

# ANÁLISE ESTATÍSTICA DA QUALIDADE DE UM MODELO DIGITAL DO TERRENO GERADO COM THIN PLATE SPLINE

*Statistical analysis of the quality of a Digital Terrain Model generated by Thin Plate Spline*

**Ricardo Luís Barbosa<sup>1</sup>**  
**Messias Meneguette Jr.<sup>2</sup>**  
**João Fernando Custódio da Silva<sup>2</sup>**  
**Rodrigo Bezerra de Araújo Gallis<sup>2</sup>**  
**Otávio Yassuo Itame<sup>2</sup>**

**Universidade Estadual Paulista**

<sup>1</sup>Campus de Sorocaba

<sup>2</sup>Faculdade de Ciências e Tecnologia

{ricardo,messias,jfcsilva,itame}@fct.unesp.br

## RESUMO

A representação do relevo ou terreno é uma componente fundamental no processo cartográfico. Em formato digital ela recebe o nome de Modelo Digital do Terreno (MDT) e consiste de um conjunto de dados que explicitam as coordenadas (X, Y, Z) do terreno e a forma como os mesmos estão relacionados. Várias técnicas podem ser utilizadas para se obter os dados do MDT, as principais delas são: levantamento topográfico, fotogramétricas e cartográficas. Os dados obtidos através dessas técnicas constituem o Modelo Digital do Terreno, ou se for o caso, uma base sobre a qual poderá ser realizada uma densificação (interpolação). Existe uma variedade grande de técnicas de interpolação, sendo as mais conhecidas: linear, bilinear, bicúbica, quártica, multiquádrica, inverso da distância ponderada etc. A qualidade do MDT é de fundamental importância e neste trabalho o interesse é em uma interpolação menos usual, via *Thin Plate Spline* (TPS) analisada de acordo com o padrão de exatidão cartográfica. Para o controle de qualidade, foram gerados modelos de terreno com diferentes números de pontos originais com base em amostragens aleatórias e estratificadas. O modelo que apresentou melhor resultado foi obtido com uma adaptação da amostragem estratificada. Em função da boa performance da interpolação TPS, pretende-se avaliá-la em trabalhos futuros, em relação a outras funções interpoladoras, inclusive melhorar a eficiência computacional da mesma para ser automaticamente adaptativa, ou seja, deixando de ser global e passando a ter efeito local pelo uso apenas de pontos vizinhos.

**Palavras chaves:** MDT, Thin Plate Spline, interpolação, amostragem, exatidão cartográfica.

## ABSTRACT

The relief representation is an important step in the cartographic process and in digital format is named Digital Terrain Model (DTM). DTM can be seen as a set of coordinates (X, Y, Z) of ground surface points together with their topological relationship. Several techniques can be used to acquire the DTM data: surveying, photogrammetric and cartographic ones. The data therefore constitute the DTM, but in some cases, it is take as a basis on which a densification (interpolation) should be accomplished. There exists a variety of interpolation techniques, the more usual being: linear, bilinear, bicubic, quintic, multiquadric, inverse weighted distance, etc. The quality of DTM is also of fundamental importance. In this work the major interest is directed to a less usual interpolation method, the Thin Plate Spline (TPS), which is analysed taking into account the cartographic accuracy requirements. For the quality control, DTM were generated with different numbers of original points considering random and stratified samplings. A novel adaptation for the stratified sampling generated the best resulting model. The good performance presented by the interpolation TPS indicates it should be better evaluated it in future works, in relation to other interpolation functions, as well as computationally refined in the sense of being adaptative, or in other words, not being global but having local effect by the use of neighboring points only.

**Keywords:** DTM, Thin Plate Spline, interpolation, sampling, cartographic accuracy.

## 1. INTRODUÇÃO

A representação do relevo ou terreno é uma componente fundamental no processo cartográfico que, em formato digital, recebe o nome de Modelo Digital do Terreno (MDT) e consiste de um conjunto de dados que explicitam as coordenadas (X, Y, Z) do terreno e a forma como os mesmos estão relacionados (PETRIE; KENNIE, 1990), (ACKERMANN, 1996), (ANDRADE, 1998), (BARBOSA; SILVA, 2000), (NASER; VALEO; HABIB, 2005).

Os dados para a criação do MDT podem ser obtidos (ou amostrados) de várias maneiras, como por exemplo, utilizando métodos analógicos para a extração das coordenadas (X, Y, Z) e posterior transferência para o computador, ou fazendo-se uso de técnicas digitais de forma semi-automática ou automática. Atualmente, o *laser scanner* é cada vez mais usado para a aquisição de um MDT (DALMOLIN; SANTOS, 2004).

Em geral, é necessário adensar o MDT e isso é feito usando uma função interpoladora. A escolha da função de interpolação é decisiva para se obter uma boa precisão do MDT. Segundo McCullagh (1988), os requisitos desejáveis para uma função interpoladora são: que reproduza uma superfície contínua; o tempo de computação não seja proibitivo e que tenha propriedades matemáticas de interesse para a aplicação.

As funções de interpolação podem ser globais ou locais (YAMAMOTO, 1998). Os métodos globais levam em consideração todos os pontos que foram amostrados, ajustando alguma função que passe por todos esses pontos. Os métodos locais são influenciados por pontos que estejam em uma certa vizinhança, diminuindo sua contribuição à medida que a distância ao ponto interpolado aumenta. Existe uma variedade muito grande de técnicas de interpolação (LANCASTER; SALKAUSKAS, 1990): linear, quártica, multiquádrada, inverso da distância ponderada, funções de bases radiais etc.

Em Yang et al. (2004), são apresentados 12 métodos de interpolação que o programa Surfer 8.0 oferece, mas nenhuma conclusão a respeito do melhor método é apresentada, ficando, portanto, a cargo do usuário decidir.

Fernandes e Menezes (2005) geraram modelos com seis diferentes funções interpoladoras e usando apenas 5 pontos de controle afirmam que a Triangulação de Delaunay com restrição foi a melhor técnica, medida através do erro médio.

Com diferentes fontes de aquisição dos dados foram gerados 7 modelos por Santos, Silva e Mello (2003) sem que os autores, entretanto, explicitassem a interpoladora utilizada. O controle de qualidade foi feito com pontos levantados com GPS. O cálculo da precisão foi feito com a raiz quadrada do erro médio quadrático, e o MDT gerado automaticamente em uma estação da Leica foi o que apresentou melhor qualidade.

Com a digitalização de curvas de nível de uma carta, Pinheiro e Kux (2003) compararam dois métodos de interpolação: uma linear e uma quártica, utilizando

triangulação de Delaunay. Para o controle de qualidade, foram utilizados 52 pontos levantados por GPS, os quais foram utilizados na fototriangulação para a confecção da carta. Ambas as interpolações apresentaram resultados semelhantes.

Com o uso do *laser scanner*, Kraus et al. (2004) dizem ser necessário revisar e apresentar novas metodologias para se medir a qualidade do MDT. Apresentam duas abordagens: uma estocástica, que é dependente da densidade de pontos, da raiz quadrada do erro médio quadrático e da curvatura local, e uma outra abordagem geométrica baseada na curvatura local.

Partindo de uma população de 3665 pontos conhecidos por levantamento GPS, Oliveira et al. (2003), fizeram uma amostragem aleatória com 733 pontos levantados. Esses pontos amostrados foram interpolados para gerar o MDT com o programa Surfer usando krigagem como método de interpolação. Os autores não justificaram o tamanho da amostra usada e nem apresentaram resultados do controle de qualidade.

Nogueira Jr., Monico e Tachibana (2004) mostram a influência do tamanho da amostra no controle da qualidade para uma carta na escala 1:2000. O tamanho da amostra é determinado e os pontos são amostrados de forma aleatória.

Galo e Camargo (1994) descrevem o uso do GPS no controle da exatidão cartográfica e apresentam os passos para a análise da exatidão planimétrica em uma carta com escala 1:50000.

Itame (2001) fez um levantamento topográfico com 419 pontos e gerou modelos digitais do terreno com o programa Topograph, utilizando a triangulação de Delaunay e interpolação B-Spline. Fez também uma análise do tamanho da amostra mínimo para os pontos de controle.

Neste trabalho, o objetivo é analisar a geração de um MDT, e a respectiva qualidade, usando uma função interpoladora, menos usual em cartografia, a *Thin Plate Spline*. A fonte de dados para o MDT é um levantamento topográfico de 419 pontos utilizado por Itame (2001), que formam uma população da qual são extraídas amostras aleatórias com técnicas de estratificação para a geração do MDT, bem como de uma amostra com tamanho adequado para verificar a qualidade pelo Padrão de Exatidão Cartográfica (PEC).

## 2. INTERPOLAÇÃO

Um interpolante *Thin Plate Spline* (TPS) pode ser ilustrado fisicamente como sendo uma chapa fina de metal se estendendo para o infinito, presa em alguns pontos de controle, de tal forma que a energia necessária para isto seja mínima, desprezando-se a energia elástica e a energia gravitacional (BOOKSTEIN, 1989). O TPS aparece na literatura com outros nomes (YU, 2001): spline de curvatura mínima, spline biarmônica e mesmo superfície spline. Dados os pontos de controle  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , para interpolar Z, conhecidas as coordenadas (X, Y), a expressão para o TPS é:

$$Z(X, Y) = a_0 + a_1X + a_2Y + \sum_{i=1}^n F_i r_i^2 \ln r_i^2 \quad (1)$$

com

$$Z(X_k, Y_k) = Z_k, \quad = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

onde

$$r_i^2 = (X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 \quad (3)$$

e  $F_i, a_0, a_1$  e  $a_2$  são os  $n + 3$  coeficientes incógnitos.

Para gerar uma superfície que passa pelos  $n$  pontos e tenha todas as derivadas, ou seja, tenha boa suavidade, o termo  $r_i^2 \ln r_i^2$  pode ser trocado por  $r_i^2 \ln(r_i^2 + \varepsilon)$ :

$$Z(X, Y) = a_0 + a_1X + a_2Y + \sum_{i=1}^n F_i r_i^2 \ln(r_i^2 + \varepsilon) \quad (4)$$

O parâmetro  $\varepsilon$  usualmente é tomado entre  $10^{-2}$  e  $10^{-6}$ , dependendo do grau de variação da curvatura da superfície (YU, 2001).

Os coeficientes são determinados a partir de pontos conhecidos da amostra  $(X_k, Y_k, Z_k)$ :

$$Z_k = a_0 + a_1X_k + a_2Y_k + \sum_{i=1}^n F_i r_{ik}^2 \ln(r_{ik}^2 + \varepsilon) \quad (5)$$

onde

$$r_{ik}^2 = (X_i - X_k)^2 + (Y_i - Y_k)^2 \quad (6)$$

Na forma matricial:

$$AX = B \quad (7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & r_{12}^2 \ln(r_{12}^2 + \varepsilon) & \dots & r_{1n}^2 \ln(r_{1n}^2 + \varepsilon) & 1 & X_1 & Y_1 \\ r_{12}^2 \ln(r_{12}^2 + \varepsilon) & 0 & \dots & r_{2n}^2 \ln(r_{2n}^2 + \varepsilon) & 1 & X_2 & Y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1n}^2 \ln(r_{1n}^2 + \varepsilon) & r_{2n}^2 \ln(r_{2n}^2 + \varepsilon) & \dots & 0 & 1 & X_n & Y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n & 0 & 0 & 0 \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

com

$$X = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

A matriz A (equação 8) é simétrica e inversível. Resolvendo o sistema (equação 7), os coeficientes ficam determinados e consequentemente pode-se obter o valor interpolado em qualquer ponto  $(X, Y)$ .

### 3. MATERIAIS E MÉTODOS

Para a geração de cada representação do modelo digital do terreno foram utilizados pontos dentre os 419 obtidos em uma área do campus da Unesp de Presidente Prudente (ITAME, 2001), levantados por topografia. Esses pontos são considerados como uma população, com parâmetros mostrados na tabela 1. Para cada variável (V), que são as coordenadas UTM(m): E, N e H, são dadas as médias, medianas (med.), desvio padrão populacional ( $\sigma$ ), mínimo (mín.) e máximo(máx.).

Das coordenadas UTM, E(m) e N(m), subtraíu-se 450000 e 7550000 respectivamente, para facilitar a leitura dos números.

TABELA 1 - PARÂMETROS DA POPULAÇÃO DOS PONTOS

V	Média	Med.	$\sigma$	Mín.	Máx.
E	7841,70	7859,85	118,42	7622,81	8040,03
N	3480,50	3476,69	79,37	3314,99	3667,26
H	438,47	440,24	4,96	425,67	444,22

Os 419 pontos foram colocados em uma lista no programa Minitab (CAMPOS, 2003) e geradas amostras aleatórias para cada representação do MDT e também para o respectivo controle de qualidade. O cálculo do tamanho da amostra, supondo uma população finita é dado por (COCHRAN, 1977):

$$n = \frac{z_\alpha^2 \sigma^2}{C^2 + z_\alpha^2 \sigma^2 / (N - 1)} \quad (10)$$

onde:

$z_\alpha$  : contagem z para o nível de significância  $\alpha$

$\sigma$  : desvio padrão populacional

$C$  : margem de erro  
 $N$  : tamanho da população

Com nível de significância  $\alpha = 5\%$ ,  $z_\alpha = 1,96$ ,  $N = 419$  pontos, é necessário estabelecer a margem de erro para estimar o tamanho da amostra para a geração do MDT. Com uma variação da margem de erro de 10%, 20%, 30% e 40% sobre o valor do desvio padrão da variável H, obtêm-se os tamanhos das amostras (aproximados para o próximo inteiro) de 201, 79, 39 e 23 pontos (tabela 2), respectivamente.

TABELA 2 - TAMANHO DAS AMOSTRAS

z	$\sigma$	C	n
1,96	4,96	0,496	200,1831
1,96	4,96	0,992	78,09649
1,96	4,96	1,488	38,72954
1,96	4,96	1,984	22,70578

O tamanho da amostra para o controle de qualidade foi estipulado em Itame (2001) como sendo de 20 pontos. Dessa maneira, foram feitas 4 amostragens aleatórias da população para a geração do MDT conforme os valores da tabela 2, e uma amostragem aleatória para os pontos do controle de qualidade (CQ). A tabela 3 mostra as estatísticas de cada amostra: o número da amostra (A), o tamanho da amostra (n), média, mediana (med.), desvio padrão (s), mínimo (mín.) e máximo (máx.).

TABELA 3 - ESTATÍSTICAS DAS AMOSTRAS

A	n	Média	Med.	s	Mín.	Máx.
1	201	438,73	440,48	4,85	426,26	444,18
2	79	438,34	440,43	5,17	426,41	444,16
3	39	439,68	440,78	4,07	428,91	443,94
4	23	439,72	440,72	4,53	428,65	443,96
CQ	20	439,67	440,82	4,48	426,41	444,03

Também foi planejada uma amostragem estratificada em relação à altura, com dois estratos para o total de pontos levantados no terreno: um estrato com valores menores do que a mediana e outro com os valores maiores ou iguais a mediana.

A equação para o tamanho de uma amostra estratificada é dada por (COCHRAN, 1977):

$$n = \frac{\left( \sum_{i=1}^k N_i s_i \right)^2}{\left( \frac{N^2 C^2}{z_\alpha^2} \right) + \sum_{i=1}^k N_i s_i^2} \quad (11)$$

onde  $N_i$  é o tamanho do estrato  $i$  e  $k$  é o total de estratos (no caso  $k = 2$ ). Com o tamanho da amostra calculado, o tamanho para cada amostra do estrato  $i$  é dado por:

$$n_i = n \frac{N_i s_i}{\sum_{i=1}^k N_i s_i} \quad (12)$$

Os parâmetros dos estratos são dados na tabela 4, onde a coluna (Es) representa o número do estrato.

TABELA 4 - PARÂMETROS DOS ESTRATOS

Es.	n	Média	Med.	$\sigma$	Mín.	Máx.
1	210	434,81	435,82	4,57	425,67	440,23
2	209	442,16	442,13	1,14	440,24	444,22

Os tamanhos das amostras estratificadas são dados na tabela 5. O erro amostral considerado foi 10% e de 20% do desvio padrão populacional (vide tabela 1).

TABELA 5 - TAMANHO DAS AMOSTRAS ESTRATIFICADAS

A	C	$n_1$	$n_2$	n
5	0,496	73	18	91
6	0,992	24	6	30

Com o tamanho de cada estrato definido, foi feita uma amostragem aleatória em cada estrato, cujas estatísticas estão na tabela 6.

TABELA 6 - ESTATÍSTICAS DAS AMOSTRAS ESTRATIFICADAS

A	n	Média	Med.	s	Mín.	Máx.
5	91	436,01	438,39	5,27	425,67	443,90
6	30	434,68	435,85	5,10	426,83	440,24

Um terceiro planejamento foi feito (amostra 7) considerando os dois estratos como sendo duas populações diferentes para uma margem de erro de 0,457 (10% do desvio padrão do estrato 1) em ambas.

Para o estrato 1, o tamanho da amostra foi de 136 pontos e para o estrato 2, o tamanho da amostra foi de 22 pontos, ou seja, o total de pontos amostrados para o MDT foi de 158 pontos, cujas estatísticas estão na tabela 7.

TABELA 7 - ESTATÍSTICAS DA AMOSTRA 7

A	n	Média	Med.	s	Mín.	Máx.
7	158	436,60	438,88	5,22	426,74	444,22

Com as 7 amostras planejadas e escolhidas de maneira aleatória, foram geradas as representações para o MDT via *Thin Plate Spline* e calculadas as discrepâncias para cada um dos modelos (GALO; CAMARGO, 1994). As discrepâncias foram calculadas entre as diferenças das coordenadas Z conhecidas dos 20 pontos da amostra CQ (tabela 1) e as coordenadas Z interpoladas. A estatística para a tendência é dada por:

$$t_{\text{calculado}} = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}} \sqrt{n} \quad (13)$$

e para a precisão:

$$\chi^2_{\text{calculado}} = \frac{(n-1)s_{\bar{x}}^2}{\sigma_0^2} \quad (14)$$

onde:

$\bar{x}$  : média das discrepâncias

$s_{\bar{x}}^2$  : variância das discrepâncias

$n$  : tamanho da amostra (no caso 20 discrepâncias)

$\sigma_0^2$  : variância esperada para a classe do PEC

#### 4. RESULTADOS

A tabela 8 resume os resultados para a análise da tendência e precisão, segundo o padrão de exatidão cartográfica (PEC) (GALO; CAMARGO, 1994). O desvio padrão utilizada para o cálculo da estatística da precisão (equação 14) foi 0,3333 para a classe A do PEC. Os valores críticos, para um nível de significância de 10% e graus de liberdade 19, são  $|t| = 1,73$  (bilateral) e Qui-quadrado = 27,20.

TABELA 8 - RESULTADOS PARA A ANÁLISE DA TENDÊNCIA E PRECISÃO

Amostra	Média	s	t (calc.)	Qui (calc.)
1	-0,1047	0,2845	-1,6464	13,8722
2	0,1195	0,2434	2,1955	10,1526
3	-0,1146	0,3358	-1,5268	19,3175
4	0,0234	0,3650	0,2870	22,8225
5	0,0256	0,2156	0,5320	7,9670
6	0,5753	0,9453	2,7216	153,1176
7	-0,0299	0,3350	-0,3998	19,2251

As amostras 1, 3, 4, 5 e 7 não apresentam tendências, ao contrário das amostras 2 e 6, cujo valor  $|t\text{-calculado}|$  (equação 13) é maior do que o crítico. As amostras 1, 2, 3, 4, 5 e 7 se enquadram no padrão A no que se refere à exatidão (os valores das estatísticas de qui-quadrado calculados (equação 14) são menores do que o crítico). A amostra 6 não apresenta exatidão

suficiente. Pode-se observar que esta amostra apresentou o maior desvio padrão das discrepâncias.

Para fins de comparação, foi gerada uma representação do MDT usando o total dos pontos, isto é, 399 pontos, ou seja, da população de 419 foram excluídos os 20 pontos do controle de qualidade. Os resultados são mostrados na tabela 9.

TABELA 9 - RESULTADOS PARA A ANÁLISE DA TENDÊNCIA E PRECISÃO COM 399 PONTOS

Média	s	t (calc.)	Qui (calc.)
-0,0473	0,2162	-0,9777	8,0078

Como era de se esperar, o MDT gerado com os 399 pontos não apresenta tendências e tem padrão A de exatidão.

#### CONCLUSÕES

Duas amostras apresentaram tendências (amostra 2 e 6). A amostra 6 foi uma amostra estratificada com apenas 30 pontos e também não apresentou exatidão. A amostra 2, apesar de apresentar tendência, é classificada no padrão A de exatidão cartográfica. Comparando os resultados do modelo gerado com todos os pontos (exceto os de controle - tabela 9), as amostras 4, 5 e 7 apresentaram uma média de discrepância menor (valor absoluto) e se classificaram no padrão A de exatidão. A amostra 5 apresentou o menor desvio padrão para as discrepâncias e também o menor valor para a exatidão cartográfica com aproximadamente 23% da quantidade de pontos, indicando ser uma boa solução para a redução da quantidade de pontos amostrados e conseqüentemente redução do esforço computacional.

Esse trabalho teve como objetivo avaliar a qualidade de um MDT gerado com o TPS, usando estratégias diferentes de amostragens para gerar o modelo.

Em trabalhos futuros, pretende-se avaliar a *thin plate spline* com outras funções interpoladoras, além de melhorar a eficiência computacional da mesma, deixando de ser global e passando a ser feita localmente, utilizando apenas pontos em uma certa vizinhança.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACKERMANN, F. Techniques and strategies for DEM generation. **Digital photogrammetry: in addendum to the manual of photogrammetry**, Amer. Soc. for Photogramm. & Remote Sensing, p. 135-141, 1996.
- ANDRADE, J. B. **Fotogrametria**. Curitiba, SBEE, 1998. 258p.
- BARBOSA, R. L.; SILVA, J. F. C. Geração de MDT usando fotos de pequeno formato. **Revista Brasileira de Cartografia**, v. 52, n. 2, p. 56-64, 2000.

- BOOKSTEIN, F. L. Principal Warps: Thin-Plate Splines and the Decomposition of Deformations. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.11, n.6, p.567-85, 1989.
- CAMPOS, M. S. **Desvendando o MINITAB**. Rio de Janeiro, Qualymark, 2003. 261p.
- COCHRAN, W. G. **Sampling techniques**. New York, Wiley, 1977. 448p.
- DALMOLIN, Q.; SANTOS, D. R. **Sistema Laserscanner: conceitos e princípios de funcionamento**. Curitiba, UFPR, 2004. 97p.
- FERNANDES, M. C.; MENEZES, P. M. L. Avaliação de métodos de geração de MDE para a obtenção de observações em superfície real: um estudo de caso no maciço da Tijuca-RJ. In: XII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Goiânia, 2005. **Anais**. p. 2985-2992, 2005.
- GALO, M.; CAMARGO, P. O. Utilização do GPS no controle de qualidade de cartas. In: 1º Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico e Multifinalitário, Florianópolis, 1994. **Anais**. Tomo II, p. 41-48, 1994.
- ITAME, O. Y. **Controle de qualidade aplicado na modelagem digital do terreno**. 2001. 106f. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas) - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2001.
- KRAUS, K.; BRIESE, C.; ATTWENGER, M.; PFEIFER, N. Quality measures for digital terrain models. In: XX International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, 2004. **Proceedings**. Vol. XXXV, part B-2, p. 113-118.
- LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. **Curve and surface fitting: an introduction**. London, Academic Press, 1990. 280p.
- McCULLAGH, M. J. Terrain and surface modelling systems: theory and practice. **Photogrammetric Record**, v.72, n.12, p. 747-779, 1988.
- NASER, E. S.; VALEO, C.; HABIB, A. **Digital terrain modeling: acquisition, manipulation, and applications**. Norwood, Artech House, 2005. 257p.
- NOGUEIRA JR. J. B.; MONICO, J. F. G.; TACHIBANA, V. M. Tamanho da amostra no controle de qualidade posicional de dados cartográficos. **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, v. 10, n. 1, p. 101-112, 2004.
- OLIVEIRA, A. S. C.; RIBEIRO, C. A. A. S.; KANEKO, T.; MAEDA, E. E. Delineamento de amostragem visando a modelo digital de terreno (MDT) de relevo montanhoso no município de viçosa - MG. In: XI Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Belo Horizonte, 2003. **Anais**. p. 995-998, 2003.
- PETRIE, G.; KENNIE, T. J. M. **Terrain modelling in surveying and civil engineering**. Caithness, Whittles, 1990.
- PINHEIRO, E. S.; KUX, H. J. H. Análise e validação de modelos digitais do terreno num setor de relevo escarpado da Mata Atlântica - RS, área teste: CPCN Pró-mata. In: XI Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Belo Horizonte, 2003. **Anais**. p. 365-372, 2003.
- SANTOS, C. J. B.; SILVA, J. F. C.; MELLO, M. P. Controle da qualidade da altimetria de modelos digitais do terreno com a utilização de equipamentos GPS ocupando referências de nível. In: XXI Congresso Brasileiro de Cartografia, Belo Horizonte, 2003. **Anais**. v. 1, p. 1-10, 2003.
- YAMAMOTO, J. K. A review of numerical methods for the interpolation of geological data. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, v.1, n.70, p. 91-116, 1998.
- YANG, C. S.; KAO, S. P.; LEE, F. B.; HUNG, P. S. Twelve different interpolation methods: a case study of Surfer 8.0. In: XX International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, 2004. **Proceedings**. Vol. XXXV, part B-2, p. 778-785.
- YU, Z. W. Surface interpolation from irregularly distributed points using surface splines, with Fortran program. **Computers & Geosciences**, n. 27, p. 877-882, 2001.