

# IMPLICAÇÕES EM AJUSTAR UMA REDE GRAVIMÉTRICA COM OBSERVAÇÕES MÉDIAS OU INDEPENDENTES: ANÁLISE DE PRECISÃO E CONFIABILIDADE

*Implications in Adjusting a Gravity Network with Observations Medium or Independent: Analysis of Precision and Reliability*

**Guataçara dos Santos Junior<sup>1,2</sup>**  
**Sílvio Rogério Correia de Freitas<sup>2</sup>**  
**Camil Gemael<sup>2</sup>**  
**Pedro Luis Faggion<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>**Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná**  
Unidade de Ponta Grossa  
Prolongamento da Avenida Monteiro Lobato, s/n, CEP:84016-210. Ponta Grossa – PR.  
guata@pg.cefetpr.br

<sup>2</sup>**Universidade Federal do Paraná**  
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
Centro Politécnico, Caixa Postal 19001, CEP: 81531-990. Curitiba – PR.  
sfreitas@ufpr.br

## RESUMO

Estratégias de ajustamento associadas à proposta de metodologia utilizada para a implantação de uma rede gravimétrica de alta precisão no Paraná são apresentadas. Foi implantada uma rede com estações em 21 localidades no Estado do Paraná e uma no estado de São Paulo. Para reduzir o risco da perda de pontos dessa rede gravimétrica, eles foram estabelecidos sobre os pontos da Rede GPS de Alta Precisão do Paraná, os quais possuem uma distribuição geográfica relativamente homogênea. Para cada uma das linhas gravimétricas pertencentes aos circuitos implantados para a rede, foi possível obter três ou seis observações. Na primeira estratégia, de ajustamento investigada, para a rede, foi considerada, como observação, o valor médio das observações obtidas para cada linha gravimétrica. Na segunda estratégia, do ajustamento, as observações foram consideradas independentes. A comparação dessas estratégias revelou que somente o critério de precisão não é suficiente para indicar a solução ótima de uma rede gravimétrica. Verificou-se que há necessidade de utilizar um critério adicional para análise da solução ajustada da rede, além do critério de precisão. O critério de confiabilidade para redes geodésicas, o qual se divide em confiabilidade interna e externa foi utilizado. A confiabilidade interna foi utilizada para verificar a rigidez com a qual a rede reage na detecção e quantificação de erros grosseiros existentes nas observações, e a confiabilidade externa na quantificação da influência sobre os parâmetros ajustados dos erros não localizados. São apresentados os aspectos que diferenciam as soluções obtidas, quando se combinam os critérios de precisão e confiabilidade na análise da qualidade de uma rede gravimétrica.

**Palavras chaves:** rede gravimétrica, critério de precisão, critério de confiabilidade.

## ABSTRACT

Adjustment strategies associated to the methodology applied used to the implantation of a gravity network of high precision in Paraná are presented. A network was implanted with stations in 21 places in the State of Paraná and one in the state of São Paulo To reduce the risk of the losing of points of that gravity network, they were established on the points of the GPS High Precision Network of Paraná, which possess a relatively homogeneous geographical distribution. For each one of the gravity lines belonging to the loops implanted for the network, it was possible to obtain three or six observations. In the first strategy, of adjustment investigated, for the net, it was considered, as observation,

the medium value of the observations obtained for each gravity line. In the second strategy, of the adjustment, the observations were considered independent. The comparison of those strategies revealed that only the precision criteria is not enough to indicate the great solution of a gravity network. It was verified that there is need to use an additional criterion for analysis of the adjusted solution of the network, besides the precision criteria. The reliability criterion for geodesic networks, which becomes separated in reliability internal and external reliability it was used. The reliability internal it was used to verify the rigidity with which the network reacts in the detection and quantification of existent gross errors in the observations, and the reliability external in the quantification of the influence on the adjusted parameters of the errors non located. They are presented the aspects that differentiate the obtained solutions, when they combine the precision criteria and reliability criteria in the analysis of the quality of a gravity network.

**Key words:** gravity network, precision criteria, reliability criteria.

## 1. INTRODUÇÃO

A gravimetria tem sido considerada uma das principais interfaces entre a Geodésia e outras ciências, tais como Geologia, Geofísica e Oceanografia. Devido à necessidade de uma rede gravimétrica de referência no Paraná, foi proposta a implantação de uma rede gravimétrica de alta precisão no Estado do Paraná. O trabalho para coleta dos dados foi realizado pela Universidade Federal do Paraná, usando quatro gravímetros: três LaCoste & Romberg, modelo G, e um Scintrex, modelo CG. Na metodologia de levantamento adotada, ainda que com base clássica, procurou-se reduzir os principais inconvenientes decorrentes da limitação do tempo entre a ocupação de dois pontos de controle conhecidos para fechamento de circuitos gravimétricos.

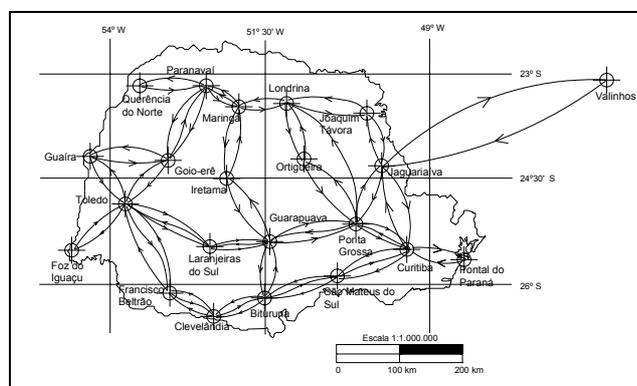


Fig. 1 – Circuitos gravimétricos e metodologia aplicada.

Como pode ser visto na figura 1, o levantamento, foi desenvolvido por meio de segmentos interligados conforme o esquema  $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \dots \dots J \rightarrow A$  (Freitas et, al., 2002). Assim, foram formados micro-circuitos (linhas de desnível gravimétrico entre duas ou três estações), macro-circuitos formados pela interligação dos micro-circuitos e testadas inunções com pontos de controle pertencentes à Rede Nacional de Estações Gravimétricas Absolutas –RENEGA (GEMAEL, 1990). As duas estações usadas dessa rede foram as localizadas nas cidades de Curitiba – PR, e Valinhos - SP. Com essa sistemática de levantamento, foi possível obter um conjunto consistente de observações, o que permitiu

comparar diversas soluções obtidas com o ajustamento da rede.

Neste trabalho, são analisadas duas soluções obtidas para a rede, ambas a partir de observações realizadas com os gravímetros LaCoste & Romberg.

O principal objetivo deste trabalho é a análise das soluções apresentadas no sentido de verificar a consistência das soluções em detectar e localizar erros de pequena magnitude nas observações, bem como verificar a influência dos erros não detectados sobre os parâmetros. A análise de erros no pré-ajustamento é possível, mas nem sempre possibilita a localização de erros de pequena magnitude.

## 2. DESCRIÇÃO DAS SOLUÇÕES ANALISADAS

Com a metodologia de levantamento utilizada, não houve deriva estática.

Para cada uma das linhas gravimétricas (micro-circuitos), foram obtidas três ou seis observações corrigidas da maré terrestre e da deriva dinâmica. Com isso, foram obtidas 6 observações em cada uma de 9 linhas levantadas e 3 observações em cada uma das 14 linhas restantes.

Na tabela 1, os micro-circuitos são numerados e os símbolos  $\leftarrow$  ou  $\rightarrow$  indicam o sentido em que o valor da gravidade aumenta entre duas estações. As linhas 23a e 23b foram utilizadas para calibração dos gravímetros.

TABELA 1 - LINHAS DE DESNÍVEIS GRAVIMÉTRICOS REFERENTES ÀS ESTAÇÕES IMPLANTADAS NA REDE.

Linha	Estações Pertencentes à Rede
01	Curitiba → São Mateus do Sul
02	São Mateus do Sul → Bituruna
03	Bituruna → Clevelândia
04	Clevelândia → Francisco Beltrão
05	Francisco Beltrão ← Toledo
06	Toledo → Guaíra
07	Toledo ← Goio-erê
08	Toledo → Foz do Iguaçu
09	Toledo ← Laranjeiras do Sul
10	Laranjeiras do Sul ← Guarapuava
11	Guarapuava → Bituruna
12	Guarapuava → Ponta Grossa
13	Ponta Grossa → Curitiba
14a	Ponta Grossa ← Ortigueira
14b	Ortigueira ← Londrina
15a	Ponta Grossa ← Jaguariaíva
15b	Jaguariaíva → Joaquim Távora
16	Londrina → Joaquim Távora
17	Londrina → Maringá
18a	Maringá → Iretama
18b	Iretama ← Guarapuava
19a	Maringá → Paranavaí
19b	Paranavaí → Querência do Norte
20	Paranavaí → Goio-erê
21	Goio-erê → Guaíra
22	Curitiba → Pontal do Paraná
23a	Curitiba ← Jaguariaíva
23b	Jaguariaíva ← Valinhos

De acordo com a tabela 1, as equações de observações utilizadas no ajustamento das observações são:

- 11 + Curitiba = São Mateus do Sul; (1)
- 12 = Bituruna – São Mateus do Sul; (2)
- 13 = Clevelândia – Bituruna; (3)
- 14 = Francisco Beltrão – Clevelândia; (4)
- 15 = Francisco Beltrão – Toledo; (5)
- 16 = Guaíra – Toledo; (6)
- 17 = Toledo – Goio-erê; (7)
- 19 = Toledo – Laranjeiras do Sul; (8)
- 110 = Laranjeiras do Sul – Guarapuava; (9)
- 111 = Bituruna – Guarapuava; (10)
- 112 = Ponta Grossa – Guarapuava; (11)

$$113 = Curitiba = - Ponta Grossa; \quad (12)$$

$$114a = Ponta Grossa - Ortigueira; \quad (13)$$

$$114b = Ortigueira - Londrina; \quad (14)$$

$$115a = Ponta Grossa - Jaguariaíva; \quad (15)$$

$$115b = Joaquim Távora - Jaguariaíva; \quad (16)$$

$$116 = Joaquim Távora - Londrina; \quad (17)$$

$$117 = Maringá - Londrina; \quad (18)$$

$$118a = Iretama - Maringá; \quad (19)$$

$$118b = Iretama - Guarapuava; \quad (20)$$

$$119a = Paranavaí - Maringá; \quad (21)$$

$$120 = Goio-erê - Paranavaí; \quad (22)$$

$$121 = Guaíra - Goio-erê; \quad (23)$$

## 2.1 Solução Obtida com Observações Médias

Com as observações corrigidas, calculou-se a média aritmética para cada uma das linhas gravimétricas. Com essa estratégia, o conjunto contendo inicialmente 96 observações, reduziu-se a 23, com uma observação média correspondente a cada uma das linhas gravimétricas. Portanto, no ajustamento da rede utilizando o método dos mínimos quadrados na forma paramétrica, resultaram 23 equações de observação, e 6 graus de liberdade. Em cada um dessas linhas gravimétricas, foi possível obter duas ou três observações da diferença da gravidade entre duas estações para cada um dos gravímetros corrigidas apenas da maré, totalizando seis ou nove observações. A matriz dos pesos (**P**) foi considerada diagonal, com seus elementos sendo inversamente proporcional à variância calculada em cada uma das linhas gravimétricas. Essa estratégia de ajustamento com observações médias é tradicional no Brasil e em outros países da América do Sul. Como exemplo desses países se pode citar: Chile, Equador e Paraguai.

## 2.2 Solução Obtida com Observações Independentes

No ajustamento da rede considerando observações independentes, foram possíveis 96 equações de observação. Para as equações (1), (2), (3), (4), (5), (8), (9), (11) e (12) foram possíveis 6 observações, duas para cada um dos gravímetros e para as demais equações foram possíveis 3 observações, uma para cada gravímetro. Portanto o ajustamento da rede iniciou-se com 96 observações, com 96 equações de observação, distribuídas em 23 linhas de desniveis gravimétricos entre duas estações pertencentes à rede, conseqüentemente 79 graus de liberdade.

A matriz dos pesos (**P**) foi obtida inversamente proporcional à variância calculada em cada micro-circuito. Por exemplo, observando a tabela 1 e a figura 1, mais especificamente a linha 01, verifica-se que é possível obter três observações de desnível gravimétrico corrigido apenas da maré terrestre referente a cada gravímetro. Com essas três observações calculou-se a variância. O mesmo procedimento foi aplicado nas demais linhas. Destaca-se que esse critério para composição da matriz dos pesos é o mesmo utilizado para a outra solução.

O inconveniente desta estratégia ocorre especificamente nos cálculos do vetor solução **X**, da matriz variância-covariância das observações ajustadas, da matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados e da matriz variância-covariância dos resíduos. Em todas essas matrizes, aparece o fator

$$\mathbf{N}^{-1} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}, \quad (24)$$

onde **A** é a matriz dos coeficientes, cujos elementos são derivadas parciais das equações de observações em relação aos parâmetros, **A**<sup>t</sup> é a matriz transposta de **A**, e **P** é a matriz dos pesos. A dificuldade está na singularidade de **N**, ou seja, não admite inversa ordinária. Para resolver o problema, utiliza-se a pseudo-inversa em lugar da inversa ordinária.

### 3. CRITÉRIOS UTILIZADOS NA ANÁLISE DAS SOLUÇÕES

Na análise da qualidade das duas soluções obtidas para a rede gravimétrica, utilizaram-se os critérios de precisão e de confiabilidade.

#### 3.1 Critério para Análise de Precisão

As informações sobre a precisão de uma rede geodésica estão contidas na matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados ( $\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}}$ ). Efetuando a decomposição espectral de  $\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}}$ , determinam-se os valores próprios ( $\lambda_i$ ) associados a mesma. A precisão de uma rede geodésica é tanto melhor quanto menor for o  $\lambda_{\text{máx}}$  (valor próprio máximo de  $\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}}$ ).

Para DUPRAZ & NIEMEIER (1981), WELSH et al. (2000) e CROSSILLA & MARCHESI (1983), alguns dos mais importantes critérios de precisão para redes geodésicas são os seguintes:

o determinante, que é igual ao produto dos valores próprios de  $\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}}$ , deve ser mínimo:

$$\det(\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_i = \text{mín}; \quad (25)$$

o traço da  $\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}}$ , que é igual a soma dos valores próprios associados a  $\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}}$ , deve ser mínimo:

$$\text{tr}(\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i = \text{mín}; \quad (26)$$

o valor próprio máximo de  $\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}}$  deve ser mínimo:

$$\lambda_{\text{máx}} = \text{mín}; \quad (27)$$

o quociente entre os valores próprios máximo e mínimo, de  $\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}}$ , deve ser unitário:

$$\frac{\lambda_{\text{máx}}}{\lambda_{\text{mín}}} = 1. \quad (28)$$

#### 3.2 Critério de Confiabilidade

A teoria de confiabilidade conduz à decisão se um erro é detectável e que influência tem um erro não detectável nos parâmetros ajustados. Portanto, é parte de um conceito de avaliação da qualidade do resultado do ajustamento. BAARDA (1968) propôs o uso do teste global para detecção de erros grosseiros, e do teste *data snooping* para localização desses erros. Os erros que não são eliminados das observações ocasionam alterações nos parâmetros ajustados. Por isso, são necessárias medidas que indiquem quanto são confiáveis as observações. O conceito de confiabilidade introduzido por BAARDA (1968), subdivide-se em confiabilidade interna e externa. Neste trabalho, são aplicados o conceito de confiabilidade interna na localização de erros e o conceito de confiabilidade externa a qual quantifica a influência dos erros não localizados nas observações, sobre os parâmetros ajustados.

##### 3.2.1 Redundância parcial

A redundância do sistema ou graus de liberdade, denotado por *r*, pode afetar a qualidade da rede gravimétrica ajustada. Para FÖRSTNER (1979), a contribuição de cada observação  $l_i$  à redundância *r*, recebe o nome de redundância parcial  $r_i$ . Estas são obtidas da diagonal principal da matriz **R** expressa pela relação:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} (\Sigma \mathbf{V}) \mathbf{P}, \quad (29)$$

onde  $\hat{\sigma}_0^2$ ,  $\Sigma \mathbf{V}$  e **P** são respectivamente, a unidade de variância a posteriori, a matriz variância-covariância dos resíduos, e a matriz dos pesos.

As  $r_i$ , calculadas a partir de (29), refletem a consistência geométrica da rede, são benéficas ao controle das observações quanto ao controle de erros

existentes nas mesmas, e são números reais que pertencem ao intervalo  $[0;1]$  (LEIK, 1995). De acordo com KAVOURAS (1982, p. 23), tem-se dois casos extremos para o número de redundância  $r_i$ . O primeiro caso é o ideal, onde o número de redundância  $r_i = 1$ . Porém, isto acontece quando uma medida é feita de uma quantidade conhecida; por exemplo; uma distância medida entre dois pontos conhecidos. Neste caso serão revelados 100% de qualquer erro grosseiro no resíduo  $v_i$ . O segundo caso é o do número de redundância  $r_i = 0$ . Neste caso, o suposto erro grosseiro embutido na observação não afeta em nada os resíduos e então não pode ser descoberto e será transferido diretamente nos parâmetros desconhecidos calculados. Supõe-se duas observações,  $l_1$  e  $l_2$ , com redundâncias parciais  $r_1 = 0,20$  e  $r_2 = 0,65$ . Portanto, um erro grosseiro embutido na observação  $l_2$  tem uma probabilidade maior de ser localizado que um erro grosseiro embutido na  $l_1$ , simplesmente por que 65% dos erros grosseiros  $\nabla l_1$  é refletido no respectivo resíduo  $v_2$  e de contra partida, 20% dos erros grosseiros  $\nabla l_1$  é revelado no resíduo  $v_1$  referente a observação  $l_1$ .

Para KAVOURAS (1982), na análise de erros pós-ajustamento não é muito fácil à detecção e localização de erros através do exame dos resíduos, pois uma parte do erro contido em uma observação será refletida no correspondente resíduo e o restante poderá ser absorvido pelos parâmetros. Deseja-se que os valores de  $r_i$  sejam próximo de 1, pois quanto maior o valor  $r_i$  de uma determinada observação  $l_i$ , maior a probabilidade de ser localizado um possível erro grosseiro nesta observação utilizando o teste *data snooping*. Suponha uma observação afetada por erro, mas com número de redundância grande (próximo de um), o erro afetarà mais o correspondente resíduo, facilitando a sua detecção e localização através do exame do resíduo. Portanto, através dos valores de  $r_i$  pode-se ter melhor controle quanto a localização de possíveis erros nas observações. Isso nos leva a crer que somente a análise dos resíduos não é suficiente para análise da qualidade de uma rede gravimétrica.

Para KAVOURAS (1982, p.107), onde é requerida alta precisão, um número de redundância parcial menor que 0,35 não é recomendado.

Na tabela 2, estão os intervalos recomendados para orientação da decisão sobre o controle de observações mediante os valores de  $r_i$ .

TABELA 2 - CONTROLE DE OBSERVAÇÕES POR MEIO DE REDUNDÂNCIAS PARCIAIS.

Intervalo	Controlabilidade
$0 \leq r_i < 0,01$	Não
$0,01 \leq r_i < 0,1$	Ruim
$0,1 \leq r_i < 0,3$	Suficiente
$0,3 \leq r_i \leq 1$	Boa

### 3.2.1 Teste global

O teste global é aplicado para detecção de erros grosseiros nas observações. Para isso, calcula-se a estatística (GEMAEL, 1994):

$$\chi^2 = \frac{\mathbf{V}^t \mathbf{P} \mathbf{V}}{\sigma_0^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} r, \quad (30)$$

em que  $\mathbf{V}$  é o vetor dos resíduos,  $\mathbf{V}^t$  é o transposto de  $\mathbf{V}$ , e  $\sigma_0^2$  é a unidade de variância a priori. A estatística dada pela equação (30) segue distribuição qui-quadrado com  $r$  graus de liberdade. As variâncias de peso unitário  $\sigma_0^2$  e  $\hat{\sigma}_0^2$  são comparadas estatisticamente ao nível de significância  $\alpha$  através das hipóteses:

$$\begin{cases} \text{Hipótese nula (H}_0\text{): } \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 \\ \text{Hipótese alternativa (H}_1\text{): } \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2 \end{cases} \quad (31)$$

A rejeição da hipótese nula é indício de erros grosseiros nas observações, ou a matriz dos pesos está mal estimada, ou ainda o modelo matemático utilizado não é adequando.

### 3.2.3 Teste *data snooping*

O teste *data snooping* é usado frequentemente para analisar dados após ajustamento de uma rede geodésica. BAARDA (1968) propôs esse teste para localização de erros grosseiros examinando os resíduos obtidos no pós-ajustamento. Para observações não correlacionadas, o teste *data snooping* é avaliado pela estatística (KUANG, 1996):

$$n_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}}, \quad (32)$$

onde  $v_i$  e  $\sigma_{v_i}$  são respectivamente o resíduo e o desvio-padrão referente a  $i$ -ésima observação. Para o nível de significância  $\alpha_0$ , a estatística dada pela equação (32) é comparada com o valor limite  $k$ . A hipótese nula é rejeitada se:

$$|n_i| > k, \quad (33)$$

ou seja, é localizado um erro grosseiro na  $i$ -ésima observação.

### 3.2.4 Medida de confiabilidade externa

A confiabilidade externa trata do efeito de possíveis erros grosseiros, não detectados pelo teste global, e não localizados pelo teste *data snooping*, nos parâmetros ajustados.

Uma estimativa para um erro grosseiro na  $i$ -ésima observação é expressa por (LEIK, 1995; KUANG, 1996):

$$\nabla_i = -\frac{v_i}{r_i} \quad (34)$$

O efeito de  $\nabla_i$  no vetor solução dos parâmetros ajustados é dado por:

$$\nabla \mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{e}_i \nabla_i, \quad (35)$$

onde  $\mathbf{e}_i$  é a  $i$ -ésima coluna da matriz identidade de cuja dimensão  $n$ , é igual ao número de observações utilizadas no ajustamento.

#### 4. RESULTADOS OBTIDOS

Os ajustamentos foram efetuados conforme a descrição apresentada na seção 2. Nas análises de precisão e confiabilidade para as duas soluções, descritas a seguir, foram calculadas as redundâncias parciais e aplicado o teste global, o teste *data snooping* e o conceito de confiabilidade externa.

A solução com observações independentes, foi obtida com 6 ajustamentos consecutivos. Em todos, foram aplicados os critérios de precisão e confiabilidade, verificando assim a evolução na solução obtida. No primeiro ajustamento com observações independentes, o teste global detectou observações com erros grosseiros, e o teste *data snooping* localizou 3 observações com erro (uma observação referente à linha 15b e coletada com o gravímetro G372, e duas referentes à linha 20 e coletadas com os gravímetros G114 e G372) que foram eliminadas, e o ajustamento foi realizado novamente. O mesmo procedimento foi repetido, utilizando o teste global e o teste *data snooping*. Em cada um dos outros 4 ajustamentos consecutivos, o teste global detectou observações com erro grosseiro, e o teste *data snooping* localizou uma em cada ajustamento analisado. Essas quatro observações (respectivamente uma observação referente à linha 16 e coletada com o gravímetro G372, uma referente à linha 16 e coletada com o gravímetro G143, uma referente à linha 11 e coletada com o gravímetro G143 e uma referente à linha 15b e coletada com o gravímetro G143) afetadas por erros grosseiros foram eliminadas. Quando se efetuou o sexto ajustamento consecutivo da rede, o teste global não detectou mais observação com erro grosseiro, o que foi confirmado pelo teste *data snooping*, não localizando mais observações com erros grosseiros. A solução obtida no último ajustamento foi considerada isenta de observações com erros grosseiros. À medida que se avançava do primeiro para o sexto ajustamento, o valor da variância de peso unitário a posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$ , convergia para o valor de peso unitário a priori  $\sigma_0^2$ , o que é um indicativo de boa qualidade do ajustamento.

Na solução gerada para rede com o ajustamento utilizando observações médias, o teste global detectou erro grosseiro nas observações e o teste *data snooping* não as localizou. Portanto, em princípio, também se aceitou essa solução.

As análises seguintes são feitas sobre a última solução obtida do ajustamento efetuado da rede, com observações independentes, e médias, ambas consideradas depuradas de erros grosseiros. Na seqüência, a precisão dessas soluções obtidas, foi comparada.

A precisão obtida nessas soluções foi avaliada utilizando o critério exposto na subseção 3.1. Na tabela 3, estão os resultados obtidos sobre a precisão das soluções envolvidas na análise. Os valores mostrados na tabela 3 aparecem com essa magnitude devido à unidade em que os dados foram processados. A unidade dos valores próprios  $\lambda_i$  é dada em mGal<sup>2</sup>. Portanto, uma análise das equações (25) a (28) esclarece a magnitude dos valores apresentados na tabela 3.

Comparando os resultados mostrados na tabela 3, verifica-se que a precisão da solução obtida através do ajustamento da rede com observações independentes é superior. Mas a diferença não é tão relevante. Portanto, as duas soluções apresentam níveis de precisão próximos um do outro.

TABELA 3 - APLICAÇÃO DO CRITÉRIO DE PRECISÃO.

Crítérios	Solução obtida com observações médias	Solução obtida com observações independentes
$\det(\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}})$	$1,3 \cdot 10^{-66}$	$1,1 \cdot 10^{-71}$
$\text{tr}(\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{a}})$	0,00644	0,00482
$\lambda_{\text{máx}}$	0,00313	0,00173
$\frac{\lambda_{\text{máx}}}{\lambda_{\text{mín}}}$	127,33	5805,62

Convém lembrar que a solução gerada com observações independentes foi obtida após análise de 6 ajustamentos consecutivos e com eliminação de 7 observações infectadas com erro grosseiro até se chegar na solução analisada.

A solução gerada com observações médias tem a influência do total de 96 observações. Neste caso, o teste global detectou erro e o teste *data snooping* não localizou as observações. Portanto, dúvidas quanto à qualidade desta solução apareceram, mas até este momento nada se pôde afirmar. Foi assim que surgiu a necessidade de um critério adicional para avaliar as soluções. Qual a confiabilidade das duas soluções analisadas?

Uma parte desta pergunta pode ser respondida com a análise dos resultados obtidos do teste global, e do teste *data snooping*, aplicados em ambas as soluções. Esses resultados podem ser explicados pela análise das redundâncias parciais.

Como parte da análise de confiabilidade, na tabela 4 é apresentada a controlabilidade quanto a erros grosseiros das observações em relação ao número da redundância parcial correspondente a cada uma das observações utilizadas nos dois ajustamentos, e também o número de observações pertencentes a cada um dos intervalos recomendados.

Como se deseja obter número de redundância mais próximo possível de 1, quanto maior o valor da redundância parcial de uma determinada observação, maior a probabilidade de se localizar erro nesta observação, se houver.

TABELA 4 - NÚMERO DE OBSERVAÇÕES COM SUAS RESPECTIVAS CONTROLABILIDADE POR MEIO DE REDUNDÂNCIAS PARCIAIS.

Intervalo	Número de observações médias	Número de observações independentes
$0 \leq r_i < 0,01$	0	1
$0,01 \leq r_i < 0,1$	5	2
$0,1 \leq r_i < 0,3$	11	2
$0,3 \leq r_i \leq 1$	7	84

Pelos valores apresentados na tabela 4, nota-se uma condição mais favorável à solução obtida do ajustamento efetuado com observações independentes. Neste caso, aproximadamente 94% das observações apresentam boa controlabilidade quanto à inspeção de possíveis observações contendo erros grosseiros.

Na solução gerada para a rede com observações médias, apenas 30% das observações apresentam controlabilidade boa. Ainda, neste caso, os valores das redundâncias parciais classificadas como boa, são baixos, pois a redundância do sistema ou grau de liberdade é igual a 6, enquanto que para a outra solução a redundância do sistema igual a 72. Estes números de redundância do sistema conduzem respectivamente a 0,26 e 0,81 como valores médios para redundância parcial.

Essas diferenças entre os números de redundância do sistema e redundâncias parciais, refletem as características que cada solução apresenta para localizar observações com erros grosseiros. A solução gerada com observações independentes é mais consistente quanto à localização de possíveis observações contendo erros grosseiros. Isto explica porque na solução obtida com observações médias, não foi possível localizar observações contendo erro através do teste *data snooping*.

A tabela 5 apresenta o resultado obtido com aplicação do conceito de confiabilidade externa. Para as duas soluções obtidas para a rede em discussão, utilizando a equação (34), estimou-se  $\nabla_i$  referente a cada uma das observações e essas estimativas estão ilustradas nas figuras 2 e 3.

Analisando os valores ilustrados nas figuras 2 e 3 e considerando-os em valor absoluto, para a solução obtida com observações médias tem-se uma estimativa

média de 0,032 miligal, enquanto para a solução obtida com observações independentes tem estimativa média de 0,038 miligal. Em seguida, utilizando a equação (35), calculou-se o efeito  $\nabla x$  causado pela estimativa de  $\nabla_i$ .

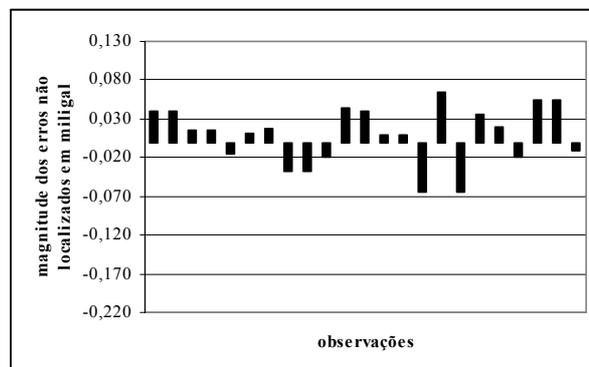


Fig. 2 – Estimativa dos erros não localizados para a solução obtida com observações médias.

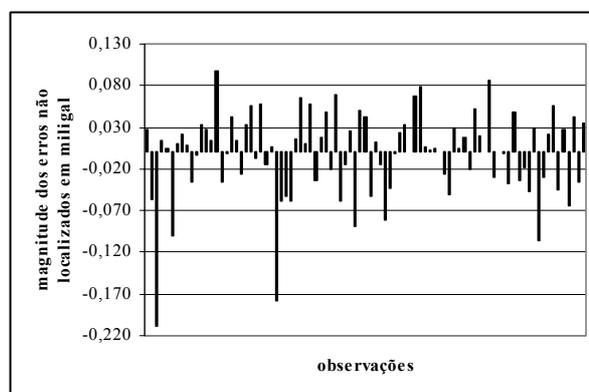


Fig. 3 – Estimativa dos erros não localizados para a solução obtida com observações independentes.

Observando a tabela 5, na solução obtida com observações médias, a estação gravimétrica de São Mateus do Sul obteve precisão de 17  $\mu$  Gal; porém, com uma influência de -68  $\mu$  Gal. Isto significa que, apesar do valor da gravidade estimado para esta estação apresentar uma precisão  $\sigma = 14 \mu$  Gal, o valor estimado da gravidade pode estar apresentando um erro de  $\nabla x = -68 \mu$  Gal. Deseja-se que os valores de  $\nabla x$  sejam, em valor absoluto, o mais próximo de zero possível para os respectivos parâmetros.

TABELA 5 - INFLUÊNCIA DOS ERROS ESTIMADOS SOBRE OS PARÂMETROS COM AS RESPECTIVAS PRECISÕES OBTIDAS.

Estações	Soluções comparadas			
	Observações médias		Observações independentes	
	$\sigma$ (precisão) $\mu\text{Gal}$	$\nabla x$ $\mu\text{Gal}$	$\sigma$ (precisão) $\mu\text{Gal}$	$\nabla x$ $\mu\text{Gal}$
São Mateus do Sul	17	<b>-68</b>	9	6
Bituruna	16	<b>-38</b>	12	5
Clevelândia	22	<b>-38</b>	16	3
Francisco Beltrão	23	<b>-28</b>	17	-1
Toledo	23	<b>-43</b>	18	-10
Laranjeiras do Sul	20	<b>-41</b>	17	-4
Guarapuava	13	<b>-35</b>	6	-1
Ponta Grossa	9	<b>-26</b>	4	-1
Jaguariaíva	17	1	18	10
Joaquim Távora	21	<b>-41</b>	22	14
Ortigueira	15	<b>-28</b>	18	7
Londrina	16	<b>-34</b>	18	<b>27</b>
Maringá	19	<b>-29</b>	18	-2
Iretama	20	<b>-27</b>	18	8
Paranavaí	23	17	21	<b>-28</b>
Goio-erê	24	<b>-40</b>	21	5
Guaíra	24	<b>-41</b>	21	<b>-28</b>

Verifica-se através dos resultados apresentados na tabela 5, que a solução obtida com observações independentes apresenta precisão satisfatória e com uma melhor situação em confiabilidade. Portanto, as estimativas dos erros não localizados influenciam bem menos os parâmetros para a solução obtida com observações independentes. Apenas em 3 estações gravimétricas (Londrina, Paranavaí e Guaíra) tem-se  $|\nabla x|$  mais elevado relativamente ao demais.

A mesma confiabilidade não se obtém para a solução gerada com observações médias. Verifica-se na tabela 5, que apenas as estações de Jaguariaíva e Paranavaí apresentam uma situação satisfatória, ou seja,  $|\nabla x| < \sigma$ .

## 5. CONCLUSÃO

O processamento e ajustamento dos dados na forma proposta, apresentam aspectos importantes. Nas duas soluções propostas para a rede gravimétrica, as observações utilizadas no início do ajustamento são as mesmas, mudando apenas a metodologia de entrada das observações no ajustamento. É claro que a solução, obtida com observações independentes e considerada isenta de erro foi obtida com menos observações, mas isso ocorreu devido ao diferencial que a estratégia aplicada no ajustamento proporcionou.

A teoria e análises apresentadas neste trabalho, mostram que não se deve avaliar a qualidade do ajustamento de uma rede gravimétrica apenas pela precisão obtida para as estações gravimétricas implantadas. Com os resultados apresentados na tabela 6 tem-se que a precisão média para solução obtida com observações médias é igual a  $19 \mu\text{Gal}$ , enquanto para a outra solução tem-se  $16 \mu\text{Gal}$  de média. Portanto têm-se precisões médias muito próximas uma da outra. Porém, na análise da confiabilidade, seja na busca por observações afetadas por erro ou na influência das estimativas de erros não localizados sofrida pelos parâmetros ajustados, tem-se uma situação mais favorável para a solução em que se utilizaram observações independentes. Além do critério de precisão, o critério de confiabilidade deve ser aplicado. Foi mostrado que solução precisa nem sempre é confiável. Uma análise de detecção e localização de possíveis erros grosseiros nas observações deve ser realizada. A precisão obtida para as estações implantadas deve ser comparada com a medida de confiabilidade externa; para se obter uma solução precisa e confiável.

A análise dos resíduos isoladamente não foi contemplada neste trabalho, pois pequeno resíduo não é sinônimo de qualidade. Necessita-se sim de uma análise em conjunto do resíduo com a redundância parcial. Uma mudança no conceito de entrada das observações, para observações independentes, faz com que a rede reaja muito melhor a detecção e localização de observações afetadas por erro.

Neste trabalho, foi apresentada uma solução para a rede gravimétrica obtida com o ajustamento de observações médias, na qual se obteve uma solução com precisão satisfatória, mas a confiabilidade no resultado gerou dúvidas. Portanto, é mais confiável ajustar uma rede gravimétrica com observações independentes a considerar observações médias.

Os resultados obtidos mostram que é possível mensurar, através da medida de confiabilidade, a confiança que se pode atribuir à precisão obtida para as estações gravimétricas ajustadas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAARDA, W. A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks, **New Series**, vol.2, n° 5, Delft, 1998.

CROSSILA, F. and MARCHESI, C. Geodetic network optimization for the detection of crustal movements using a mekometer. **Bolletino di Geodesia e Science Affini, Firenze**, vol. 42, n° 3, pp 301-315, 1983.

DUPRAZ, H. and NIEMEIER, W. Beurteilungskriterien für Geodätischer Netze. In: Beiträ zum II. **Internationalen Symposium, über Deformationsmessungen mit Geodätischen Methoden**. Herausgegeben von Ludger Hallermann, Bonn. Stuttgart: Wittwer, S., pp 386-400, 1981.

FÖRSTNER, W. Das Programm TRINA zur Ausgleichung und Gütebeurteilung geodätischer Lagenetzwerke. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, vol. 104, n° 2, pp 61-72, 1979.

FREITAS, S. R. C.; SANTOS JUNIOR, G.; FAGGION P. L.; GEMAEL C.; SILVA JR, J. S.; SIMÕES, K. Concepção dos Levantamentos Gravimétricos para o Estabelecimento de Rede Gravimétrica de Alta Precisão no Estado do Paraná. **Série em Ciências Geodésicas**, Curitiba, vol.2, pp 41 – 56, 2002.

GEMAEL, C.; LEITE, O.H.S.; ROSIER, F. A.; TORGE, W.; RÖDER, R. H.; SCHNÜLL, M. Large-scale absolute gravity control in Brazil. In: **IAG Symposium**. n°103, Edimburg, Scotland, pp 49-55, Springer, New York, 1990.

GEMAEL, C. **Introdução ao Ajustamento de Observações: aplicações geodésicas**. 1ª ed. Editora da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 1994.

KAVOURAS M., (1982). **On the Detection of Outliers and the Determination of Reliability in Geodetic Networks**. Canadá: Fredericton. University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering. Technical Report, n° 87.

KUANG, S. **Geodetic Network Analysis and Optimal Design: concepts and applications**. Chelsea: Ann Arbor Press, 1996.

LEICK, A. **GPS Satellite Surveying**. John Wiley & Sons, Inc: New York, 1995.

WELSH, W.; HEUNECCKE, O.; KUHLMANN, H. **Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen**. Heidelberg: Wichmann. (Handbuch Ingenieurgeodäsie), 2000.

Recebido em 30 de setembro de 2004 – Aceito para publicação em 30 de maio de 2005.