase-B executive summary**. GFZ, STR96/13, 1996. 24 p.
- RUMMEL, R. Geoid and gravity in earth sciences - an overview. Workshop on Enabling Observation Techniques for Future Solid Earth Missions, Jan 30–Feb 01, 2003, Int. Space Sci. Inst. Bern Switzerland, **Earth Moon and Planets** n. 94, p. 3-11, 2005.
- SÁ, N.C.; VIEIRA, C. Rede GPS do estado de São Paulo: aprimoramento de modelos geoidais e apoio básico local. **Relatório científico final FAPESP** (Processo: 99/012691-9) Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006. 90 p.
- SALEH, J.; PAVLIS, N.K. The development and evaluation of the global digital terrain model DTM2002. **Presented at the 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission**, Thessaloniki, Greece 26 - 30 August. p. 207-212, 2002.
- TSCHERNING C.C.; RAPP, R.H. Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulation and deflections of the vertical implied by the anomaly degree covariance models. **Report of the Ohio State University**. Columbus, n. 208, 1974. 94 p.
- VISSER, P.N.A.M.; VAN DEN IJSSEL, J.; KOOP, R.; KLEES, R. Exploring gravity field determination from orbit perturbations of the European Gravity Mission GOCE. **Journal of Geodesy**, v. 75, p. 89-98, 2001.