

# IDENTIFICACAO DE DISTORÇÕES EM REDES ALTIMÉTRICAS USANDO GEÓIDE E GPS

*Identification of distortions in altimetric networks using geoid and GPS*

**Deborah Valandro de Souza**  
**Nelsi Côgo de Sá**

**Universidade de São Paulo - USP**  
**IAG/USP - Departamento de Geofísica**  
Rua do Matão, 1226, São Paulo-SP. CEP 05508 - 900  
deborah@gmail.com  
nelsi@iag.usp.br

## RESUMO

Atualmente, o posicionamento por GPS, combinado com um modelo geoidal de alta precisão, permite detectar distorções de redes altimétricas. Assim, foram investigadas as distorções da Rede Altimétrica Fundamental no Sul/Sudeste do Brasil (RGSB), comparando as altitudes determinadas por GPS/nivelamento, com altitudes de referência. Pela metodologia usada, inicialmente foram avaliados os dados disponíveis por meio da análise estatística, para detectar erros grosseiros. Posteriormente, o modelo geoidal gravimétrico foi ajustado ao do sistema altimétrico pela modelagem da componente sistemática, por meio dos modelos paramétricos simplificados e gerais. O cálculo da altitude ortométrica no modo relativo, a partir das estações da RGSB depuradas de erros grosseiros, e o modelo geoidal gravimétrico, possibilitou a identificação de distorções locais e regionais. Com isso, foi realizada a análise estatística da componente sistemática do geóide, em um conjunto de 236 estações da RGSB, e constatou-se a existência de uma média não nula, indicando a incompatibilidade entre  $N_{GPS}$  e  $N_g$  na região estudada, geralmente relacionada a erros grosseiros e sistemáticos na altitude ortométrica das RNs, os quais também causam distorções na rede. Isso foi corrigido com a identificação e remoção de 20 RNs contendo erros grosseiros. O geóide gravimétrico foi compatibilizado ao do sistema altimétrico local a partir do modelo matemático de correção com 7 parâmetros, para identificar outras RNs contendo distorções. Com isso, foram identificadas 4 RNs com distorções, além daquelas com erros grosseiros, que também caracterizam distorções. A utilização adequada dessa metodologia requer uma rede GPS de referência densa, constituída de estações com coordenadas geodésicas e altitudes ortométricas, além de um geóide gravimétrico compatível com o do sistema altimétrico de referência.

**Palavras chaves:** distorções de redes altimétricas; posicionamento por GPS; sistema altimétrico; geóide.

## ABSTRACT

Nowadays, the positioning by GPS, combined with a high precision geoidal model, allows detecting distortion in altimetric networks. So, the distortions of the *Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil* (RGSB) were investigated by comparing orthometric heights determined by GPS/levelling with reference heights. In the used methodology, the available data were initially evaluated by statistical analysis in order to detect and eliminate outliers. Afterwards, the gravimetric geoid model was adjusted to the geoid of the altimetric system by modeling the systematic component through a simplified and a general mathematical models. The computation of orthometric heights in relative mode at RGSB station free of outliers, and the adjusted gravimetric geoid model, have allowed the identification of local and regional distortions. The statistical analysis of geoid systematic component was accomplished on a set of 236 RGSB stations, and the a non zero mean was obtained. It indicated the incompatibility between  $N_{GPS}$  and  $N_g$  in the studied region, mostly associated to outliers and systematic errors in the benchmarks, and having as consequence the distortion in the network. This was ascertained by identification and removal of 20 benchmark data with outliers. The gravimetric geoid was adjusted to the local altimetric system by a 7 parameters mathematical model in order to apply the methodology as well as to identify distortions in altimetric network. So, distortions in 4 benchmarks were identified, besides the 20 outliers initially detected, which also characterize distortions. The adequate use of this methodology requires a dense GPS network over RNs, which supplies stations with geodetic coordinates and orthometric heights, and also a gravimetric geoid compatible to that one of reference altimetric system.

**Keywords:** distortions of altimetric networks; positioning by GPS; altimetric system; geoid.

## 1. INTRODUÇÃO

A Rede Altimétrica Fundamental do Brasil (RAFB), implantada pela Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), é oficialmente adotada no país. Essa rede é constituída de pontos, definidos fisicamente por retículos gravados em chapas de bronze, incrustadas sobre marcos ou estruturas de concreto, construídos na superfície física da Terra, denominados Referências de Nível (RNs), cujas altitudes ortométricas são referidas ao Nível Médio do Mar (NMM), materializado pelo marégrafo de Imbituba (SC). É formada por linhas de nivelamento geométrico ligadas entre si, formando circuitos que se estendem pelo país. Seu objetivo é apoiar o mapeamento básico e as grandes obras de engenharia como barragens, saneamento básico, distribuição de água, rodovias e telecomunicações (ALENCAR, 1968).

Apesar da alta precisão dos desníveis obtidos pelo nivelamento geométrico, a implantação de uma rede altimétrica que se estenda por todas as regiões do país, a partir de um *Datum* vertical, e possibilite uma distribuição geográfica adequada é inviável (SOUZA & SÁ, 2003), em países com dimensões continentais como o Brasil. Além disso, as redes de nivelamento estão sujeitas aos erros grosseiros, sistemáticos e aleatórios, que devem ser removidos ou minimizados por técnicas adequadas. As principais fontes de erros observacionais são: refração atmosférica, imperfeições na colimação de nível e verticalidade de miras, erro de graduação de miras e marés terrestres. As redes altimétricas, também envolvem uma grande quantidade de observações realizadas em condições heterogêneas, tais como variações na topografia, nos instrumentos, e nos operadores. Esses erros geralmente são minimizados através do ajustamento pelos mínimos quadrados, que pode introduzir distorções nas redes (BOMFORD, 1983).

Esses problemas tornam necessária a avaliação de redes altimétricas nacionais, para assegurar aos usuários das altitudes de referência, a acurácia das redes com esse padrão.

Com o advento das técnicas espaciais de posicionamento, especialmente o GPS, combinado com um modelo geoidal adequado, essa avaliação tornou-se possível, com benefícios de simplicidade operacional, rapidez e baixo custo. A metodologia consiste na comparação de altitudes ortométricas fornecidas pela rede de nivelamento, com as obtidas a partir das coordenadas geodésicas obtidas por GPS, combinadas com alturas geoidais gravimétricas. Essa comparação é realizada na forma absoluta, isto é, são comparadas as diferenças de altitudes ortométricas ( $\Delta H$ ) em um conjunto de RNs, constituindo a amostra estatística usada para avaliação da rede altimétrica.

Porém, a utilização desta metodologia depende de dados que possibilitem o seu uso de maneira eficiente e precisa que são: uma rede GPS de referência contendo estações com coordenadas geodésicas e altitudes ortométricas, e um geóide gravimétrico cuja

precisão seja compatível com a do nivelamento. A implantação da Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil (RGSB), nos Estados de São Paulo, Paraná e Santa Catarina, e o aprimoramento do geóide gravimétrico do Estado de São Paulo, são os requisitos básicos para a avaliação da RAFB na região (SÁ, 2004; SÁ *et al.*, 2001).

Assim, este trabalho tem os seguintes objetivos: a) avaliar distorções da RAFB na região de abrangência da RGSB, comparando as altitudes ortométricas fornecidas pela rede altimétrica com as obtidas pela combinação do GPS com o geóide gravimétrico; e b) aprimorar a transformação para tornar o geóide gravimétrico compatível com o do Sistema Altimétrico Brasileiro (SGB).

## 2 DESCRIÇÃO DOS DADOS

Os dados envolvidos na avaliação da rede altimétrica proposta neste trabalho são agrupados em três classes: 1) RNs na região Sul e Sudeste do Brasil; 2) redes GPS de referência; e 3) geóide gravimétrico da região. Os dados e sua distribuição geográfica são descritos a seguir.

### 2.1 Referências de nível

As RNs pertencentes à RAFB localizadas na região Sul/Sudeste do Brasil, resultaram de levantamentos de apoio geodésico realizados pelo IBGE, desde a década de 40, e pelo Instituto Geográfico e Geológico do Estado de São Paulo (IGGSP), entre 1945 e 1961 (IGG, 1962). Essas RNs foram implantadas ao longo das principais rodovias de modo a proporcionar uma distribuição geográfica adequada para mapeamento e trabalhos de Topografia, necessários na urbanização das cidades e na pavimentação de estradas. A Figura 1 ilustra a distribuição geográfica das RNs implantadas pelo IBGE e IGGSP na região Sul/Sudeste do Brasil.

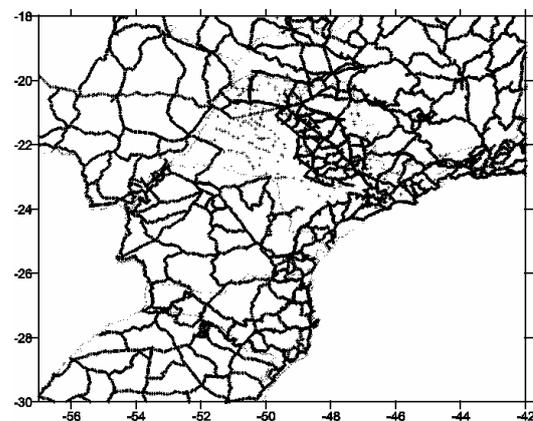


Fig. 1 – Rede altimétrica na região Sul/Sudeste do Brasil

As altitudes foram calculadas a partir de desníveis obtidos através do nivelamento geométrico clássico, realizado com níveis geodésicos de alta

precisão e miras de invar, com tolerâncias de  $\pm 4mm\sqrt{K}$ , até o ano de 1983; e  $\pm 3mm\sqrt{K}$ , daí em diante. Para o ajustamento dos desníveis, não foram usadas observações gravimétricas, foi realizada apenas a correção do não-parallelismo das superfícies equipotenciais (LUZ *et al.*, 2004).

## 2.2 Redes GPS de referência

Neste trabalho, foram usados os dados de duas redes GPS de referência: a Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC) e a Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil (RGSB).

### 2.2.1 Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo

A RBMC é a rede de referência ativa do Brasil, que visa apoiar o posicionamento geodésico, facilitando emprego do sistema GPS pelo usuário e, ao mesmo tempo, garantindo boa qualidade dos resultados. A RBMC é constituída atualmente por 20 estações operacionais, distribuídas ao longo do território brasileiro (IBGE, 2004).

As estações utilizadas no processamento de dados da RGSB foram: Brasília, Curitiba, Porto Alegre, Presidente Prudente, Rio de Janeiro e Viçosa. Os critérios utilizados na seleção destas estações de referência basearam-se na distribuição geográfica, disponibilidade dos dados e distância em relação às da RGSB.

### 2.2.2 Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil

A RGSB é uma rede GPS passiva, constituída de aproximadamente 240 estações distribuídas nos Estados de São Paulo, Paraná, Santa Catarina, e regiões adjacentes (Figura 2). As estações dessa rede GPS foram implantadas sobre RNs pertencentes à RAFB, e possuem coordenadas geodésicas ( $\varphi, \lambda, h$ ) e altitude ortométrica ( $H$ ). A distância máxima entre as estações que constituem a RGSB é da ordem de 60 km, o que implica em bases máximas de 30 km para o posicionamento relativo por GPS, em qualquer ponto de abrangência da rede (SÁ *et al.*, 2001).

Os objetivos principais da RGSB são o aprimoramento do geóide gravimétrico e apoio básico local em termos de coordenadas geodésicas, altitude ortométrica e altura geoidal para uso local do GPS. Trabalhos recentes sobre aprimoramento do geóide do Estado de São Paulo (SÁ *et al.*, 2002; SOUZA, 2002), mostram discrepâncias entre as alturas geoidais fornecidas pelo geóide gravimétrico ( $N_g$ ) e as obtidas por GPS/Nivelamento ( $N_{GPS}$ ), que provavelmente são causadas por distorções na RAFB. A RGSB permite a avaliação das distorções da RAFB nos Estados de São Paulo, Paraná e Santa Catarina.

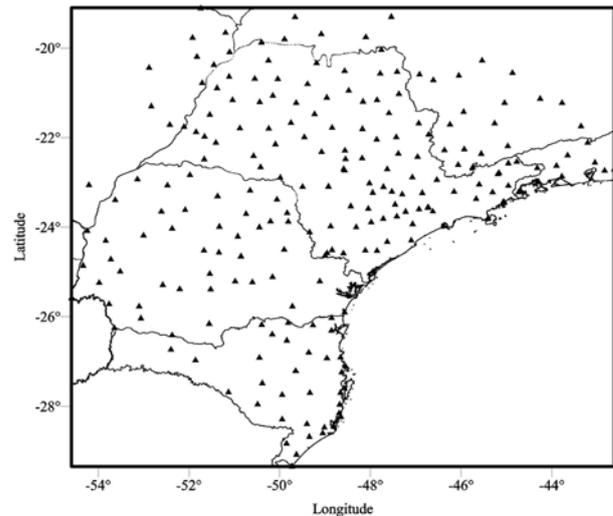


Figura 2 – Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil

### Determinação da altura geoidal através do GPS

O posicionamento por GPS fornece a altitude geométrica ( $h$ ), que é uma grandeza geométrica; o nivelamento geométrico convencional proporciona a altitude ortométrica ( $H$ ). Logo, a altura geoidal pode ser determinada facilmente pela simples diferença entre as altitudes geométrica e ortométrica, às vezes denominada altura geoidal GPS:

$$N \cong h - H \quad (1)$$

A propagação das variâncias da altitude geométrica ( $\sigma_h^2$ ) e da altitude ortométrica ( $\sigma_H^2$ ) fornece diretamente o erro padrão ( $\sigma_{N_{GPS}}$ ) da altura geoidal calculada

$$\sigma_{N_{GPS}} = \pm \sqrt{\sigma_h^2 + \sigma_H^2} \quad (2)$$

### 2.3 Geóide gravimétrico

O geóide gravimétrico existente na região de estudo, foi determinado a partir de dados do modelo geopotencial EGM96, dados gravimétricos terrestres e oceânicos, e dados topográficos digitais (SÁ, 2004), através da Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ).

## 3 METODOLOGIA

Nesta seção, são apresentados os principais aspectos metodológicos envolvidos na avaliação das distorções da RAFB usando a RGSB e o geóide gravimétrico. A metodologia usada envolveu as seguintes etapas: 1) remoção de erros grosseiros, 2) compatibilização de geóides; e 3) avaliação de distorções.

### 3.1 Detecção de distorções

A combinação da altitude geométrica ( $h$ ), determinada por GPS, com a altitude ortométrica ( $H$ ), obtida no nivelamento geométrico, e a altura geoidal gravimétrica ( $N_g$ ), fornecida por um modelo geoidal gravimétrico, tem sido a chave de várias aplicações na Geodésia. Embora, esses três tipos de informações sejam diferentes em relação à superfície de referência, aos métodos observacionais e à acurácia, elas satisfazem a relação geométrica (KOTSAKIS & SIDERIS, 1999)

$$(h - H) - N_g = N_{GPS} - N_g = 0 \quad (3)$$

onde  $N_{GPS}$  é a altura geoidal obtida através do posicionamento GPS em pontos com altitudes ortométricas conhecidas, e  $N_g$  é a altura geoidal obtida a partir do geóide gravimétrico.

Porém, devido a ruídos aleatórios nos valores de  $h$ ,  $H$  e  $N$ , inconsistências nos *Data*, distorções sistemáticas, erros grosseiros, efeitos geodinâmicos, entre outros, a expressão (3) não é exatamente satisfeita, e gera o erro de fechamento que é também conhecido como componente sistemática do geóide, com a forma:

$$\Delta N = N_{GPS} - N_g \quad (4)$$

que pode caracterizar distorções na rede altimétrica. Portanto, essa componente sistemática e os resíduos a ela associados, constituem a chave para a avaliação de distorções da rede altimétrica em estudo.

Antes de iniciar a busca de distorções da rede altimétrica, é necessário avaliar os dados envolvidos. Assim, esta seção foi dividida em duas partes: a primeira trata da avaliação dos dados envolvidos, e a segunda apresenta a estratégia utilizada na busca de distorções da rede altimétrica.

#### Remoção de erros grosseiros

A avaliação dos dados envolve duas fases: a) estimativas, com as quais os dados são associados a intervalos de confiança, b) testes de hipóteses, com os quais os resultados são apresentados como valores de probabilidade por meio de testes estatísticos.

##### a) Amostragem

As diferenças calculadas por (4), a partir de  $N_{GPS}$  e  $N_g$ , nas estações da RGSB, constituem o conjunto amostral

$$\Delta N = \{\Delta N_1, \Delta N_2, \dots, \Delta N_n\} \quad (5)$$

ao qual se associa o conjunto dos erros padrões correspondentes:

$$\sigma_{\Delta N} = \{\sigma_{\Delta N_1}, \sigma_{\Delta N_2}, \dots, \sigma_{\Delta N_n}\} \quad (6)$$

A função densidade de probabilidade que se postula para a amostra é a normal  $N(\mu_{\Delta N}, \sigma_{\Delta N}^2)$ , sendo  $\mu_{\Delta N}$  a média e  $\sigma_{\Delta N}^2$  a variância da amostra. Os parâmetros amostrais são calculados para testar a validade estatística do postulado (VANICEK & KRAKIWSKY, 1986).

##### b) Teste para rejeição de resíduos anômalos

Os testes estatísticos permitem verificar se:

- a função densidade de probabilidade postulada para a amostra é adequada,
- os parâmetros populacionais estimados são confiáveis, e
- os valores obtidos são consistentes com os conhecidos a priori

Portanto, a análise estatística dos resíduos (SÁ, 1988) permite testar se a componente sistemática é estatisticamente significativa. O aparecimento de resíduos anômalos, isto é, muito discrepantes em relação aos demais, pode indicar a existência de erros grosseiros na altura geoidal, obtida pela combinação do GPS com o nivelamento ótico ( $N_{GPS}$ ) e, conseqüentemente, na altitude ortométrica dessas estações.

Para identificar e excluir eventuais erros grosseiros nas RNs, foi aplicado o teste  $t$  (*Student*), que examina os elementos amostrais para identificar aqueles que são estatisticamente incompatíveis com os demais. O teste supõe normalidade e independência das observações, isto é, os valores são concentrados simetricamente em torno da média (WETHERILL, 1967). Neste caso, as hipóteses nula e alternativa são:

$$\begin{cases} H_0 : \Delta N_i \in N\left\{\mu_{\Delta N}, \sigma_{\Delta N}^2\right\} \\ H_1 : \Delta N_i \notin N\left\{\mu_{\Delta N}, \sigma_{\Delta N}^2\right\} \end{cases} \quad (7)$$

Para testar a hipótese nula, calcula-se a estatística

$$t = \frac{\Delta N_i - \overline{\Delta N}}{\sigma_{\Delta N} / \sqrt{n}} \quad (8)$$

ao nível de significância  $\alpha$ . O intervalo de confiança é expresso por

$$\overline{\Delta N} - \frac{\sigma_{\Delta N}}{\sqrt{n}} t\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \Delta N_i <$$

$$\leq \overline{\Delta N} - \frac{\sigma_{\Delta N}}{\sqrt{n}} t \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (9)$$

onde  $\Delta N_i$  é a componente sistemática do geóide na RN analisada.

Se a estatística  $t$  estiver contida no intervalo, aceita-se a hipótese nula, que significa que a RN não tem erro grosseiro.

### 3.2 Modelagem da componente sistemática

Para modelar a componente sistemática e adicioná-la ao geóide gravimétrico, tornando-o compatível com o obtido por GPS, são usados modelos matemáticos do tipo (VERGOS & SIDERIS, 2002; MAINVILLE *et al.*, 1997):

$$h_i - H_i - N_i = a_i^T x + v \quad (10)$$

onde  $x$  é o vetor ( $n \times 1$ ) dos parâmetros a serem determinados,  $a_i$  é o vetor ( $n \times 1$ ) de coeficientes conhecidos, e  $v$  é o vetor dos resíduos. O termo paramétrico ( $a_i^T x$ ), descreve inconsistências entre os *Data*, erros das coordenadas das RNs e outros efeitos sistemático existentes nos dados, que nada mais é que o modelo funcional.

#### Tipos de modelos funcionais

Em princípio, a seleção do modelo é arbitrária, a menos que algum significado físico possa ser atribuído às diferenças entre  $N_{GPS}$  e  $N_g$  (FOTOPOULOS, 2003)

$$a_i^T x = N_{GPS} - N_g \quad (11)$$

No passado, eram usados modelos lineares simples que, em vários casos, satisfaziam as exigências de precisão. Porém, com a precisão realizável do GPS e a determinação de alturas de geoidais mais precisas, o uso de um modelo simples pode não ser suficiente.

Em geral, a aproximação mais comum para a expressão (11) é empregar uma tendência paramétrica com um conjunto finito de parâmetros a determinar, representados em sua forma linear:

$$p = b_1 f_1 + b_2 f_2 + \dots + b_q f_q \quad (12)$$

onde  $b_1, b_2, \dots, b_q$  são coeficientes a serem determinados através do MMQ, e  $f_1, f_2, \dots, f_q$  são funções bases conhecidas, que podem variar. Uma possibilidade é a aproximação polinomial da forma:

$$a_i^T x = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (\varphi_i - \bar{\varphi})^n (\lambda_i - \bar{\lambda})^m x_q \quad (13)$$

onde  $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$  são as latitudes e longitudes médias dos pontos levantados, respectivamente, e  $x_q$  contém os  $q$  parâmetros desconhecidos.  $M$  e  $N$  são os números de variáveis independentes no modelo. O número  $q$  varia até o valor máximo de  $q = (N + 1) \cdot (M + 1)$ . Aplicações deste modelo podem ser encontradas em SANTOS (2005), SOUZA (2002), POUTANEN (1999) E ZHONG (1997).

Outros modelos muito utilizados são baseados na transformação de similaridade, como o de 4 parâmetros, discutido em HEISKANEN E MORITZ (1967):

$$a_i^T x = \cos \varphi_i \cos \lambda_i dX + \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i dY + \operatorname{sen} \lambda_i dZ + da \quad (14)$$

onde  $dX, dY, dZ$  são translações nos eixos X, Y e Z, respectivamente, e  $da$  é a diferença do semi-eixo maior entre os elipsóides envolvidos.

Uma versão mais geral do modelo anterior é obtida com a inclusão da mudança de achatamento:

$$a_i^T x = \cos \varphi_i \cos \lambda_i dX + \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i dY + \operatorname{sen} \lambda_i dZ + da + a \operatorname{sen}^2 \varphi_i df \quad (15)$$

sendo  $a$  o semi-eixo maior do elipsóide de referência, e  $df$  a diferença do achatamento entre os sistemas.

A transformação de similaridade mais geral, envolvendo 8 parâmetros, foi desenvolvida e testada no Canadá e Malásia (KOTSAKIS *et al.*, 2001):

$$\begin{aligned} a_i^T x = & \cos \varphi_i \cos \lambda_i dX + \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i dY + \\ & + \operatorname{sen} \lambda_i dZ + \frac{\operatorname{sen} \varphi_i \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i}{W_i} e^2 a d\omega_x + \\ & + \frac{\operatorname{sen} \varphi_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i}{W_i} e^2 a d\omega_y + \\ & + (aW_i + h_i) ds + \frac{1 - f^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i}{W_i} da + \\ & + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_i}{W_i} \sqrt{1 - e^2} df \end{aligned} \quad (16)$$

com:

$$W_i = \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i} \quad (17)$$

onde  $e^2$  é a primeira excentricidade,  $f$  é o achatamento do elipsóide de referência,  $d\omega_x$  e  $d\omega_y$  representam o não paralelismo nos eixos  $X$  e  $Y$  dos sistemas de referência adotados,  $h_i$  é a altitude geométrica do ponto determinado, e  $ds$  é um fator de escala.

Há outros modelos que são formas particulares de (15), nos quais se excluem parâmetros, conforme o interesse, como o que segue o (KOTSAKIS *et al.*, 2001)

$$\begin{aligned} a_i^T x = & \cos \varphi_i \cos \lambda_i dX + \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i dY + \\ & + \operatorname{sen} \lambda_i dZ + \frac{\operatorname{sen} \varphi_i \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i}{W_i} e^2 a d\omega_x + \\ & + \frac{\operatorname{sen} \varphi_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i}{W_i} e^2 a d\omega_y + \\ & + \frac{1-f^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i}{W_i} da + \\ & + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_i}{W_i} \sqrt{1-e^2} df \end{aligned} \quad (18)$$

Para compatibilizar o geóide gravimétrico com o materializado pelo marégrafo no *Datum* altimétrico, as diferenças de alturas geoidais nas estações da RGSB foram representadas com os modelos matemáticos descritos, e adicionadas ao geóide gravimétrico.

### 3.3 Altimetria por GPS no modo relativo

A altimetria por GPS no modo relativo (Figura 3) consiste em determinar a altitude ortométrica de um ponto de interesse ( $i$ ) em relação a pelo menos uma estação de referência ( $j$ ), de coordenadas geodésicas  $(\varphi_j, \lambda_j, h_j)$  e altitude ortométrica ( $H_j$ ) conhecidas. A partir das diferenças de altitudes geométricas  $(\Delta h_{ij} = h_i - h_j)$ , determinadas com o posicionamento relativo por GPS e de alturas geoidais  $(\Delta N_{ij} = N_i - N_j)$ , obtidas do modelo geoidal, tem-se

$$H_i = H_j + \Delta H_{ij} = H_j + \Delta h_{ij} - \Delta N_{ij} \quad (19)$$

com o erro padrão expresso pelas variâncias

$$\sigma_{H_i} = \pm \sqrt{\sigma_{H_j}^2 + \sigma_{\Delta h_{ij}}^2 + \sigma_{\Delta N_{ij}}^2} \quad (20)$$

Com o objetivo de reduzir o efeito de eventuais erros grosseiros na altimetria por GPS, a altitude ortométrica das RNs posicionadas  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  foram obtidas a partir das estações de referência  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  mais próximas (Figura 4). Assim, para cada RN posicionada com GPS, foi obtido um conjunto de altitudes  $\{H_1, H_2, H_3, \dots, H_m\}$  e os respectivos

erros padrões  $\{\sigma_{H_1}, \sigma_{H_2}, \sigma_{H_3}, \dots, \sigma_{H_m}\}$ . As altitudes das RNs foram determinadas por meio da ponderação daquelas obtidas pelas estações de referência (SANTOS, 2005):

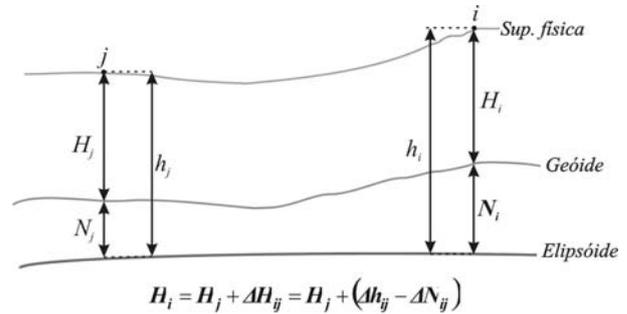


Figura 3 – Altimetria por GPS no modo relativo

$$H_i = \frac{\sum_{j=1}^m P_j H_j}{\sum_{j=1}^m P_j} \quad (21)$$

com:

$$P_j = \frac{1}{\sigma_{H_j}^2} \quad (22)$$

com a variância de  $H_i$  dada por:

$$\sigma_{H_i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^m (H_i - H_j)^2 \frac{1}{\sigma_{H_j}^2}}{(m-1) \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{H_j}^2}} \quad (23)$$

### Erros padrões

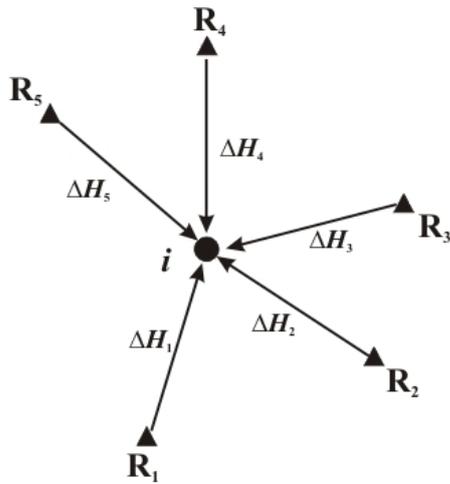
Para o cálculo do erro padrão da altitude ortométrica determinada por GPS, são necessários:

- o erro padrão da altitude ortométrica da estação de referência, estimado a partir do *Datum* altimétrico de Imbituba, considerando o limite da propagação de erros no nivelamento geométrico dado por:

$$\sigma_H = \pm C \sqrt{k} \quad (24)$$

onde  $C$  representa uma constante, dada em milímetros, e  $k$ , a distância (em km) do *Datum* à RN de interesse. Atualmente, o valor de  $C$  é 3 mm; porém, em

levantamentos mais antigos, era 4 mm. Por isso, foi usada a constante de 4 mm.



$$H_i = H_{R_j} + \Delta H_{ij} = H_{R_j} + (\Delta h_{ij} - \Delta N_{ij})$$

Figura 4 – Altimetria por GPS com superabundância. Triângulos vermelhos: estações de referência; círculo azul: RN posicionada (Santos, 2005)

• O erro padrão da diferença de altitude geométrica entre a RN posicionada e a estação de referência. Como a diferença de altitude geométrica entre uma RN posicionada por GPS ( $i$ ) e uma estação de referência ( $j$ ) é dada por  $\Delta h_{ij} = h_i - h_j$ , com o erro padrão calculado pela propagação das variâncias:

$$\sigma_{\Delta h_{ij}} = \pm \sqrt{\sigma_{h_i}^2 + \sigma_{h_j}^2} \quad (25)$$

onde  $\sigma_{h_i}$  e  $\sigma_{h_j}$  foram dados pelo ajustamento da RGSB.

• E o erro padrão da diferença de altura geoidal nos pontos da RGSB. Foi calculado a partir das diferenças de alturas geoidais obtidas por GPS ( $\Delta N_{GPS_{ij}}$ ) e pelo geóide gravimétrico ( $\Delta N_{g_{ij}}$ ), em pares de estações da RGSB :

$$\begin{aligned} \Delta N_{GPS_{ij}} &= (h_i - H_i) - (h_j - H_j) = \\ &= \Delta h_{ij} - \Delta H_{ij} \end{aligned} \quad (26)$$

e

$$\delta \Delta N_{ij} = \Delta N_{GPS_{ij}} - \Delta N_{g_{ij}} \quad (27)$$

sendo  $\Delta h_{ij}$  e  $\Delta H_{ij}$ , respectivamente, as diferenças entre as altitudes geométrica e ortométrica entre as RNs; e

$\Delta N_{g_{ij}}$ , a diferença entre as alturas geoidais obtidas com o modelo geoidal gravimétrico.

### 3.4 AVALIAÇÃO DE DISTORÇÕES

Mesmo seguindo os padrões de controle recomendados para o nivelamento de alta precisão, os erros sistemáticos, grosseiros e aleatórios são inevitáveis. Esses erros geram distorções e, conseqüentemente, deterioram a precisão da rede altimétrica. Devido ao elevado padrão atribuído à RAFB em termos de metodologia e exatidão, é necessário avaliar eventuais distorções para garantir alta precisão e acurácia em toda sua extensão.

As distorções na rede altimétrica foram detectadas pela comparação da altitude ortométrica de referência ( $H_{RN}$ ) com a obtida por GPS ( $H_{cal}$ ), no modo relativo, usando a relação:

$$\Delta H = H_{RN} - H_{Cal} \quad (28)$$

onde  $\Delta H$  é a componente residual da altitude ortométrica.

Os respectivos erros padrões foram obtidos pela propagação das variâncias:

$$\sigma_{\Delta H_i} = \pm \sqrt{\sigma_{H_{RN}}^2 + \sigma_{H_{cal}}^2} \quad (29)$$

onde  $\sigma_{H_{RN}}^2$  e  $\sigma_{H_{cal}}^2$  são, respectivamente, as variâncias das altitudes ortométrica de referência e determinada no modo relativo.

As diferenças cujo módulo ultrapassou o triplo do erro padrão, isto é,  $|\Delta H| > 3\sigma_{\Delta N_i}$  caracterizaram distorções.

As distorções detectadas foram avaliadas minuciosamente para identificar causa, que pode estar em  $h$ ,  $H$  e  $N$ .

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Análise estatística dos dados

Para análise estatística dos dados ( $\Delta N$ ), as alturas geoidais gravimétricas foram comparadas com as obtidas por GPS, nas estações da RGSB usando a expressão (4).

Os resultados obtidos (Tabela 1), com média nula, indicam que o geóide gravimétrico é incompatível com geóide do sistema altimétrico nessa região, cujas causas prováveis foram mencionadas anteriormente. As estatísticas (Tabela 1), e o histograma da componente sistemática (Figura 5), mostram assimetria à direita, feição leptocúrtica.

TABELA 1 – ESTATÍSTICAS DA COMPONENTE SISTEMÁTICA DO GEÓIDE

Estatísticas ( $\Delta N$ )	Valor numérico
Número de dados	236
Mínimo (m)	-1,230
Máximo (m)	0,747
Amplitude (m)	1.977
Média (m)	-0,409
Desvio padrão (m)	0,343
Assimetria	0,337
Curtose	0,266

Analisando as medidas de dispersão, observa-se que ocorrem discrepâncias causadas por erros grosseiros nas medidas, cálculo das altitudes ( $H$  e  $h$ ), e altura geoidal  $N_g$ , que tornam a distribuição dos resíduos diferente da normal. Essas discrepâncias podem ser observadas também na Figura 6, onde aparecem algumas feições anômalas, na representação da componente sistemática.

A eliminação dos dados contaminados com erros grosseiros reduz média da componente sistemática e a distorção da RAFB.

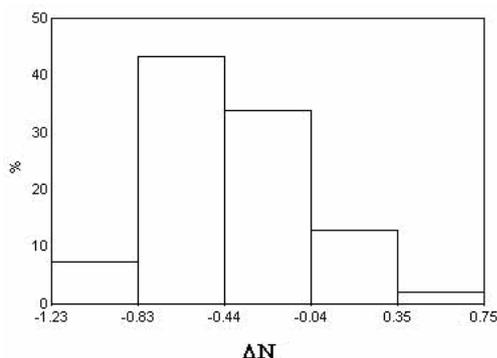


Figura 5 – Histograma da componente sistemática (Unidade: m)

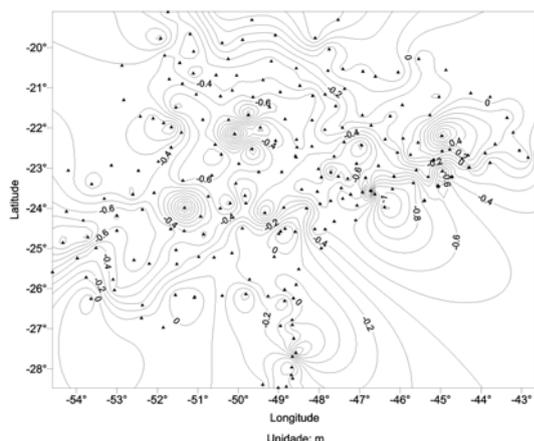


Figura 6 – Componente sistemática do geóide usando todos os dados (Unidade: m)

## 4.2 Identificação de erros grosseiros

Para identificar erros grosseiros nas altitudes da RAFB, os dados foram submetidos ao teste  $t$  (*Student*), que verificou a probabilidade de cada elemento da amostra estar dentro do intervalo de confiança dado pela expressão (9), ao nível de significância de 5%.

A Figura 7 ilustra um exemplo de altitude ortométrica com erro grosseiro (Capão Bonito), identificada através do teste  $t$ , que mostra discrepância exagerada da componente sistemática na estação Capão Bonito, em relação as 5 mais próximas.

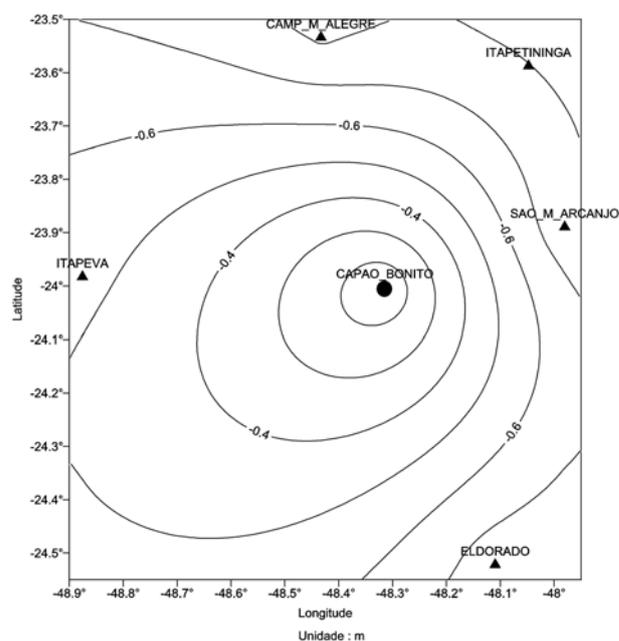


Figura 7 – Exemplo de altitude com erro grosseiro (Unidade: m)

Com a realização desta análise, no conjunto de 236 RNs, foram identificadas 20 contendo erros grosseiros (Figura 8).

A Figura 9 mostra que após a remoção das RNs contendo erros grosseiros, a componente sistemática do geóide passa a ser mais suave do que na Figura 8. Mesmo seguindo os padrões de controle recomendados para o nivelamento de alta precisão, essas distorções são inevitáveis. Elas decorrem do uso de referenciais incompatíveis com os erros aleatórios e sistemáticos no nivelamento geométrico, entre outros (Souza, 2006).

Na Tabela 2, são apresentadas as estatísticas da componente sistemática do geóide após a remoção dos erros grosseiros. Observa-se que as componentes possuem média de -0,437 m e desvio padrão de 0,289 m, e na Figura 10 é apresentado o histograma de frequência, no qual ainda observa-se uma irregularidade na distribuição dos dados.

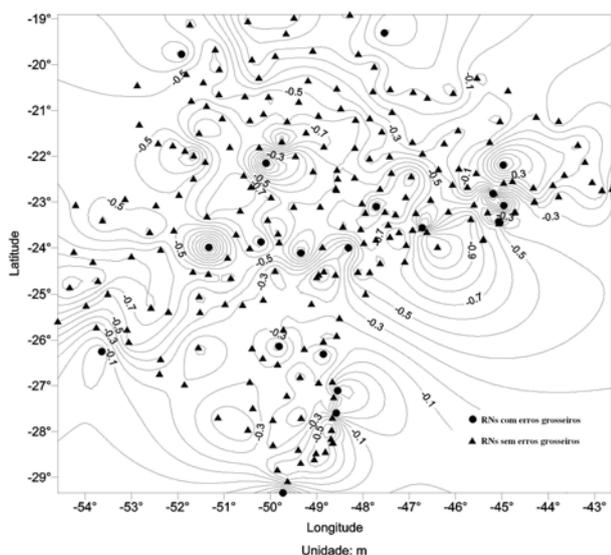


Figura 8 – Componente sistemática do geóide com erros grosseiros identificados (Unidade: m)

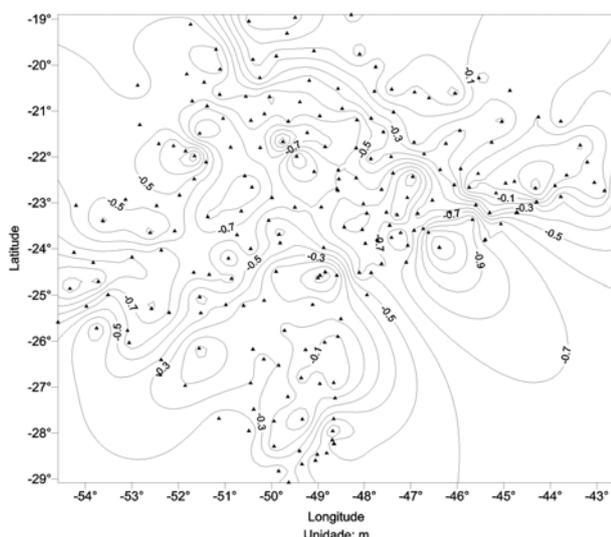


Figura 9 – Componente sistemática do geóide e RNs sem erros grosseiros (Unidade: m)

TABELA 2 – ESTATÍSTICAS DA COMPONENTE SISTEMÁTICA DO GEÓIDE

Estatísticas ( $\Delta N$ )	Valor numérico
Número de dados	216
Mínimo (m)	-1,222
Máximo (m)	0,260
Amplitude (m)	1,482
Média (m)	-0,437
Desvio padrão (m)	0,289
Assimetria	0,008
Curtose	-0,413

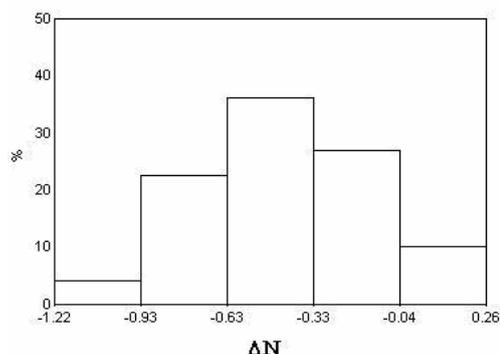


Figura 10 – Histograma da componente sistemática após a remoção dos erros grosseiros (Unidade: m)

### 4.3 Compatibilização de geóides

Como foi mencionado, as alturas geoidais determinadas por GPS/nivelamento geralmente são diferentes das obtidas a partir do modelo geoidal gravimétrico. Entre as causas dessas diferenças, a predominante é a incompatibilidade de referenciais adotados nos dados envolvidos. Além disso, o *Datum* altimétrico local, ao qual as altitudes ortométricas são referidas, não corresponde ao valor de referência do modelo geopotencial ou ao sistema de referência do GPS (FOTOPOULOS, 2003).

Em estudo recente, SOUZA (2006) testou os modelos apresentados neste artigo e concluiu que o mais adequado para região em estudo, é de transformação de similaridade com 7 parâmetros expresso por (16).

Após a seleção do modelo paramétrico, o geóide gravimétrico foi compatibilizado ao do sistema altimétrico local (Figura 11).

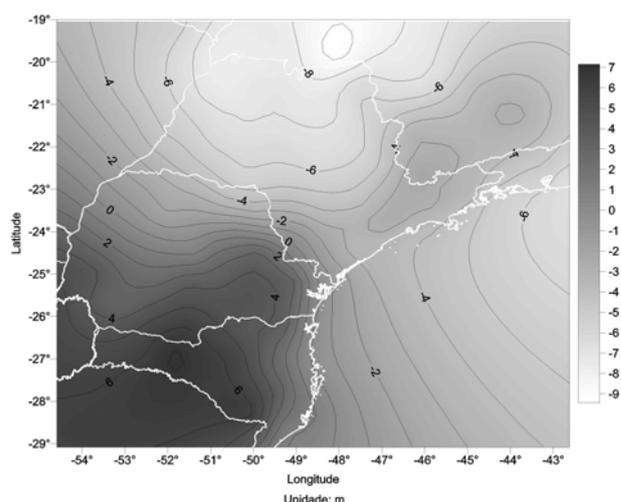


Figura 11 – Geóide gravimétrico compatibilizado ao sistema altimétrico local (Unidade: m)

### 4.4 Altitude ortométrica por GPS no modo relativo

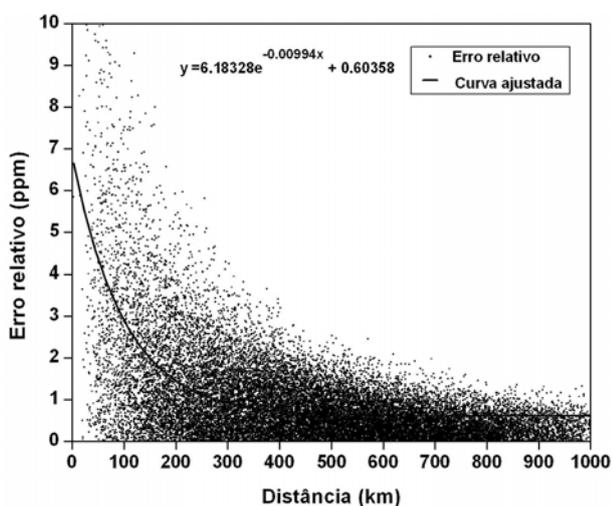
Os erros relativos do geóide, em parte por milhão (ppm), antes e após ser compatibilizado, são apresentados na Figura 12. O modelo matemático

utilizado para sua representação em ppm, tem a forma exponencial:

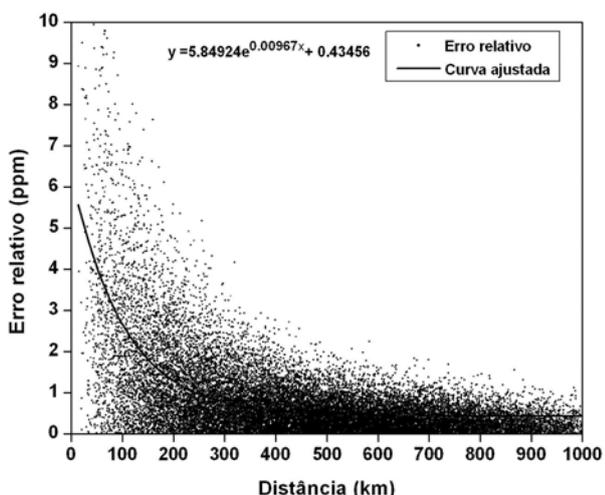
$$Y = ae^{-bx} + c \quad (30)$$

onde  $a$ ,  $b$ , e  $c$ , são os coeficientes determinados pelo método dos mínimos quadrados, e  $e$  é a base do logaritmo natural.

Os resultados dos modelos matemáticos ajustados (Figura 12) mostram a variação do erro relativo dos geóides original e compatibilizado. Os resultados correspondentes ao geóide gravimétrico compatibilizado (Figura 12a), foram usados para estimar os erros padrões das diferenças de alturas geoidais (Tabela 3).



a) Erro relativo do geóide original



b) Erro relativo do geóide compatibilizado

Figura 12 – Erros relativos do geóide gravimétrico antes e após a remoção da componente sistemática

## 4.5 Identificação e análise das distorções na RAFB

Após a remoção de erros grosseiros, que também provoca um tipo de distorção, e a compatibilização do geóide gravimétrico ao do sistema altimétrico, foi investigada a existência de distorções remanescentes na rede altimétrica. Para isso, foi comparado o resíduo da altitude ortométrica ( $\Delta H$ ), dado por (27), em módulo, com o triplo do erro padrão correspondente.

### 4.5.1 Identificação das distorções

Para identificação das distorções foram utilizadas todas as RNs depuradas de erros grosseiros. Assim, as altitudes tais que  $|\Delta H| > 3\sigma_{\Delta H}$  foram identificadas como contaminadas por possíveis distorções.

Na Tabela 4, são apresentadas as estatísticas da componente residual da altitude ortométrica. A componente sistemática possui média de 0,010 m e desvio padrão de 0,191 m.

TABELA 3 – ERRO RELATIVO DO GEÓIDE EM FUNÇÃO DA DISTÂNCIA

Distância (km)	Erro relativo			
	Geóide		Geóide compatibilizado	
	ppm	Relativo (m)	ppm	Relativo (m)
1	6,726	0,007	6,228	0,006
10	6,202	0,062	5,745	0,057
20	5,672	0,113	5,255	0,105
30	5,193	0,156	4,811	0,144
40	4,758	0,190	4,408	0,176
50	4,365	0,218	4,041	0,202
100	2,892	0,289	2,659	0,266
200	1,450	0,290	1,280	0,256
300	0,917	0,275	0,756	0,227
400	0,720	0,288	0,557	0,223
500	0,647	0,323	0,481	0,241
600	0,619	0,372	0,452	0,271
700	0,609	0,427	0,441	0,309
800	0,606	0,485	0,437	0,350
900	0,604	0,544	0,436	0,392
1000	0,604	0,604	0,435	0,435

O histograma da componente residual da altitude ortométrica (Figura 13) e os parâmetros estatísticos (Tabela 4) mostram que a distribuição os dados não é exatamente normal.

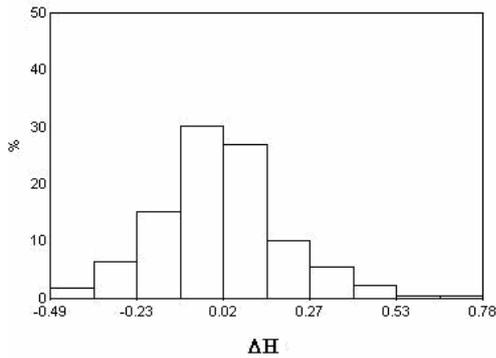


Figura 13 – Histograma do resíduo da altitude ortométrica antes da remoção das distorções (Unidade: m)

TABELA 4 – ESTATÍSTICAS DOS DADOS DEPURADOS DE ERROS GROSSEIROS

Estatísticas ( $\Delta H$ )	Valor numérico
Número de dados	216
Mínimo (m)	-0,487
Máximo (m)	0,781
Amplitude (m)	1,268
Média (m)	0,010
Desvio padrão (m)	0,191
RMS (m)	0,192
Assimetria	0,435
Curtose	1,275

A Figura 14 mostra as RNs identificadas com distorções ( $\oplus$ ), sem distorções (O), e os círculos que representam as RNs, estão proporcional em relação aos resíduos da altitude ortométrica.

Analisando o erro padrão da altitude geométrica das RNs (SOUZA, 2006), observa-se que as distorções das RNs não podem ser atribuídas a erros de altitudes geométricas, pois esses têm média de 0,050 m; pela Figura 15, também não podem estar no geóide, pois as RNs próximas às identificadas com distorções, possuem valores residuais pequenos.

Uma comparação entre as componentes residuais das altitudes ortométricas, considerando todas as RNs (Figura 16) e somente as sem distorções (Figura 17), mostra que a componente residual nas áreas anômalas (Figura 16), da ordem de -0,4 m e 0,6 m, são muito discrepantes em relação aos valores esperados para região (Figura 17). Elas não podem ser atribuídas às alturas geoidais das RNs, obtidas com o geóide gravimétrico compatibilizado, pois este não apresenta anormalidade em relação as alturas geoidais das estações da RGSB mais próximas. Portanto, a fonte de erros está na altitude ortométrica de referência.

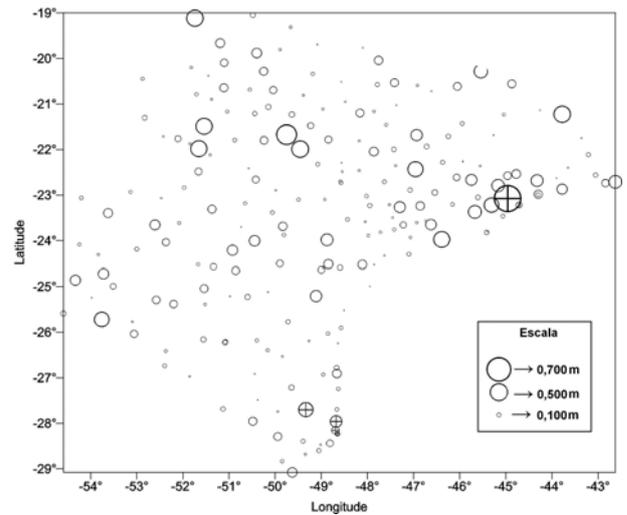


Figura 14 – Identificação das RNs com distorções ( $\oplus$ ) e sem distorções (O)

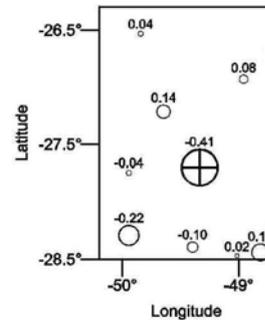


Figura 15 – Exemplo de RN com distorção ( $\oplus$ ) (Unidade: m)

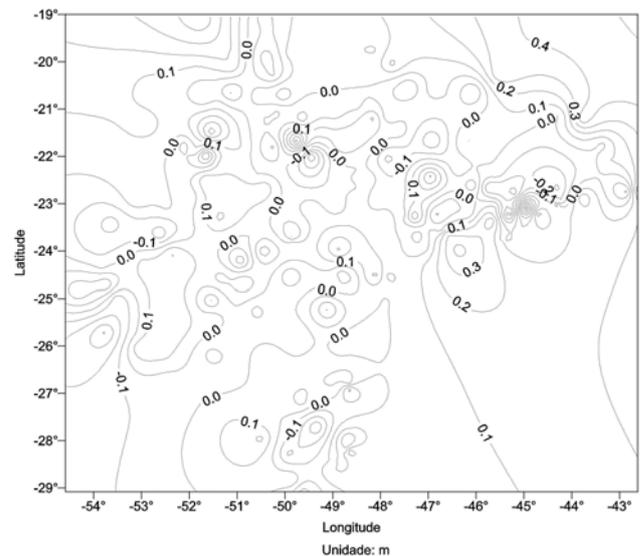


Figura 16 – Componente residual da altitude ortométrica (Unidade: m)

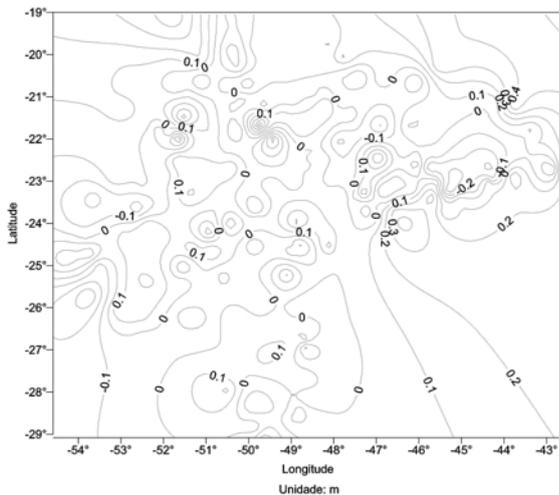


Figura 17 – Componente residual da altitude ortométrica sem distorção (Unidade: m)

Na Tabela 5, são apresentadas as estatísticas da componente residual após a remoção das distorções, que tem média 0,003 m e desvio padrão 0,181 m; na Figura 18, é apresentado o histograma no qual se observa regularidade na distribuição dos dados, e melhor aproximação da distribuição normal.

TABELA 5 – PARÂMETROS ESTATÍSTICOS DOS DADOS SEM DISTORÇÃO

Estatísticas ( $\Delta H$ )	Valor numérico
Número de dados	212
Mínimo (m)	-0,487
Máximo (m)	0,582
Amplitude (m)	1,069
Média (m)	0,003
Desvio padrão (m)	0,181
RMS (m)	0,181
Assimetria	0,248
Curtose	0,623

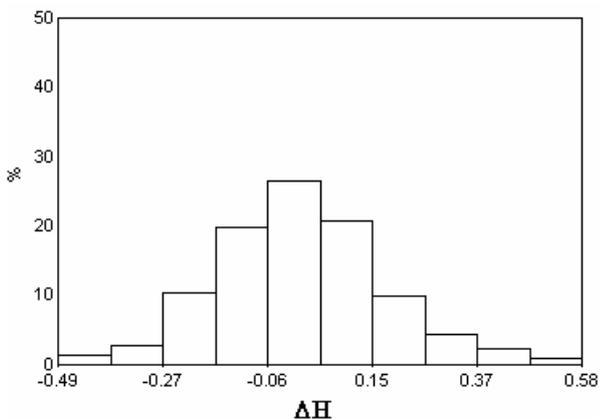


Figura 18 – Histograma dos resíduos da altitude ortométrica após a remoção das distorções (Unidade: m)

#### 4.5.2 Causas das distorções

As distorções podem ser divididas em regionais e locais. As distorções regionais são aquelas distribuídas em um conjunto de RNs próximas (Figura 19) onde os resíduos das RNs com distorções (círculos), são discrepantes em relação às outras. Este tipo de distorção geralmente ocorre em uma única RN, por causa de algum erro ocorrido durante o nivelamento, que se propaga ao restante da linha; as distorções locais (Figura 20), caracterizadas por estarem isoladas.

Partes desses erros decorrem de falhas do operador, pois os instrumentos utilizados na implantação da RAFB eram analógicos, tornando um trabalho mais cansativo e sujeito à dispersão dos operadores durante o nivelamento, erros de anotações e transcrições de números.

As distorções também podem ser caracterizadas como erros grosseiros que não foram identificados através da análise estatística, o que pode ser visto na Figura 21, que mostra todas as RNs usadas neste trabalho. Nas proximidades das RNs identificadas com erros grosseiros encontram-se RNs identificadas com distorções, indicando que esses erros foram propagados na linha de nivelamento, caracterizando uma distorção regional.

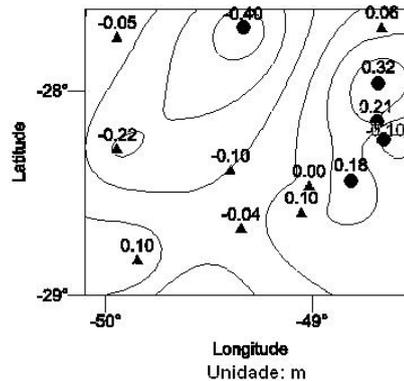


Figura 19 – Exemplo de distorção regional (Unidade: m)

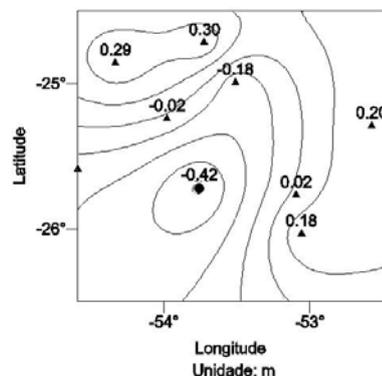


Figura 20 – Exemplo de distorção local (Unidade: m)

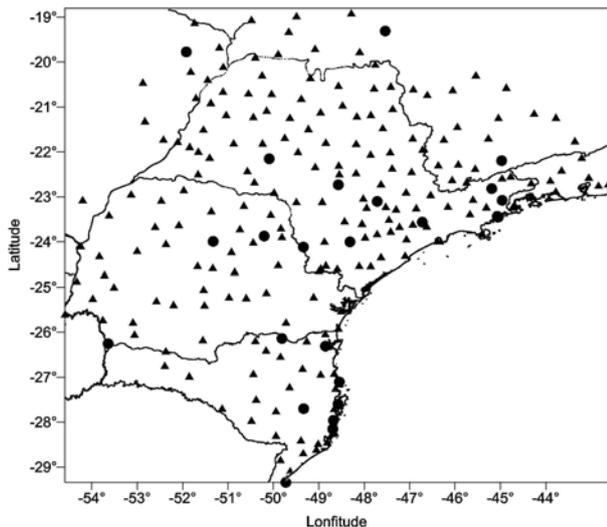


Figura 21 – Conjunto de RNs analisadas e identificadas com distorções (círculo) e livre de erros (triângulo)

## 5 CONCLUSÕES

A avaliação de dados para detectar distorções (erros grosseiros e sistemáticos) deve ser encarada como uma tarefa tão importante quanto às outras, uma vez que o ajustamento de redes altimétricas de alta precisão requer cuidados especiais na crítica e análise dos dados do nivelamento geométrico. Se esses erros não forem identificados, podem ser propagados através do ajustamento, acarretando desse modo, distorções na rede como um todo.

As altitudes ortométricas da rede altimétrica no Sul/Sudeste do Brasil foram comparadas com as obtidas pela combinação do GPS e do geóide gravimétrico ( $\Delta H = H_{RN} - H_{cal}$ ). A comparação entre os resíduos determinados e os respectivos erros padrões forneceram indicativos de distorções nesse segmento da RAFB.

Com isso constatou-se a existência de uma média não nula, indicando que  $N_{GPS}$  é incompatível com  $N_g$  nessa região, estando relacionada com inúmeras causas, e algumas delas são os erros grosseiros e sistemático existentes nas RNs, os quais também provocam distorções na rede. Pôde-se constatar isso, após a identificação e remoção de 20 RNs contendo erros grosseiros, onde a componente sistemática do geóide passou a ser mais suave (ver Figura 8).

Outra causa da componente sistemática é a incompatibilidade dos referenciais adotados, cujo efeito altera a forma global da rede altimétrica, que pode ser modelada e não foi considerada como uma distorção.

Para aplicar a metodologia e identificar as RNs contendo as distorções, é fundamental compatibilizar o geóide gravimétrico ao do sistema altimétrico local. Portanto, foi necessário modelar a componente sistemática, utilizando um modelo matemático de correção e compatibilizar o geóide gravimétrico ao sistema altimétrico local.

As altitudes ortométricas, determinadas no modo relativo, comparadas com as originais, nas estações da RGSB, forneceram os resíduos DH e seus respectivos erros padrões. As distorções, caracterizadas por resíduos com módulos superiores ao triplo do erro padrão da componente residual da altitude, foram identificados e apresentados graficamente na Figura 14, na qual se observa 4 RNs com distorções.

Essas distorções não podem ser atribuídas a erros nas altitudes geométricas, pois a média dos erros padrões dessa componente foi de 0,050 m, inferior aos valores obtidos nas distorções. Tampouco podem ser associadas ao geóide, pois as RNs próximas às identificadas com distorções possuem valores residuais pequenos (ver Figura 15).

Em vista disso, concluiu-se que essas distorções são causadas por problemas nas altitudes ortométricas, as quais estão sujeitas a erros grosseiros, sistemáticos e aleatórios. Suas principais fontes de erros observacionais são: refração atmosférica, imperfeições na colimação de nível e verticalidade de miras, erro de graduação de miras e marés terrestres. As redes altimétricas envolvem também uma grande quantidade de observações realizadas em condições heterogêneas, tais como variações na topografia, nos instrumentos, nos operadores, entre outros. Tais erros muitas vezes não são identificados e acabam sendo minimizados no ajustamento da rede e, conseqüentemente, acabam introduzindo essas distorções.

Os resultados obtidos mostraram que a metodologia usada neste trabalho pode ser empregada de maneira eficiente na avaliação de distorções de redes altimétricas. Entretanto, para sua adequada utilização, são necessários dados que possibilitem explorar plenamente suas potencialidades, ou seja, uma rede GPS de referência suficientemente densa, que forneça estações com coordenadas geodésicas e altitudes ortométricas, assim como um geóide gravimétrico, cuja precisão seja compatível com a do nivelamento. A implantação da RGSB e o aprimoramento do geóide gravimétrico forneceram os requisitos básicos para a avaliação da rede altimétrica na região estudada.

Para que essa metodologia possa ser utilizada de maneira mais abrangente, redes GPS devem ser implantadas sobre a rede altimétrica fundamental, e continuar os levantamentos gravimétricos para o aprimoramento do geóide gravimétrico de alta precisão. Além disso, visando alcançar-se tais objetivos, as redes GPS devem possuir densidade e distribuição geográfica adequadas de estações.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com uma bolsa de estudo do CNPq, com o apoio financeiro da FAPESP (99/12691-9) e do PADCT (65.95.082.00 e 65.95.0693.00), e com a colaboração do IBGE fornecendo dados da RBMC.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALENCAR, J. C. M. – 1968 – Sistema nacional de nivelamento de 1ª ordem. In: 1ª Conferência Nacional de Geografia e Cartografia. Rio de Janeiro, Brasil.

BOMFORD, G. – 1983 – **Geodesy**. Oxford, University Press, 4ª edição.

FOTOPOULOS, G. – 2003 – An analysis on the optimal combination of geoid, orthometric and ellipsoidal height data. **Thesis**, Department of Geomatics Engineering, Calgary, Alberta.

HEISKANEN, W. & MORITZ, H. – 1967 – **Physical geodesy**. W. H. Freeman, N. York, 364pp.

IGG – 1962 – Nivelamento Geral do Estado – Altitudes de Precisão, **Boletim N.º. 36**, Instituto Geográfico e Geológico, Secretaria de Agricultura do Estado de São Paulo, São Paulo.

KOTSAKIS, C. & SIDERIS, M. G. – 1999 – On the adjustment of combined GPS/Levelling/Geoid networks. **Journal of Geodesy**, **73** (8) : 412-421.

KOTSAKIS, C., FOTOPOULOS, G., & M. G. SIDERIS – 2001 – Optimal fitting of gravimetric geoid undulations to GPS/levelling data using an extended similarity transformation model. Presented at the 27<sup>th</sup> Annual Meeting joint with the 58<sup>th</sup> Eastern Snow Conference of the Canadian Geophysical Union, Ottawa, Canada, May 14-17.

LUZ, R. T.; FREITAS, S. R. C.; DALAZOANA, R.; MIRANDA, F. A. ; PALMEIRO, A. S.; JAMUR K. P. – 2004 – Possibilidades de integração de dados gravimétricos à rede altimétrica do SGB para cálculo de altitudes SIRGAS no Brasil. I SIMGEO. Recife. Setembro de 2004.

LUZ, R. T.; GUIMARÃES, V. M. – 2001 – Realidade e Perspectivas da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro.: Anais do II Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas (CD-ROM), Curitiba, PR.

MAINVILLE, A.; CRAYMER, M. & BLACKIE, S. – 1997 – The GPS height transformation 1997, an ellipsoidal-orthometric height transformation for use with GPS in Canada, **Report of Geodetic Survey Division, Geomatics Canada**, Ottawa.

POUTANEN, M. – 1999 – Use of GPS in unification of vertical datums and detection of levelling network errors, **Lantmäteriverket** **3**: 301-312.

SÁ, N. C. de – 2004 - O campo de gravidade, o geóide e a estrutura crustal na América do Sul. **Tese de Livre**

**Docência**. Departamento de Geofísica do IAG-USP, São Paulo, 121 pp.

SÁ, N. C. de; MONICO, J. F. G.; KRUEGER, C. P.; SOUZA, S. F. de; CASTRO, A. L. P. de & VIEIRA, C. D. - 2002 – Rede GPS no Estado de São Paulo: um projeto orientado para aplicações cotidianas. Simpósio Brasileiro de Geomática. Pres. Prudente - SP, CD-ROM.

SÁ, N. C. de; SOUZA, S. F. de; MONICO, J. F. G.; CASTRO, A. L. P. & KRUEGER, C. P. – 2001 – O GPS no Estado de São Paulo: potencialidades, desafios e estratégias. XX Congresso Brasileiro de Cartografia, Porto Alegre, Anais (cd-rom).

SÁ, N. C. de – 1988 – Modelos estatísticos e representação integrada do campo de gravidade no Brasil. **Tese de Doutorado**, IAG/USP, São Paulo, 240 pp.

SANTOS, M. S. T. – 2005 – Potencialidades do GPS em levantamentos geofísicos terrestres. **Dissertação de Mestrado**, Curso de pós-graduação em Geofísica do IAG/USP, São Paulo, 140pp.

SOUZA, D. V – 2006 – Avaliação de distorções da Rede Altimétrica Fundamental no Sul/Sudeste do Brasil usando o geóide e GPS. **Dissertação de Mestrado**, Curso de pós-graduação em Geofísica do IAG/USP, São Paulo, 134pp.

SOUZA, S. F. de. – 2002 – Contribuição do GPS para o aprimoramento do geóide no Estado de São Paulo. **Tese de Doutorado**, Curso de pós-graduação em Geofísica do IAG/USP, São Paulo, 204pp.

WETHERILL, G. B. – 1967 – **Elementary statistical methods**. Chapman & Hall.

VERGOS G. S. & SIDERIS M. G. – 2002 – Evaluation of Geoid models and validation of Geoid and GPS/Levelling undulations in Canada. **IGeS Bulletin**, **12**.