



# O emprego da Solução do Problema de Valor de Contorno da Geodésia à Vinculação Nacional a um Sistema Vertical de Referência Global: uma Revisão Conceitual

The use of the solution of the Geodetic Boundary Value Problem to the national linkage to an International Height Reference System: a conceptual review

*Eurico Nicácio<sup>1</sup>*  
*Regiane Dalazoana<sup>2</sup>*

Recebido em janeiro de 2019.  
Aprovado em março de 2019.

## RESUMO

A necessidade de obtenção de altitudes com significado físico é de grande importância para a engenharia e, de maneira singular, para a Força Terrestre Brasileira; isto porque, historicamente, o Exército Brasileiro atua em impactantes intervenções de engenharia nas mais variadas localidades do território nacional, intervenções estas que dependem diretamente da fidedigna determinação destas altitudes. Neste sentido e para estes fins, há a latente necessidade do estabelecimento de um sistema de referência vertical em nível nacional com forte embasamento físico, plenamente vinculado a um sistema global com as mesmas características e segundo atuais tendências do ramo. Conforme preconizado pela Associação Internacional de Geodésia (IAG), o estado-da-arte de determinações altimétricas e de sistemas verticais de referência tem como norteador a busca pela definição de um Sistema Vertical de Referência Global (*International Height Reference System – IHR*S). Esta definição deve ser realizada tomando-se como referência uma superfície equipotencial do campo da gravidade, com valor de geopotencial pré-definido, e sendo suas coordenadas verticais primárias definidas com base em uma diferença de geopotencial. Por sua vez, o cálculo deste geopotencial é realizado, modernamente, através da solução do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) por diferentes abordagens, como as formas escalar livre e fixada, cada uma das quais com vantagens e recomendações. Destarte, o presente trabalho apresenta uma revisão conceitual sobre estas diferentes técnicas para solução do PVCG, evidenciando variantes e limitantes, enfatizando ainda os benefícios auferidos para o Exército Brasileiro.

**PALAVRAS-CHAVE:** Problema de Valor de Contorno da Geodésia. Sistema Vertical de Referência Global. Altitudes. Exército Brasileiro.

<sup>1</sup> <sup>2</sup>Programa de Pós-graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Brasil. E-mail: euriconicaciojr@gmail.com; regiane@ufpr.br

## **ABSTRACT**

The need to obtain heights with physical meaning is of great importance for engineering and, in a unique way, for Brazilian Army; this is because, historically, Brazilian Army acts in striking engineering interventions in the most varied corners of the national territory, which depend directly on the reliable determination of these heights. In this sense and for these purposes, there is a latent need to establish a vertical reference system in a national level with a strong physical base, fully linked to a global system with the same characteristics and according to current trends in the field. As recommended by the International Association of Geodesy (IAG), the state-of-art of altimetric determinations and vertical reference systems has, as its guideline, the search for the definition of an International Height Reference System (IHRM). This definition must be made by taking as reference an equipotential surface of Earth's gravity field with pre-defined geopotential value, and its primary vertical coordinates being defined based on a geopotential difference. In turn, the calculation of this geopotential is carried out, modernly, through the solution of the Geodetic Boundary Value Problem (GBVP) by different approaches, such as free and fixed scalar forms, each with advantages and recommendations. Thus, the present paper presents a conceptual review on these different techniques for the GBVP solution, evidencing variants and limitations, emphasizing also the benefits received for the Brazilian Army.

**KEYWORDS:** Geodetic Boundary Value Problem. International Height Reference System. Heights. Brazilian Army.

\* \* \*

## **Introdução**

O histórico objetivo primordial da Geodésia é determinar a forma e a dimensão da Terra, bem como do campo da gravidade em seu exterior e suas variações temporais (HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2006; TORGE e MÜLLER, 2012; GEMAEL, 2012). Entretanto, ao longo das últimas décadas, devido à evolução das técnicas aplicadas em observações e dos métodos computacionais empregados em seu processamento, os problemas clássicos da Geodésia foram expandidos, e sua função primária foi ampliada para a detecção dos efeitos de mudanças globais e da geodinâmica (DREWES, 2006).

Este entendimento traz à tona a necessidade de compreensão de entes físicos ligados diretamente à maneira como a superfície terrestre se dispõe e se modifica ao longo do tempo, gerando uma compreensão de como o Sistema Terra se comporta e trazendo consigo a possibilidade de monitorá-lo de modo

contínuo. No entanto, para que isto seja possível, não apenas as observações contínuas são necessárias, mas também sua vinculação a um Sistema Geodésico de Referência Global.

Quando se trata de informações altimétricas, conforme IAG (2015), a busca pela definição de um Sistema Vertical de Referência Global (IHRS - *International Height Reference System*) deve ser realizada tomando-se como referência uma superfície equipotencial do campo da gravidade. Adicionalmente, as coordenadas verticais primárias devem ser definidas com base no número geopotencial  $C_p$ , expresso conforme a Equação 1, na qual  $W_0$  representa o valor do geopotencial na superfície de referência e  $W_p$  representa o valor do geopotencial no ponto de cálculo.

$$C_p = -\Delta W_p = W_0 - W_p \quad (1)$$

O cálculo do geopotencial em um ponto, na atualidade, pode ser realizado através da solução do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) segundo diferentes abordagens (HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2006), tais como o PVCG Clássico livre, o PVCG clássico “escalar livre”, o PVCG fixado geral, o PVCG fixado linearizado e PVCG fixado simples. Figura como estado-da-arte nesta determinação a forma fixada, tendo como referência a superfície física da Terra e propiciando a independência de reduções de observações e sem vínculos a referenciais locais, sendo a abordagem mais natural na era do posicionamento GNSS (*Global Navigation Satellite System*) (SÁNCHEZ, 2017; NICACIO, 2018).

Considerando-se os atuais conceitos e as recomendações vigentes sobre sistemas e redes de referência verticais, faz-se necessário um alinhamento entre as redes verticais nacionais, estabelecidas de forma clássica, frente as atuais demandas internacionais (NICACIO, 2017; NICACIO DALAZOANA e DE FREITAS, 2018a; NICACIO DALAZOANA e DE FREITAS, 2018b). Tal ação impacta diretamente em atividades de engenharia, que dependem da determinação altimétrica para pleno alinhamento às demandas do mundo real e, conseqüentemente, do Exército

Brasileiro. Para buscar o mencionado alinhamento, é fundamental o entendimento do PVCG e suas possíveis soluções

Desta forma, evidencia-se a importância do estudo proposto, bem como a necessidade de considerar o problema em âmbito nacional e de contextualizar sua importância para a Força Terrestre Brasileira.

## 1 Revisão Bibliográfica

### 1.1 Sistemas e Redes Verticais de Referência

#### 1.1.1 Evolução conceitual de Sistemas Verticais de Referência e o IHRS

Consonante Jekeli (2000), pontos sobre ou próximos à superfície terrestre comumente são associados a três coordenadas: latitude, longitude e altitude. As duas primeiras referem-se ao elipsoide de revolução adotado e são designadas como latitude geodésica e longitude geodésica. Desta forma, a altitude de um ponto  $P$  qualquer pode ser referida a este elipsoide, assim estabelece-se que a distância entre o elipsoide e o ponto  $P$ , medida ao longo da perpendicular ao elipsoide, é definida como altitude elipsoidal do ponto  $P$  ( $h_p$ ).

Ainda segundo a referência supracitada, na maioria das aplicações de agrimensura e de engenharia em geral, a altitude de um ponto deveria estar vinculada a um ente físico ao invés de um ente puramente matemático. Por exemplo, tomando-se a gravidade como este ente físico, durante muito tempo considerou-se suficientemente plausível determinar os desníveis através de operações de nivelamento, de onde são derivadas as altitudes niveladas. Para tanto, é necessário ainda a definição de um ponto de origem – ou *datum* vertical, que classicamente era definido por observações maregráficas, considerando a coincidência do Nível Médio dos Mares (NMM) com a superfície geoidal.

As altitudes niveladas apresentam dependência direta do caminho percorrido durante a operação de nivelamento, visto que não há paralelismo entre as superfícies equipotenciais

do campo da gravidade. Consequentemente, desníveis fisicamente iguais medidos por caminhos diferentes retornam resultados diferentes.

Desta forma, é bastante plausível tomar como nível de referência vertical uma superfície equipotencial do campo da gravidade terrestre com valor fixo e conhecido de geopotencial ( $W_0$ ). Este conceito relacionado ao cálculo da altitude, tomando como base a diferença entre o geopotencial da superfície equipotencial que contém um determinado ponto  $P$  ( $W_P$ ) e o geopotencial tomado como referência ( $W_0$ ), traz à tona o conceito de número geopotencial  $C_P$ . Trata-se justamente da diferença entre o geopotencial de referência  $W_0$  e o geopotencial  $W_P$  no ponto (TORGE e MÜLLER, 2012), caracterizando uma medida natural de altitude que, nos termos da Equação 2, independe do caminho percorrido, porém não tem dimensão de comprimento.

$$C_P = W_0 - W_P = - \int_{P_0}^P dW = \int g \, dn \quad (2)$$

A utilização do número geopotencial na definição de altitude é, na atualidade, preceito básico para definição do IHRS (IAG, 2015) e para a materialização da rede a ele associada – o IHRF (*International Height Reference Frame*) (IHDE et al., 2017). A partir dele pode-se adotar diferentes hipóteses e valores de gravidade para obtenção de unidades métricas, segundo a Equação 3, derivada da Equação 2, na qual  $H_P$  é o valor da altitude em um ponto de estudo  $P$ ,  $C_P$  é o número geopotencial e  $g_m$  é um valor médio da gravidade segundo alguma hipótese. Esta equação representa, ainda, o conceito de altitude científica.

$$H_P = \frac{C_P}{g_m} \quad (3)$$

Conforme IAG (2015), o estado da arte das observações geodésicas e de suas aplicações demandam a existência de um sistema de referência geodésico com estabilidade e homogeneidade duradouras em toda a superfície terrestre, juntamente com uma materialização suficientemente precisa para determinar a magnitude dos feitos observados – da ordem de poucos milímetros. Desta forma, um moderno sistema de referência altimétrico

deveria ser capaz de detectar, por exemplo, a variação milimétrica anual do nível do mar.

Além disso, Sánchez et al. (2015) apontam que os atuais sistemas altimétricos apresentam uma série de problemas, por exemplo: mais de cem realizações ao redor do mundo; discrepâncias da ordem de decímetro a metro, devido aos diferentes *data* verticais, diferentes altitudes físicas e padronização inexistente; consideração de altitudes estáticas; combinação imprecisa de altitudes geométricas; e uma a duas ordens de precisão inferiores às necessárias.

Adicionalmente, um moderno sistema altimétrico deve ir ao encontro das preconizações e padronizações para suportar o estabelecimento do GGOS – *Global Geodetic Observing System* – Sistema Geodésico de Observações Globais. Este sistema integra diferentes técnicas geodésicas, modelos e aproximações justamente para assegurar o monitoramento preciso e duradouro de observáveis geodésicas, e, por conseguinte, apoiar o monitoramento de ciclos hidrológicos globais, de dinâmica atmosférica e dos oceanos e de desastres naturais (IAG, 2018).

Com este intuito, IAG (2015) determinou a adoção das seguintes convenções para o estabelecimento do IHR5 consoante Ihde et al. (2015):

- O nível de referência vertical é uma superfície equipotencial do campo da gravidade da Terra com valor de geopotencial  $W_0$ ;
- Parâmetros, observações e dados devem estar relacionados com o sistema médio de maré;
- A unidade de comprimento é o metro e a unidade de tempo é o segundo (SI);
- As coordenadas verticais são as diferenças  $-\Delta W_P$  entre o potencial do campo da gravidade terrestre  $W_P$ , em pontos  $P$ , e o valor do geopotencial no geoide  $W_0$ ; a diferença de potencial  $-\Delta W_P$  também é designada de número geopotencial  $C_P$ ;

- A referência espacial da posição  $P$  para o potencial  $W_P = W(\vec{X})$  está relacionada com as coordenadas  $\vec{X}$  do ITRS - *International Terrestrial Reference System*.

Além destas padronizações, a mesma referência determinou a materialização do valor do potencial na superfície de referência para o IHRF como sendo  $W_0 = 62.636.853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ .

Segundo Sánchez et al. (2015), para finalidades práticas, os valores de geopotencial  $W(\vec{X})$  e as posições geocêntricas  $\vec{X}$  são transformadas em coordenadas verticais relativamente a uma referência de nível com componente geométrica e física, como segue:

1. Componente geométrica
  - a. Posição  $h(t_0, \vec{X})$ ; Velocidade  $dh(\vec{X})/dt$ ;
  - b. Nível convencional – elipsoide (esferopotencial  $U_0$  constante).
2. Componente física
  - a. Posição  $C_P(t_0, \vec{X})$ ; Velocidade  $dC_P(\vec{X})/dt$ ;
  - b. Nível convencional fixo (geopotencial  $W_0$  constante).

### 1.1.2 Redes Verticais de Referência e o IHRF

Como descrito por Mueller (1985), o propósito de uma rede de referência – ou *reference frame* – é prover meios de materializar um sistema de referência para uma descrição quantitativa de posições e movimentos. Para o caso de sistemas de referência verticais, as redes a eles associadas nada mais são que materializações ou realizações físicas de suas coordenadas verticais.

Segundo Sánchez et al. (2015) e Sánchez (2016), a principal dificuldade para o estabelecimento de uma realização do IHRF, denominada IHRF, reside no fato que, atualmente, não se pode satisfazer os requisitos já mencionados para o GGOS – uma rede de referência geodésica global com precisão milimétrica, estabilidade e homogeneidade duradouras, remoção de

inconsistências relacionadas à geometria terrestre e a seu campo da gravidade, e o esboço de padrões que permitam definição e realização consistentes. Isto porquê uma materialização do IHRS seria similar a uma materialização do ITRS, ou seja, por meio de uma rede global com coordenadas verticais precisas e continuamente monitoradas, apoiada por densificações nacionais e regionais, que implicaria em integração e transformação entre sistemas de altitudes existentes.

A mesma referência elencou que, para a materialização do IHRS por meio de estações IHRF, seria necessária a materialização de uma rede com a mesma hierarquia do ITRF, todavia com estações que conjuguem. Todavia, sob uma óptica mais moderna, Ihde et al. (2017) definem as principais convenções para concretização do IHRF como:

- O valor de referência do  $W_0$  é obtido através de melhores estimativas. O procedimento para determinação de  $W_0$  deve ser documentado em convenções e guias para assegurar reprodução e interpretação de mudanças; aceita-se o valor obtido por IAG (2015);
- O elemento central do IHRF é um Modelo Global do Geopotencial - MGG; isto porque a disponibilidade de MGGs de alta resolução, possibilita o cálculo direto de  $W(P)$  introduzindo as coordenadas ITRF  $\vec{X}$  de qualquer ponto nas equações de expansão em harmônicos esféricos; segundo Rummel et al. (2014 apud IHDE et al., 2017), a precisão média esperada após aplicar um destes modelos é da ordem de  $\pm 4$  cm a  $\pm 6$  cm em regiões bem levantadas, e da ordem de  $\pm 20$  cm a  $\pm 40$  cm, com casos extremos de  $\pm 4$  m em regiões esparsamente levantadas;
- A diferença de potencial  $-\Delta W_P$  em relação ao valor convencionado  $W_0$  deve ser conhecida por meio de uma rede de estações de observações geodésicas de maior precisão, onde as observações possam ser geradas

para derivar os elementos definidores no maior nível de qualidade possível, consistentes com outros sistemas e redes de referência;

- A rede de referência IHRF deve seguir a mesma hierarquia da rede de referência ITRF, isto é, uma rede global com densificações nacionais e regionais.

Além disso, estas estações devem, no mínimo, ser continuamente monitoradas para detecção de deformações na rede de referência; referidas ao ITRS/ITRF para conhecimento preciso de suas coordenadas geométricas; e conectadas por nivelamento com o *datum* vertical local, para conhecer precisamente o valor local do número geopotencial e, conseqüentemente, possibilitar unificação do *datum* vertical.

Dada a complexidade relacionada ao estabelecimento do IHRF, é importante mencionar que, até a data de elaboração deste trabalho, não há estações IHRF que materializem o IHRS.

## 1.2 Os Problemas de Valor de Contorno da Teoria do Potencial

Conforme discorrido por Kellogg (1929), a segunda derivada parcial do potencial Newtoniano,  $V$ , satisfaz a equação diferencial apresentada na Equação 4, conhecida como equação de Poisson. Ainda nesta equação,  $\Delta$  é o operador de Laplace ou Laplaciano,  $G$  é a constante universal da gravitação ( $G = (6,67384 \pm 0,00080) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ ) e  $\rho$  é a densidade da distribuição de massas.

$$\Delta V = -4\pi G\rho \quad (4)$$

Ainda segundo a referência citada, a equação de Poisson é válida em todos os lugares em que a densidade das massas,  $\rho$ , satisfaz certas condições similares à continuidade (Condição de Hölder). Um caso especial da Equação 4 é aplicado para todos os pontos onde a densidade é igual a zero (i.e., no espaço); então a equação de Poisson torna-se a equação de Laplace, conforme apresentado na Equação. 5.

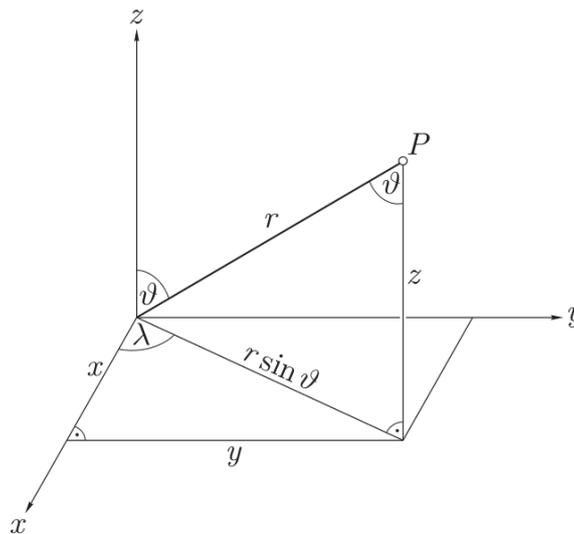
$$\Delta V = 0 \quad (5)$$

Funções que satisfazem a equação de Laplace, são conhecidas como funções harmônicas. A equação de Laplace é dada em coordenadas cartesianas retangulares (x, y, z) como discorrido na Equação 6, e em coordenadas esféricas (distância geocêntrica – r e colatitude -  $\vartheta$ ) na Equação 7. A representação das variáveis e referências utilizadas nestas formulações é dada pela Figura 1.

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (6)$$

$$V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \quad (7)$$

Figura 1 – Coordenadas cartesianas retangulares e esféricas.



Fonte: Heiskanen e Moritz (1967 apud FERREIRA, 2011).

Neste contexto, Kellogg (1929) e Heiskanen e Moritz (1967) apontam que há três problemas conhecidos de valor de contorno da teoria do potencial, a saber:

- Primeiro problema de valor de contorno da Teoria do Potencial, ou problema de Dirichlet: Dada uma função arbitrária sobre a superfície terrestre  $S$ , determinar uma função  $V$  a qual é harmônica interna ou

externa a superfície  $S$ , e a qual assume sobre  $S$  os valores para a referida função;

- Segundo problema de valor de contorno da Teoria do Potencial, ou problema de Neumann: a derivada normal do potencial sobre a superfície de contorno  $S$   $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)$  é conhecida, buscando-se determinar a função em qualquer região do espaço no qual ela possa ser considerada harmônica; e
- Terceiro problema de valor de contorno da Teoria do Potencial, ou problema de Robin: são conhecidas a função harmônica  $V$  e sua derivada normal sobre a superfície de contorno  $S$   $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)$ , buscando-se determinar por combinação linear a função em qualquer região do espaço onde possa ser considerada harmônica.

### 1.3 Os Problemas de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG)

Conforme apresentado por Carrión (2017), os problemas de valor de contorno da teoria do potencial aplicados à Geodésia Física são usados para a determinação do potencial gravitacional  $V$ , considerado como uma função harmônica. Neste contexto, os PVCG também são divididos em três vertentes.

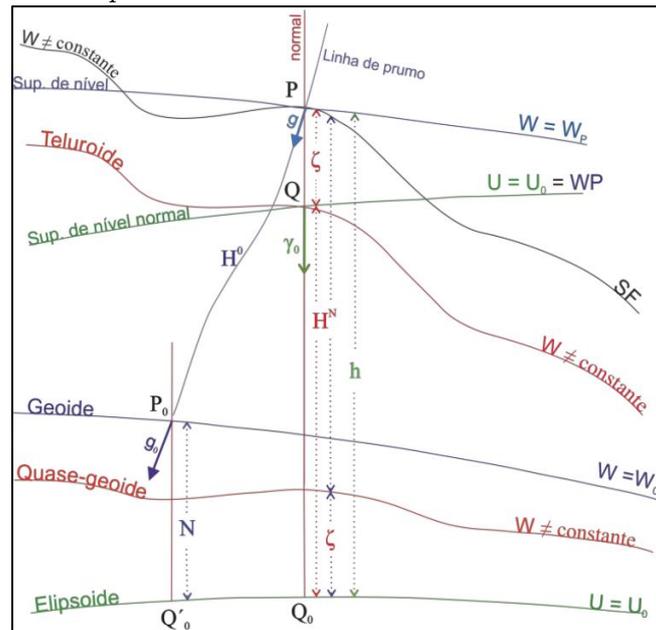
O PVCG de Dirichlet é adotado dentro da teoria de Molodensky, considerando como superfície de contorno a Superfície Física ( $SF$ ) da Terra e fazendo a determinação do geopotencial em um ponto  $P$  da  $SF$  como  $W_P = U_Q$ . Neste caso particular,  $U_Q$  é o esferopotencial do elipsoide de referência no ponto  $Q$ , o qual situa-se sobre a mesma normal ao elipsoide de nível que passa pelo ponto  $P$  (ver Figura 2). Para um conjunto de pontos  $P_i$  na superfície física, existirão, portanto, correspondentes pontos  $Q_i$ . O conjunto de pontos  $Q_i$  geram uma superfície denominada teluroide. A distância normal de um ponto do teluroide ao correspondente  $P_i$  na  $SF$  é definida como anomalia de altitude  $\zeta_i$ . Esta mesma anomalia de altitude mensurada sobre a normal a partir do elipsoide de referência gera o denominado quase-geoide. A grandeza

fundamental envolvida na solução é a denominada anomalia da gravidade de Molodensky (ou anomalia de superfície) dada por  $\Delta g_M = g_P - \gamma_Q$ .

O PVCG de Dirichlet é descrito matematicamente pela Equação 8.

$$\begin{cases} \Delta T = 0, & \text{se } r > R \\ T = \bar{T}, & \text{se } r = R \end{cases} \quad (8)$$

Figura 2 – Superfícies e linhas de referência atinentes ao PVCG.



Fonte: Carrión (2017).

O PVCG de Neumann é aplicado quando conhecida a derivada na direção normal do potencial gravitacional. A solução do PVCG de Neumann pode ser dada no âmbito da determinação clássica do geóide com base nas anomalias da gravidade dadas por  $\Delta g_{\text{geoide}} = g_{\text{geoide}} - \gamma_{\text{elipsoide}}$ , a qual é claramente dependente de reduções arbitrárias, ou também em soluções modernas ditas fixadas na superfície física da Terra, com base na teoria de Molodensky aplicando a condição de contorno na superfície física da Terra. Sua expressão matemática ocorre como mostrado na Equação 9, referente à derivada normal da função de interesse no ponto dado; nesta, ainda,  $\delta g_P = g_P - \gamma_P$  é o denominado distúrbio da gravidade no ponto  $P$  na superfície física da Terra, sendo esta, agora, a grandeza fundamental para os cálculos, haja visto que esta independe totalmente de reduções arbitrárias.

$$\begin{cases} \Delta T = 0, & \text{se } r > R \\ \frac{\partial T_P}{\partial r} = -\delta g_P, & \text{se } r = R \end{cases} \quad (9)$$

Por fim, o PVCG de Robin, pode ser aplicado para a determinação do geoide em regiões oceânicas, mediante o cálculo iterativo do potencial perturbador e de dados gravimétricos sobre o oceano. Sua expressão matemática ocorre como presente na Equação 10.

$$\begin{cases} \Delta T = 0, & \text{se } r > R \\ \frac{\partial T_P}{\partial r} + \frac{2}{r} T_P = -\Delta g_P, & \text{se } r = R \end{cases} \quad (10)$$

Ressalta-se que estes problemas não apresentam solução única, pois infinitas distribuições de massa podem gerar o mesmo potencial. O terceiro problema, em particular, tem grande relevância para a Geodésia, uma vez que a determinação do potencial perturbador de certa forma se relaciona a ele. A anomalia de gravidade é representada como uma combinação linear entre o potencial perturbador e sua derivada normal e é expressa por uma equação diferencial conhecida como “equação fundamental da Geodésia”, como na Equação 11.

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T \quad (11)$$

### 3 A Solução do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG)

#### 3.1 Abordagens para solução do PVCG

Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006) realçam algumas das principais abordagens para solução do PVCG, tais como o PVCG livre, o PVCG escalar livre e o PVCG fixado nas formas linearizada e simples. Apesar da concepção clássica do PVCG ser devida a Stokes, figura como estado-da-arte nesta determinação a formulação de Molodensky e sua solução nas formas escalar livre e fixada, tendo como referência a superfície física da Terra e propiciando a independência de reduções de observações e sem vínculos a referenciais locais, e sendo a abordagem mais natural na era do posicionamento GNSS.

Ao longo deste item discorre-se sobre as diferentes abordagens para solução do PVCG, em consonância com Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006), Guimarães e Blitzkow (2011) e Sansò e Sideris (2013).

### 3.1.1 O PVCG Livre

Antes do advento das técnicas espaciais, era impossível determinar como um todo a geometria da superfície terrestre com alta precisão. O estabelecimento de redes globais tridimensionais a partir de medidas de distâncias, ângulos horizontais, azimutes e distâncias zenitais não era possível. Perante essa situação originou-se a formulação do PVCG Livre, também conhecido como problema de Molodensky.

Trata-se de um problema de valor de contorno não linear “livre” ou “vetorial livre”, onde a “qualificação livre” está ligada ao fato do vetor posição ser uma incógnita. Não existe informação com relação à superfície de contorno. As observações que se têm são:  $W, g, \phi$  e  $\Lambda$ , assim, a aplicação do PVCG livre possui a restrição de que o vetor posição está relacionado às observações que são basicamente coordenadas astronômicas ( $\phi$  e  $\Lambda$ ); estas não possuem uma distribuição espacial adequada e não atendem a precisão exigida (o erro é da ordem de  $0,3'' \cong 10 m$ ).

### 3.1.2 O PVCG Escalar Livre

Nos levantamentos geodésicos clássicos, as coordenadas geodésicas latitude e longitude ( $\varphi, \lambda$ ) eram derivadas dos métodos de poligonação e triangulação, a partir de medidas de ângulos e distâncias. A coordenada altimétrica (altitude elipsoidal), geralmente não era conhecida.

Nas triangulações e poligonações; o que se executava era o nivelamento geométrico ou trigonométrico, obtendo assim a altitude nivelada, com a finalidade de reduzir as observações à superfície do elipsoide. Contudo, para se obter a altitude elipsoidal seria necessário conhecer a altitude geoidal, sendo que esta não figura no problema de Molodensky. Com isto, a opção foi

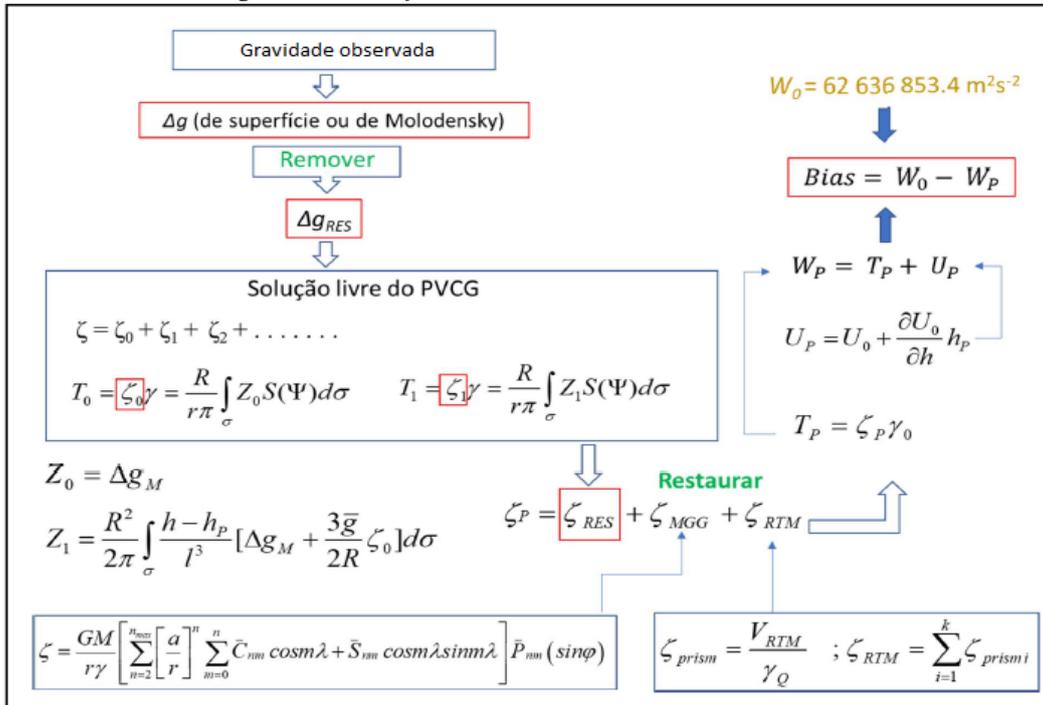
de se utilizar o PVCG escalar livre, uma vez que se conhecem as coordenadas geográficas em todos os pontos  $P \in S$ .

A diferença entre este problema e o problema livre é que neste, as coordenadas planimétricas de um dado ponto  $P$  são conhecidas sobre a normal ao teluroide, sendo somente necessário conhecer  $h(\varphi, \lambda)$  para fixar a superfície desconhecida. Além disso, para suprir a falta de informação, duas quantidades do campo de gravidade são medidas:  $(W, g)$ , ao passo que no outro, não se conhece nada sobre a posição  $P$ , sendo que quatro grandezas são medidas:  $W, g, \phi$  e  $\Lambda$ . As condições mais específicas para o PVCG escalar livre são apontadas por Heck (1989) e Sacerdote e Sansò (1986).

A Figura 3 apresenta uma síntese das etapas utilizadas para solução escalar livre do PVCG com base na técnica remover-restaurantar (FORSBERG, 1997) e é, até hoje, utilizada em trabalhos correlatos, como em Palmeiro (2013), Carrión (2017) e Nicacio et al. (2018). Segundo Forsberg (1997), a vantagem da técnica em questão está em conseguir modelar grandezas que tem uma menor variabilidade, e os erros oriundos dos efeitos da topografia são minimizados. O sinal gravimétrico que domina os curtos comprimentos de onda, oriundo do efeito gravitacional das massas topográficas, pode ser usado para suavizar o campo gravitacional (cálculo de grandezas residuais) antes de realizar os processos de modelagem.

Nota-se que, na Figura 3, há uma grande quantidade de procedimentos e princípios – como o desenvolvimento da anomalia de altitude como funcional do geopotencial em harmônicos esféricos, o princípio da decomposição espectral e da modelagem de efeitos de topografia residuais – sobre os quais não se discorre neste trabalho. Maiores detalhes sobre tais pontos podem ser verificados em Ferreira (2011), Carrión (2017), Nicacio (2018) e Nicacio et al. (2018).

Figura 3 – Solução do PVCG na forma escalar livre.



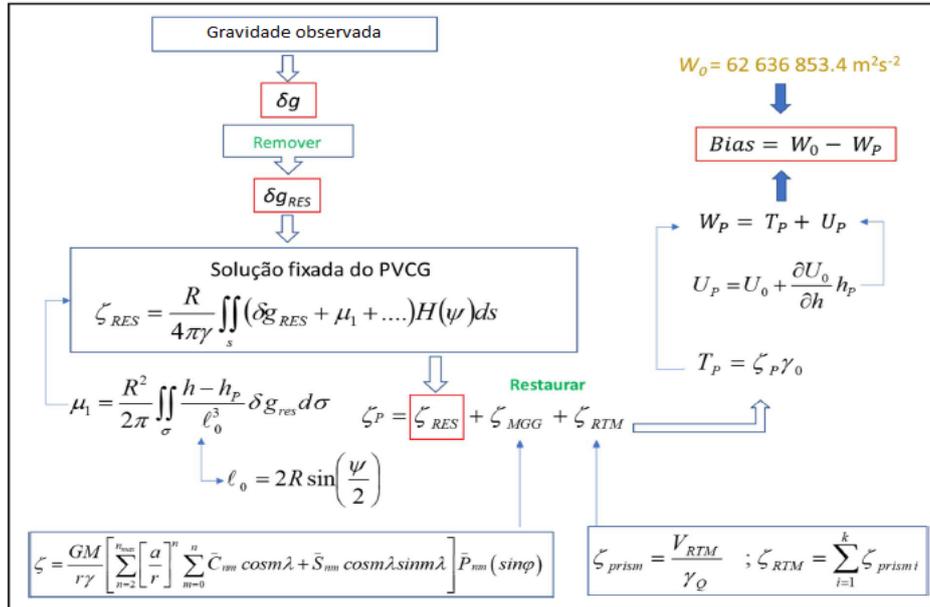
Fonte: Carrión (2017).

### 3.1.4 O PVCG Fixado

Segundo Heck (1989) e Ferreira (2011), em vista das tecnologias de posicionamento de alta precisão por satélites artificiais, o PVCG fixado, pressupondo que a geometria da superfície de contorno é completamente conhecida, adquire cada vez mais relevância prática. Considerando-se que a superfície terrestre  $S$  é conhecida, tem-se como incógnita o geopotencial  $W$ ; se como condição de contorno utiliza-se o módulo do vetor gravidade  $\vec{g}$ , tem-se então o PVCG fixado.

Analogamente, a Figura 4 apresenta uma síntese das etapas utilizadas para solução fixada do PVCG também com base na técnica remover-restaurar. Novamente, omite-se maiores aprofundamentos sobre os procedimentos técnicos.

Figura 4 – Solução do PVCG na forma fixada.



Fonte: Carrión (2017).

### 3.2 O emprego da solução do PVCG para vinculação ao IHRs/IHRF

Conforme já abordado, na definição vigente do IHRs, as coordenadas verticais primárias de um dado ponto  $P$  são dadas por diferenças de geopotencial ( $-\Delta W_P$ ), as quais são designadas de números geopotenciais ( $C_P$ ). A integração entre os dados altimétricos já existentes em cada país, já coletados pelos órgãos competentes, visando à adequação à nova modelagem vertical e a eliminação de discrepâncias entre os *data* verticais nacionais e o *datum* vertical global, pode ser realizada conforme a formulação apresentada pela Equação 12, como descrito por Nicacio (2017), expressa em função da diferença entre os números geopotenciais de um ponto de cálculo  $P$  obtidos segundo o *datum* global ( $C_P$ ) e o *datum* nacional ( $C_{P_i}$ ).

$$C_P - C_{P_i} = W_0 - W_{0_i} = \delta W_i \cong \underbrace{[W_0 - (U_P + T_P)]}_I - \underbrace{\sum_j g_{m_j} \Delta n_j}_{II} \quad (12)$$

Note que o desenvolvimento da diferença de números geopotenciais à esquerda da Equação 12 culmina na diferença dos termos I e II. O termo I contém a diferença entre o geopotencial de referência  $W_0$  e a soma do

esferopotencial  $U_P$  e o potencial perturbador  $T_P$  no mesmo ponto  $P$  – o primeiro é padronizado; para o segundo, há equacionamento matemático; para o terceiro, realiza-se a determinação por meio da solução do PVCG em pontos da superfície. Já o termo II contém o somatório de produtos discretos entre valores médios da gravidade  $g_m$  e desníveis  $\Delta n$ , característicos de conjugação de operações de nivelamento e gravimetria. Assim, considerando-se a existência de uma rede de nivelamento com densidade adequada e conjugada com informações de gravimetria, é possível unir este conhecimento prático à modelagem matemática teórica cabível e proporcionar o alinhamento com parte das recomendações que buscam a definição do IHRS e a materialização do IHRF.

Aqui, evidencia-se o caráter crucial do entendimento e da aplicação da solução do PVCG para fins de alinhamento aos pressupostos internacionais de vinculação ao Sistema Vertical de Referência Global. De forma gráfica e resumida, novamente omitindo pormenores técnicos, De Freitas et al. (2018) aplicam a Figura 5 para ressaltar a importância da determinação do potencial perturbador  $T_P$  através da solução do PVCG como forma de obtenção de um offset vertical ( $\Delta H_{Global/local}$ ) entre um datum vertical nacional, por exemplo, e o datum vertical global – o  $W_0$  do IHRS (realçado em vermelho na porção inferior da figura em questão), o Sistema Vertical de Referência Global. Ainda segundo a referência em tela, deverá priorizar-se para viabilização do IHRS/IHRF as soluções escalar livre e fixada (vide itens 3.1.2 e 3.1.3 do presente manuscrito) do PVCG.

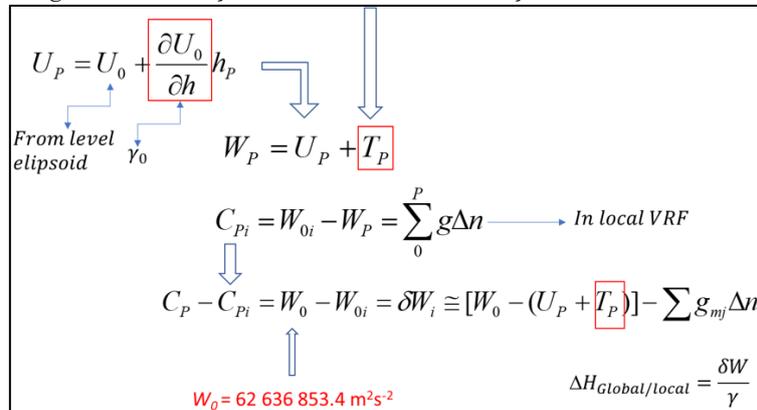
## 4 Discussões e Análises

### 4.1 Perspectivas nacionais de vinculação ao IHRS/IHRF

No contexto de América Latina e Caribe, as discussões e os trabalhos para unificação dos data verticais e da adesão ao IHRF são encargo do Grupo de Trabalho “Datum Vertical” (GT-III) do Projeto SIRGAS (Sistema de

Referência Geocêntrico para as Américas), atualmente presidido pelo Prof. Dr. Silvio Rogério Correia de Freitas (NICACIO, 2017).

Figura 5 – Solução do PVCG na vinculação ao IHRF/IHRF.



Fonte: De Freitas et al. (2018).

Neste âmbito, desde 1997 o GT-III atua para o estabelecimento de um Sistema Vertical de Referência para o SIRGAS (SVRS). Anualmente, é realizado um workshop (*Taller SIRGAS*) com representantes nacionais dos países membros do SIRGAS, renomados geodestas e representantes de outros órgãos de interesse, tais como a IAG, para envidar esforços rumo à adoção de modernas redes verticais, viabilizando uma futura unificação continental e, posteriormente, uma unificação global. Neste ponto, ressalta-se oportunamente a heterogeneidade, em termos de estrutura geodésica, das redes atinentes aos países da América Latina; neste sentido, o esforço conjugado entre os países do SIRGAS é e deverá continuar sendo conduzido para a implantação do IHRF na América Latina.

No que diz respeito à previsão e proposição de estações IHRF no globo, Sánchez et al. (2017) discorrem que em abril de 2017 foi realizada uma primeira proposta com 163 possíveis localizações de estações, após discussões com especialistas em nível regional e nacional. Ainda, no tocante aos avanços brasileiros para materialização de estações IHRF, a proposta vigente de locações para estações IHRF em solo nacional é: dados os requisitos apresentados para instalação destas estações (SÁNCHEZ et al., 2017), o

IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) elencou seis estações pertencentes à RBMC (Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo) localizadas nas cidades de: Fortaleza-CE (estação CEFT), Marabá-PA (estação MABA), Brasília-DF (estação BRAZ), Cuiabá-MT (estação CUIB), Presidente Prudente-SP (estação PPTE) e Imbituba-SC (estação IMBT). Tal pertinência coaduna com a preconização da IAG para seleção de estações candidatas, tal como apontado no item 2.1.1 deste manuscrito.

Neste contexto, em cada uma das seis localidades propostas, dever-se-á realizar o emprego da solução do PVCG para determinação do geopotencial nos respectivos pontos da superfície terrestre e, por fim, modelar as estações IHRF brasileiras.

#### 4.2 Justificativas e potenciais contribuições em nível nacional com enfoque no Exército Brasileiro

Uma vez apresentados os conceitos, as variáveis e as demais abordagens pertinentes, é importante apresentar também as justificativas e as contribuições almejadas pela adoção do alinhamento mencionado.

A justificativa pioneira para o presente trabalho está relacionada à necessidade de realizar determinações altimétricas com significado físico – leia-se altitudes normais, para o atual caso brasileiro – para fins de viabilização de grandes obras de engenharia em todo o seu território. Apesar de grandes avanços tecnológicos que têm ocorrido em nível mundial com a popularização de técnicas de posicionamento por satélite, tais mecanismos proveem informações posicionais e, de modo mais enfático, altimétricas vinculadas apenas a um referencial puramente geométrico, sendo sua interpretação de mesmo teor. Desta forma, para fins de consecução das obras mencionadas, estas informações não são suficientes.

De maneira ampla e abrangente, historicamente o Exército Brasileiro atua em impactantes intervenções de engenharia ao longo de todo o território nacional que dependem diretamente da precípua determinação da grandeza

mencionada para pleno alinhamento ao mundo real. Um exemplo do exposto anteriormente é o trabalho executado para transposição do Rio São Francisco, localizado na região Nordeste do Brasil. Integrante da pasta do Programa de Aceleração do Crescimento (PAC) do Ministério do Planejamento, Desenvolvimento e Gestão (MP), o Projeto de Integração do Rio São Francisco visa a beneficiar mais de 12 milhões de pessoas ao longo de 390 municípios nos estados de Pernambuco, Ceará, Paraíba e Rio Grande do Norte, os quais na atualidade não contam com pleno abastecimento de água. Devido à grande impacto e perspectivas, este projeto é considerado a maior obra de infraestrutura para abastecimento de água da história do Brasil (EBC, 2015).

De maneira simplificada, a obra, que conta com cooperação do Exército em intervenções pontuais, consiste em fazer com que as águas do Rio São Francisco cheguem a outros reservatórios de forma sustentável, ou seja, sem grandes impactos ambientais. Para tanto, ainda conforme a referência supracitada, a água percorre o trajeto de duas formas: por gravidade, ou com a força de estações de bombeamento. Em ambos os casos, o pleno conhecimento de como as altitudes se comportam ao longo do caminho a ser percorrido pela obra é fundamental para que recursos públicos sejam empregados de maneira eficaz e eficiente pelo Estado, proporcionando um serviço de qualidade ao cidadão.

No caso específico da atuação de Organizações Militares de Engenharia do Exército Brasileiro na região amazônica, são desenvolvidas as seguintes obras de grande porte e de interesse nacional (EXÉRCITO BRASILEIRO, 2017). Em cada uma delas reside a já mencionada importância de adoção de altitudes com significado físico e vinculadas, tanto quanto possível, a um sistema de referência vertical adequável ao IHRS.

#### 4.3A Rede Altimétrica Fundamental Brasileira (RAFB) e seu avanço em direção ao IHRF

A Rede Altimétrica Fundamental Brasileira (RAFB), é parte integrante do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) e está sob responsabilidade do IBGE.

Até meados de 2018, as altitudes da RAFB, denominadas de normais-ortométricas, disponibilizadas no Banco de Dados Geodésicos do IBGE (BDG/IBGE) eram provenientes de desníveis corrigidos do efeito sistemático causado pelo não-parallelismo das superfícies equipotenciais do campo da gravidade normal, causado principalmente pela falta de combinação de observações de gravidade com nivelamento.

Com o passar dos anos e com os avanços no entendimento das dificuldades impostas pela simples consideração de altitudes e desníveis nivelados no estabelecimento de uma rede vertical em nível nacional, reconheceu-se a necessidade de adoção de altitudes com efetivo significado físico para representar as RRNN da RAFB – apesar do latente conhecimento oficial datar de 2016 (LUZ, 2016), não foi possível prover uma resposta imediata às demandas científicas, haja vista a demasiada extensão da RAFB/SGB e os colossais esforços a serem impostos em uma empreitada com este objetivo.

Neste sentido, em julho de 2018 foi realizado o lançamento oficial da RAFB/IBGE reajustada em termos de números geopotenciais (IBGE, 2018).

Através da conjugação de informações gravimétricas às observações de desníveis “puros” – leia-se, sem a aplicação de quaisquer correções para atenuação do não-parallelismo das superfícies equipotenciais do campo da gravidade, conforme abordado no item 2.1.1 – passou-se à adoção de altitudes normais em função valores de gravidades teóricos nos termos da Equação 3. Os cálculos e as análises desenvolvidos durante o reprocessamento da rede caracterizam-se pela robustez, envolvendo um maior número de variáveis qualitativas em relação aos procedimentos anteriores. A inserção de novos parâmetros proporcionou o cálculo de altitudes com maior significado físico e

preparou a rede para as ações futuras preconizadas pelo SIRGAS sobre a unificação do sistema altimétrico das Américas (IBGE, 2018).

Cabe ressaltar que as diferenças constatadas entre as novas altitudes normais e as altitudes vigentes no BDG até julho de 2018 ocorrem, em grande parte, pela inserção de novas linhas e pelo processo de depuração da rede, que ocasionou uma geometria diferente para o ajustamento. Esta influência é significativamente maior do que a decorrente da utilização de diferenças de geopotencial e conversão dos valores finais ajustados em altitudes normais.

Conforme reforçado por IBGE (2018), as novas altitudes normais mantêm-se referidas aos referenciais altimétricos atualmente vigentes no Brasil, Imbituba e Santana, ambos definidos, em cada caso, a partir de um valor do NMM calculado com dados coletados em uma única estação maregráfica.

Atentando-se para o discutido no item 3.2 e mais detalhadamente na Equação 12, verifica-se que as melhorias impostas ao novo ajustamento da RAFB impactam positivamente na parte II daquela equação; há ainda que se buscar alternativas para atuar em sua parte I, diretamente pela solução do PVCG – por meio de alguma das opções apresentadas no item 3.1, por exemplo – para cálculo do potencial anômalo  $T_p$  em pontos da superfície nos quais se deseja estabelecer estações IHRF e, por fim, definir o valor de referência local/nacional de geopotencial para vinculação ao geopotencial global de referência pela abordagem apresentada no item 3.2, por exemplo.

## **5 Considerações Finais**

Realizou-se uma abordagem conceitual sobre o PVCG, suas possíveis abordagens de solução e o emprego desta no âmbito da conceituação moderna de Sistemas Verticais de Referência. Nestes, sobressai a importância de provisão de determinações altimétricas com significado físico para fins de viabilização de grandes obras de engenharia em todo o território nacional. De modo específico para o Exército Brasileiro, o qual historicamente atua em

impactantes intervenções de engenharia nos mais variados rincões do Brasil, é crucial a precípua determinação da grandeza mencionada e o entendimento de seu contexto para pleno alinhamento ao mundo real. Evidenciou-se, portanto, a importância do emprego da solução do PVCG com vistas à adequação brasileira aos pressupostos da IAG.

Adicionalmente, ressalta-se que foram fatores relevantes no entendimento do tema o estudo da evolução histórica dos conceitos envolvidos na solução do PVCG e a apresentação das diferentes formas de sua solução, com pouco aprofundamento físico e matemático cabível. A utilização de equacionamento adequado, esquemas e figuras quando possível foi ponto forte no papel de transmissão das informações desejadas.

Por fim, o estudo do emprego, de fato, da solução do PVCG como forma de vinculação a um Sistema Vertical de Referência Global foi exemplificado, tal como proposto inicialmente, incluindo referências a relevantes trabalhos da área que igualmente trataram o tema. Ainda, a contextualização por uma análise de caso específica do Brasil possibilitou realçar a importância do tema trabalhado para o Exército Brasileiro, bem como para a sociedade brasileira de um modo geral.

## **Referências**

- DE FREITAS, S. R. C.; BLITZKOW, D. **Altitudes e Geopotencial**. IGeS Bulletin n° 9 – International Geoid Service, Milan, 1999, pp. 47 – 62.
- DE FREITAS, S. R. C. Contribuições da Geodesia para o desenvolvimento de Sistema de Observação da Terra – GGRS/IHRS. **IV Simpósio Brasileiro de Geomática e II Jornadas Lusófonas sobre Ciências e Tecnologias de Informação Geográfica**. Presidente Prudente, Brasil. 2017.
- DE FREITAS, S. R. C.; MARTINEZ, W.; MACKERN, V. M.; CIOCE, V. J.; RODINO, R. P.; SÁNCHEZ, L. Advances in the modernization of the height reference systems in Latin America and their integration to the International Height

- Reference System (IHRs). **International Symposium on Gravity, Geoid and Height Systems 2018**. Copenhagen, Dinamarca. 2018.
- DREWES, H. The changing objectives in geodetic research. **Zeitschrift für Geodäsie, Geo-Information und Landmanagement**, v. 131, n. 5, 2006, pp. 1–7.
- EBC. **Transposição do São Francisco usa gravidade e bombeamento para levar água a 12 milhões**. Site <<http://www.ebc.com.br/tecnologia/2015/09/saiba-como-funciona-obra-de-transposicao-do-rio-sao-francisco>>, acessado em julho de 2018.
- EXÉRCITO BRASILEIRO. **Andamento das obras, 2017**. Site <<http://www.doc.eb.mil.br/home.php?pg=allObras>>, acessado em fevereiro de 2017.
- FERREIRA, V. G. **Solução do tipo Brovar para o Segundo Problema de Valor de Contorno da Geodésia com vistas à modernização de sistemas de altitudes**. Tese de doutorado. Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 2011.
- FORSBERG, R. **Terrain Effects in Geoid Computation**. Relatório Técnico. National Survey and Cadastre, Geodetic Division. Copenhagen, 1997.
- GEMAEL, C. **Introdução à Geodésia Física**. New. Curitiba: Editora UFPR, 2012.
- GUIMARÃES, G.; BLITZKOW, D. Problema de Valor de Contorno da Geodésia: uma abordagem conceitual. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 17, n. 4, 2011, pp. 607–624.
- HECK, B. A contribution to the scalar free boundary value problem of physical geodesy. **Manuscripta Geodaetica**, v.14, 1989, pp. 87-99.
- HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. W.H.Freeman and Co Ltd, 1967.
- HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. 2ª ed. Graz, Austria: Springer-Verlag Wien, 2006.
- IAG. **Resolution (No. 1) for the definition and realization of an International Height Reference System (IHRs)**. Relatório Técnico, München, Alemanha, 2015.
- IAG. **The Global Geodetic Observing System (GGOS)**. Site <<http://www.ggos.org/>>, acessado em fevereiro de 2018.

- IHDE, J. et al. Definition and Proposed Realization of the International Height Reference System (IHRM). **Surveys in Geophysics**, v. 3, 2017, p. 1–22.
- JEKELI, C. **Heights, the Geopotential, and Vertical Datums**. Relatório Técnico n. 459. Geodetic Science and Surveying, Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science. The Ohio State University – Columbus, Ohio, 2000.
- KELLOGG, O. D. **Foundations of Potential Theory**. 1ª ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1929. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 31).
- LUZ, R. T. **Estratégias para Modernização da Componente Vertical do Sistema Geodésico Brasileiro e sua Integração ao SIRGAS**. Tese de doutorado. Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 2008.
- LUZ, R. T. **Proposta de locações para estações IHRM**. Relatório Técnico, IBGE. Rio de Janeiro, Brasil, 2017.
- LUZ, R. T. Cálculo de altitudes científicas e sua aplicação no reajustamento da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro. **Revista Brasileira de Geografia**, v. 61, n. 1, 2016, pp. 79-97.
- MUELLER, I. I. Reference Coordinate Systems and Frames: concepts and realization. **Journal of Geodesy**, v. 85, 1985, pp. 181–188.
- NICACIO, E. L. **Alternativa para determinação de altitudes normais-ortométricas na Amazônia Legal Brasileira**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 2017.
- NICACIO, E. L. **Emprego da solução do Problema de Valor de Contorno da Geodésia à vinculação nacional a um Sistema Vertical de Referência Global**. Trabalho de Conclusão de Curso. Escola de Aperfeiçoamento de Oficiais, Programa de Pós-Graduação em Ciências Militares, Rio de Janeiro, 2018.
- NICACIO, E. L.; CARRIÓN, J. L.; DE FREITAS, S. R. C.; DALAZOANA, R.; FERREIRA, V. G. Strategy for calculating local potential values as IHRM coordinates – a case study on the Colorado empirical experiment.

- International Symposium on Gravity, Geoid and Height Systems 2018.** Copenhagen, Dinamarca. 2018.
- PALMEIRO, A. S. **Análise do vínculo do Datum Vertical Brasileiro a um Sistema Global de Altitudes com base em soluções fixadas e livres do PVCG.** Tese de doutorado. Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 2013.
- SACERDOTE, F.; SANSÒ, F. The scalar boundary value problem of physical geodesy. **Manuscripta Geodaetica**, v. 11, 1986, pp. 15-28.
- CARRIÓN, J. L. **Vínculo do Datum Vertical Equatoriano ao International Height Reference System - IHRS.** Tese de doutorado. Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 2017.
- SÁNCHEZ, L. Sistemas de referencia vertical. **Taller SIRGAS en Sistemas Verticales de Referencia 2016.** Quito, Ecuador. 2016.
- SÁNCHEZ, L. Advances in the implementation of the International Height Reference System (IHRS). **Symposium SIRGAS 2017.** Mendoza, Argentina. 2017.
- SÁNCHEZ, L. et al. Establishment of an International Height Reference System in the frame of GGOS. **Symposium SIRGAS 2015.** Santo Domingo, Republica Dominicana. 2015.
- SÁNCHEZ, L. et al. Towards a first realization of the International Height Reference System (IHRS). **European Geosciences Union General Assembly 2017.** Vienna, Austria. 2017.
- SANSÒ, F.; SIDERIS, M. G. S. **Geoid Determination – Theory and Methods. In: Lecture Notes in Earth System Sciences.** Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
- TORGE, W.; MÜLLER, J. **Physical Geodesy.** 4ª ed. Berlin-Boston: Walter de Gruyter, 2012.