

# DETERMINAÇÃO DO DESVIO DA VERTICAL

## *Vertical Deflection Determination*

**Maria Aparecida Zehnpfennig Zanetti<sup>1</sup>**

**Silvio Rogério Correia de Freitas<sup>1</sup>**

**Luis Augusto Koenig Veiga<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>**Universidade Federal do Paraná**

**Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas**

CEP 81531-990 – Curitiba – PR – Brasil

{mazz;sfreitas;kngveiga}@ufpr.br

## RESUMO

Neste trabalho mostra-se a definição e o modelo do Problema Procrustes simples que permite o cálculo das componentes do desvio da vertical através de medidas do posicionamento relativo GPS e medidas de direções de uma estação base para estações alvo. São confrontados resultados obtidos na realização de base de referência terrestre via integração GPS/LPS com aqueles obtidos pelas técnicas da Topografia com Sistemas Topográficos Locais (STL) de acordo com as Normas Brasileiras vigentes. Concluiu-se que a potencialidade de uso do denominado “Problema Procrustes simples” é questionável, na medida em que depende da geometria da rede onde se efetiva a análise.

**Palavras chaves:** Topografia; Geodésia; desvio da vertical; Problema Procrustes simples.

## ABSTRACT

In this work it is shown the definition and the model of the simple Procrustes Problem that permits to compute the vertical deflection components through relative positioning GPS, and measures of directions from the base station to the targets stations. Results are confronted. It can be concluded that the use of simple Procrustes Problem is questionable because it depends on the network geometry where it is applied.

**Keywords:** Topography; Geodesy; vertical deflection; simple Procrustes Problem.

## 1. INTRODUÇÃO

Na realização de pontos sobre a superfície da Terra, tanto a Geodésia como a Topografia utilizam sistemas de coordenadas cartesianas retangulares e sistemas de coordenadas curvilíneas. Estes sistemas apresentam diferentes configurações, em função dos parâmetros de definição e características físicas envolvidas nas suas realizações, como orientação de um de seus eixos de acordo com a vertical, por exemplo.

Atualmente a utilização conjunta de diferentes sistemas de coordenadas tornou-se usual devido ao avanço tecnológico na área. Com isso, a desconsideração de reduções adequadas pertinentes a cada tipo de levantamento traz prejuízos e inconsistências aos resultados obtidos. Por exemplo, uma das reduções não consideradas a serem aplicadas às medidas angulares é o desvio da vertical, cuja determinação não é usual.

O objetivo deste trabalho é mostrar o estabelecimento de uma metodologia para a determinação do desvio da vertical através de observações GPS/LPS, utilizando-se da solução do Problema Procrustes simples.

## 2. DESVIO DA VERTICAL

Todos os corpos na Terra acham-se sujeitos à força da gravidade, que é resultante da força de atração exercida pelas massas terrestres e da força centrífuga decorrente do movimento de rotação.

O campo da gravidade é um campo conservativo, dotado de geopotencial ou potencial da gravidade  $W$ , resultante da soma do potencial de atração gravitacional e do potencial centrífugo.

As superfícies equipotenciais (potencial da gravidade  $W = \text{constante}$ ) são denominadas geopes, e o geóide tem como uma de suas definições a de ser o geope melhor ajustado ao nível médio dos mares em

todo o globo.

Como a distribuição de massas não é homogênea, os geopes são superfícies suavemente irregulares, e perpendiculares em todos os seus pontos às linhas de força do campo da gravidade. Em cada ponto, o vetor gravidade é tangente à linha de força do campo da gravidade. A direção do vetor gravidade determina a vertical do ponto que é utilizada como referência física nos equipamentos de medição utilizados em Topografia e Geodésia.

Denomina-se desvio da vertical  $i$  ao ângulo formado, em certo ponto, pelas normais à superfície equipotencial que passa pelo ponto e ao elipsóide, isto é, o ângulo entre a vertical e a normal (figura 1).

As coordenadas astronômicas estão relacionadas com a vertical em um ponto. As coordenadas geodésicas, vinculadas à normal, são obtidas utilizando os dados de observação, GPS, por exemplo.

Os cálculos geodésicos para obtenção das coordenadas dos vértices são efetuados sobre o elipsóide. Porém, as observações são executadas com um aparelho colocado em uma estação, que se refere à direção da vertical astronômica, que não é normal ao elipsóide.

O cálculo do desvio da vertical não é feito diretamente, mas sim através de suas componentes  $\xi$  e  $\eta$  chamadas respectivamente de componente meridiana e componente 1º vertical (GEMAEL, 1999, p. 19).

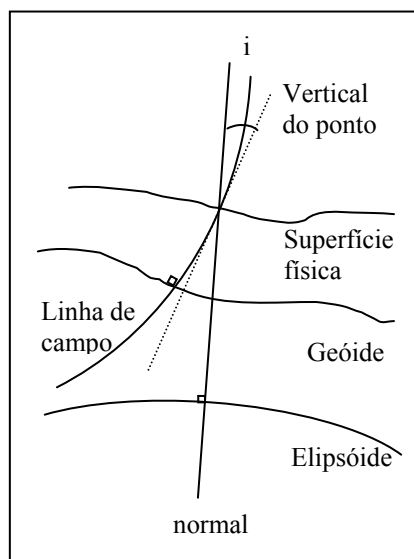


Fig. 1 - Desvio da vertical.

Segundo FEATHERSTONE e RÜEGER (2000, p. 50) o desvio da vertical possui seis utilizações principais em levantamentos de campo:

- a) transformação entre coordenadas astronômicas e geodésicas;
- b) transformação de azimutes astronômicos ou azimutes determinados com giroteodolito em azimutes geodésicos;
- c) redução de direções horizontais e ângulos

medidos ao elipsóide;

d) redução de ângulos zenitais medidos ao elipsóide;

e) redução de distâncias inclinadas medidas eletronicamente ao elipsóide, através de ângulos zenitais;

f) determinação de diferenças de altura a partir de ângulos zenitais e distâncias inclinadas.

A determinação do desvio da vertical ainda requer esforços relativamente grandes, tanto pelo trabalho, como pelo tempo despendido, conduzindo a um alto custo por ponto.

Atualmente, são usualmente aplicados quatro métodos de determinação do desvio da vertical. O primeiro, e mais conhecido, é o método astro-geodésico, onde as componentes do desvio da vertical são determinadas através de coordenadas astronômicas e geodésicas em um mesmo ponto. Inicialmente restrito a áreas continentais e relativo, na medida em que as coordenadas geodésicas eram vinculadas a um Datum local e uma dada superfície de referência. O desenvolvimento da tecnologia em sensores de imagem (CCD) permitiu a revitalização do método astro-geodésico. Usando esta moderna tecnologia de visualização de estrelas e um receptor GPS é possível determinar o desvio da vertical através de um procedimento totalmente automatizado, em tempo-real, através de uma câmera digital zenital, como por exemplo a TZK2-D (HIRT, 2004). Com esta configuração, o método pode ser entendido como apto a fornecer resultados absolutos. Outro método é o gravimétrico (GEMAEL, 1999, p. 149), onde o desvio da vertical é obtido em função de anomalias da gravidade, através da fórmula de Venning-Meinesz. Este terceiro método de determinação do desvio da vertical é contextualizado como método astro-gravimétrico (GEMAEL, 1999, p. 177), que conjuga determinações astro-geodésicas com gravimétricas. Um quarto método de obtenção do desvio é através de medidas GPS/LPS, utilizando-se do Problema Procrustes simples (GRAFAREND e AWANGE, 2000) para o cálculo.

Deve ainda ser enfatizado que os métodos podem ser absolutos ou relativos a um ponto origem, na medida em que os SGRs tenham caráter global ou local. No presente trabalho serão apenas abordadas formas relativas de determinação.

O desvio da vertical pode ser classificado em absoluto quando se refere a um elipsóide geocêntrico e relativo quando se refere a um elipsóide com orientação local. Dependendo da orientação, forma e tamanho do elipsóide utilizado o desvio da vertical pode chegar a 20" em planícies e 70" em regiões acidentadas (FEATHERSTONE e RÜEGER, 2000, p. 47).

## 2.1. Método astro-geodésico de determinação do desvio da vertical

No método astro-geodésico as componentes do desvio da vertical são determinadas através de

coordenadas astronômicas e geodésicas obtidas em um mesmo ponto.

Demonstra-se que (GEMAEL, 1999, p. 19):

$$\xi = \Phi - \phi \quad (1)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi \quad (2)$$

$$\eta = (A_a - A_g) \cot g\phi \quad (3)$$

Tem-se nas (1), (2) e (3):

$\xi$  = componente meridiana

$\eta$  = componente 1<sup>o</sup> vertical

$\Phi$  = latitude astronômica

$\phi$  = latitude geodésica

$\Lambda$  = longitude astronômica

$\lambda$  = longitude geodésica

$A_a$  = azimute astronômico

$A_g$  = azimute geodésico

As equações (1) e (2) permitem transformar grandezas astronômicas em geodésicas, conhecidas as componentes do desvio da vertical, ou possibilitam a determinação das componentes do desvio da vertical, desde que sejam conhecidas as coordenadas astronômicas e geodésicas em uma mesma estação, pelo método astro-geodésico.

Para obter-se o desvio da vertical  $i$  faz-se:

$$i^2 = \eta^2 + \xi^2 \quad (4)$$

Através das equações (2) e (3) obtém-se:

$$A_g = A_a - (\Lambda - \lambda) \operatorname{sen} \phi \quad (5)$$

A equação (5) é a Equação simplificada de Laplace que permite transformar um azimute astronômico em azimute geodésico.

Os vértices geodésicos em que são efetuadas determinações astronômicas de azimute e longitude recebem o nome de Pontos de Laplace.

A equação de Laplace era utilizada em vértices das redes geodésicas clássicas de triangulação, para controlar suas orientações.

O método astro-geodésico determina o desvio da vertical necessário ao cálculo da ondulação geoidal  $N_g$ , comparando coordenadas geodésicas com coordenadas astronômicas. É restrito às áreas continentais, além de conduzir a valores relativos que dependem das coordenadas do datum e dos parâmetros elipsoidais.

## 2.2 Determinação do desvio da vertical através de câmera zenital digital

Recentemente, o desenvolvimento de nova tecnologia em sensores de imagem permitiu

aperfeiçoamentos em instrumentos para observações astro-geodésicas conseguindo-se eficiência, automação, acurácia e capacidade de determinação em tempo-real, a custos razoáveis. Com o desenvolvimento em sensores de imagem CCD, no início dos anos 90, os filmes fotográficos de altos custos foram substituídos por imagens digitais.

Um sistema que utiliza moderna tecnologia CCD para visualização de estrelas integrado com um receptor GPS, permite a determinação do desvio da vertical através de um processo totalmente automatizado e em tempo-real (HIRT, C. e BÜRKI, B., 2006). Trata-se do sistema câmera digital zenital, que contém os seguintes elementos:

a) uma lente direcionada para o zênite;

b) um sensor CCD usado para visualização de estrelas;

c) um receptor GPS para determinação do tempo e das coordenadas geodésicas;

d) dois níveis eletrônicos de alta resolução que referenciam o sistema à vertical;

e) um computador usado como dispositivo de direção e processamento de dados on-line através de software próprio.

Existem dois sistemas relevantes para descrição neste trabalho, já que existe a possibilidade de em futuro próximo serem utilizados no Brasil. São as câmaras zenitais desenvolvidas no IFE (*Institut für Erdmessung*) na Universidade de Hannover e em uso atualmente: a câmera zenital TZK2-D; e a câmera TZK 2000, que foi adquirida e complementada pelo GGL (*Geodesy and Geodynamics Laboratory*) do Instituto de Tecnologia Federal da Suíça. As maiorias das partes óticas e mecânicas dos dois sistemas são idênticas contudo existem algumas diferenças:

a) o sistema TZK 2000, operado pelo GGL, possui nivelamento, controle azimutal, compensação de foco e aquisição de tempo por GPS automaticamente monitorados por computador. Para isto cinco motores foram acoplados ao sistema, três na posição vertical acima dos parafusos calantes, realizam o nivelamento automático por meio do computador. Os outros dois motores são utilizados para o foco automático e rotação azimutal entre a primeira e segunda posição da câmera durante a observação.

b) o nivelamento da câmera digital TZK2-D, utilizada pelo IFE, é feito manualmente por 3 parafusos calantes em 2 níveis eletrônicos, assim como a mudança da orientação para a segunda posição da câmera. O corpo da câmera TZK2-D é composto por uma estrutura inferior fixa e acoplada ao tripé, e uma estrutura superior que contém as lentes, o sensor CCD e os níveis eletrônicos, sendo separada da estrutura inferior por uma esfera especial que permite uma rotação azimutal de 180°, para a realização de medidas em duas posições opostas da câmera.

A figura 2 ilustra a câmera digital TZK2-D.



Fig. 2 – Câmera digital TZK2-D.  
 Fonte: <http://www.ife.uni-hannover.de/forschung/tzk.html>.

A principal vantagem da utilização da tecnologia CCD é a disponibilidade instantânea da imagem, permitindo o processamento digital, imediatamente após a aquisição dos dados. Devido à alta sensibilidade dos sensores CCD é possível visualizar estrelas com magnitude 14, sendo que com uma versão fotográfica da câmera zenital eram possíveis observações de estrelas com magnitude até 10.

Considerando-se os Parâmetros de Orientação da Terra, obtém-se o TU1, que é a escala de tempo acoplado ao Tempo Sideral Médio de Greenwich (GMST) e ao Tempo Sideral Aparente de Greenwich (GAST) utilizado em Astronomia. Devido à alta acurácia dos sinais de tempo GPS, estes são utilizados para determinar as épocas das exposições. O sistema de tempo do GPS está relacionado ao TUC (Tempo Universal Coordenado). O TUC pode ser facilmente convertido no TU1.

Adicionalmente às medidas de tempo os receptores GPS fornecem as coordenadas geodésicas, por método relativo.

As coordenadas astronômicas ( $\Phi$ ,  $\Lambda$ ) descrevem posições na superfície da Terra e as coordenadas equatoriais ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) definem posições de estrelas na esfera celeste. Ambos os sistemas estão unidos pelo GAST (ângulo  $\Theta$  entre o meridiano de Greenwich e o ponto vernal) referidos ao eixo de rotação.

A Astronomia usa a equivalência entre coordenadas astronômicas ( $\Phi$ ,  $\Lambda$ ) e as coordenadas equatoriais ( $\alpha$ ,  $\delta$ ), para uma estrela localizada do zênite do observador, dados por:

$$\Phi = \delta \quad \Lambda = \alpha - \Theta \quad (6)$$

Com isso se uma estrela é localizada no zênite, no tempo  $\Theta$ , determinam-se as coordenadas astronômicas do observador. A direção do zênite, que coincide com a direção da linha vertical local, é interpolada por imagens de estrelas zenitais próximas.

As coordenadas equatoriais das estrelas são extraídas de catálogos digitais como Tycho-2, GSC ou

UCAC. Devido à alta sensibilidade da câmera digital, que permite visualizar aproximadamente 14 milhões de estrelas com magnitude acima de 14 são necessários extensos catálogos estelares.

### 2.3 Determinação do desvio da vertical através de medidas GPS/LPS utilizando os fundamentos do Problema Procrustes simples

Chama-se problema de orientação tridimensional a determinação da matriz de rotação ( $3 \times 3$ ) cujos parâmetros são a longitude astronômica  $\Lambda$ , a latitude astronômica  $\Phi$  e a orientação horizontal  $\Sigma$  no plano horizontal.

O relacionamento entre coordenadas no sistema astronômico local e coordenadas no sistema global geocêntrico, SIRGAS2000, por exemplo, pode ser obtido a partir de medidas de posicionamento GPS e medidas de direções horizontais e verticais efetuadas por um teodolito em uma estação a pelo menos três alvos. Através do Problema Procrustes simples, ou Problema Procrustes parcial, obtém-se o relacionamento entre ( $\Lambda - \lambda$ ) e ( $\Phi - \phi$ ), e com isso as componentes do desvio da vertical.

O Problema Procrustes simples só envolve rotações, e consiste de uma simplificação do Problema Procrustes geral que envolve rotações, translações, escala e reflexão.

A partir de um levantamento GPS, obtém-se as coordenadas cartesianas ( $X, Y, Z$ ) da estação base e as coordenadas cartesianas ( $X_i, Y_i, Z_i$ ) das estações alvo, no Sistema Global, formando um conjunto de vetores  $[F_1, F_2, F_3]$  fixos ao centro de massa da Terra. Adicionalmente, um levantamento efetuado com teodolito proporciona coordenadas cartesianas a partir de coordenadas esféricas, que formam um conjunto de vetores  $[F_{1*}, F_{2*}, F_{3*}]$  fixos à superfície física da Terra. A figura 3 ilustra os dois sistemas de coordenadas envolvidos.

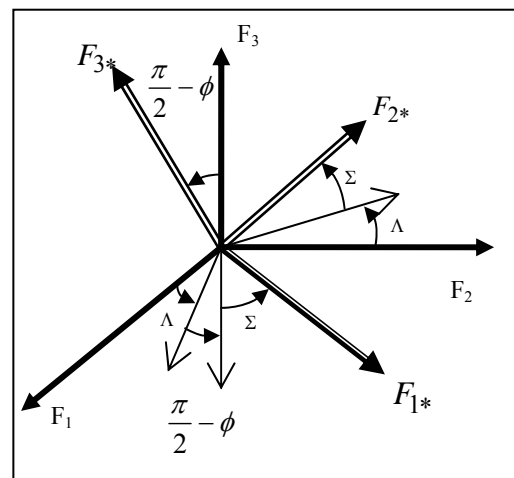


Fig. 3 – Relacionamento entre sistema global e sistema astronômico local.

Fonte: Adaptado de GRAFAREND (1987).

Tem-se então ( $F$ ) formado por coordenadas do sistema global e ( $F_*$ ) formado por coordenadas do sistema astronômico local.

O relacionamento entre ( $F$ ) e ( $F_*$ ) é dado por:

$$\begin{aligned} [F_{1*}, F_{2*}, F_{3*}] &= [F_1, F_2, F_3] R_E^T(\Lambda, \Phi, \Sigma) = \\ [F_1, F_2, F_3] R_3^T(\Lambda) R_2^T\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) R_3^T(\Sigma) \end{aligned} \quad (7)$$

Sendo:

$$R_3(\Lambda) = \begin{bmatrix} \cos(\Lambda) & \text{sen}(\Lambda) & 0 \\ -\text{sen}(\Lambda) & \cos(\Lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) & 0 & -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$R_3(\Sigma) = \begin{bmatrix} \cos(\Sigma) & \text{sen}(\Sigma) & 0 \\ -\text{sen}(\Sigma) & \cos(\Sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

A transformação de coordenadas esféricas em coordenadas cartesianas é realizada utilizando a seguinte igualdade:

$$S_i = \begin{bmatrix} \cos B_i \cos T_i \\ \cos B_i \text{sen} T_i \\ \text{sen} B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x \\ y_i - y \\ z_i - z \end{bmatrix}_{F_*} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (11)$$

Sendo que  $T_i$  representa a direção horizontal medida,  $B_i$  a direção vertical medida e  $S_i$  a distância espacial, fornecida por:

$$S_i = S(X, X_i) = \sqrt{(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} x_i - x \\ y_i - y \\ z_i - z \end{bmatrix}_{F_*} = R_E(\Lambda, \Phi, \Sigma) \begin{bmatrix} X_i - X \\ Y_i - Y \\ Z_i - Z \end{bmatrix}_F \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - x & x_2 - x & \dots & x_n - x \\ y_1 - y & y_2 - y & \dots & y_n - y \\ z_1 - z & z_2 - z & \dots & z_n - z \end{bmatrix}_{F_*} = \quad (14)$$

$$R \begin{bmatrix} X_1 - X & Y_1 - Y & Z_1 - Z \\ X_2 - X & Y_2 - Y & Z_2 - Z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n - X & Y_n - Y & Z_n - Z \end{bmatrix}_F$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} x_1 - x & x_2 - x & \dots & x_n - x \\ y_1 - y & y_2 - y & \dots & y_n - y \\ z_1 - z & z_2 - z & \dots & z_n - z \end{bmatrix}_{F_*} \quad (15)$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} X_1 - X & Y_1 - Y & Z_1 - Z \\ X_2 - X & Y_2 - Y & Z_2 - Z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n - X & Y_n - Y & Z_n - Z \end{bmatrix}_F \quad (16)$$

As matrizes  $Y_1$  e  $Y_2$  são as matrizes de observações, sendo a matriz  $Y_1$  levógira e a matriz  $Y_2$  dextrógira. A matriz de rotação incógnita  $R^T$ , designada por  $X$ , é um conjunto de parâmetros desconhecidos. Com essas considerações tem-se:

$$Y_1 = Y_2^T X \quad (17)$$

Onde não estão considerados os erros de observação e sendo:

$$X = R^T \quad (18)$$

À matriz de rotação ( $R$ ) deve ser imposta uma injunção dada por:

$$X^T X = I_3 \quad (19)$$

Sendo  $E$  a matriz dos erros das medidas coletadas, então a equação (17) pode ser reescrita como:

$$Y_1 = Y_2^T X + E \quad (20)$$

O Problema Procrustes simples consiste em encontrar uma solução para o sistema matricial de equações lineares, fornecido pela equação (20).

$$R = R_3(\Sigma) R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) R_3(\Lambda) \quad (21)$$

Com:

$$0 \leq \Lambda \leq 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} < \Phi < +\frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \Sigma \leq 2\pi$$

A partir das pseudo-observações  $\{Y_1, Y_2\}$  e do ajustamento das equações das pseudo-observações  $Y_1=Y_2X + E$  com respeito às injunções  $X^T X=I_3$ , calcula-se os três parâmetros de orientação (longitude astronômica  $\Lambda$ , latitude astronômica  $\Phi$  e orientação horizontal desconhecida  $\Sigma$ ) a partir de R:

$$\tan \Lambda = \frac{r_{32}}{r_{31}} \quad \Lambda = \arctan \frac{r_{32}}{r_{31}} \quad (22)$$

$$\tan \Phi = \frac{r_{33}}{\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}} \quad \Phi = \arctan \frac{r_{33}}{\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}} \quad (23)$$

$$\tan \Sigma = -\frac{r_{23}}{r_{13}} \quad \Sigma = \arctan\left(-\frac{r_{23}}{r_{13}}\right) \quad (24)$$

Desta maneira chega-se aos valores da longitude astronômica  $\Lambda$ , da latitude astronômica  $\Phi$  e da orientação desconhecida  $\Sigma$ . As observações GPS fornecem a latitude elipsóidica  $\phi$  e a longitude elipsóidica  $\lambda$ . As componentes do desvio da vertical, componente meridiana e componente primeiro vertical, podem então ser calculadas pelas equações (1) e (2).

### 3. METODOLOGIA

Os experimentos realizados objetivaram a confrontação dos resultados obtidos na realização de base de referência terrestre via integração GPS/LPS com aqueles obtidos pelas técnicas da Topografia com Sistemas Topográficos Locais (STL) de acordo com as Normas Brasileiras vigentes.

#### 3.1. Coleta de dados

A coleta de dados incluiu a realização de uma poligonal topográfica em uma região de desnível acentuado e posicionamento por GPS em algumas estações desta poligonal, aí incluídos os pontos inicial e final.

A poligonal foi implantada na BR277, no intervalo que compreende os km 30 e 60, entre os municípios de Morretes e São José dos Pinhais, ambos no Paraná; possui 57 estações, ao longo de aproximadamente 30 km, desnível de 940 m e uma variação aproximada de 1' em latitude e 13' em longitude.

O levantamento topográfico foi realizado nos dias 23, 25, 30 e 31 de maio de 2005, com a estação total robotizada TPS1200 Leica, cuja precisão angular é de 5'' e precisão linear, com prisma padrão, de 2 mm + 2 ppm e compreendeu as seguintes etapas:

a) medidas dos ângulos horizontais, verticais e distâncias da poligonal: além da série inicial para orientação da estação total, foram efetuadas 6 séries de medidas em cada estação, sendo cada série composta de uma Pontaria Direta e uma Pontaria Inversa a ré e a

vante; em posterior análise dos dados, nenhuma série em nenhuma das estações foi rejeitada, considerando como critério de rejeição o dobro da precisão angular do equipamento, ou seja, 10'';

b) medidas da altura do instrumento e das alturas dos refletores a ré e a vante, sendo que, durante toda a execução do levantamento topográfico, os refletores de ré e vante foram mantidos com alturas iguais, no mesmo lance;

c) medidas simultâneas da temperatura seca e pressão para posterior correção das condições meteorológicas nas distâncias;

O posicionamento GPS estático com receptores de dupla frequência foi realizado em duas campanhas: a primeira nos dias 16 e 17 de agosto de 2005 e a segunda no dia 20 de dezembro de 2005, sendo que ambas proporcionaram as coordenadas de 4 estações cada, além de 8 estações por posicionamento estático rápido na primeira campanha, totalizando 16 estações.

### 3.2. Processamento dos dados

#### 3.2.1. Processamento inicial dos dados topográficos

Após a realização do levantamento de campo iniciou-se a fase de processamento dos dados, calculando-se:

a) médias dos ângulos e das distâncias medidas;

b) correção da temperatura e pressão nas distâncias médias através da utilização de ábaco apropriado;

c) desníveis entre as estações através de nivelamento trigonométrico, obtidos pela técnica de refletores a alturas de iguais;

d) altitudes ortométricas.

#### 3.2.2. Processamento dos dados GPS

Em todos os processamentos dos levantamentos GPS, considerou-se a estação PARA como base com coordenadas referidas ao SIRGAS2000 obtidas a partir de IBGE (2005). Neste trabalho utilizou-se os resultados obtidos com o software Leica GeoOffice, sendo que os desvios padrões das coordenadas não foram superiores a 0,001 m em nenhuma estação.

O levantamento estático do dia 16/08/2005 compreende as estações 29A e o do dia 17/08/2005 compreende as estações PE91A e 92.

O posicionamento relativo estático rápido realizado no dia 16/08/2007 compreende as estações RN, 43, 46 e 54 e no dia 17/08/2007 as estações 58, 71, 83A e 86.

A segunda campanha de posicionamento GPS compreendeu as estações 31, 32, 88 e 89.

A figura 4 apresenta o croqui das estações.



### 3.3. Transporte de coordenadas geodésicas

#### 3.3.1. Problema Inverso

Visando obter uma orientação inicial e final da poligonal enquadrada para o transporte de coordenadas geodésicas, a partir das coordenadas das estações 31, 32, 88 e 89, obtidas na segunda campanha de posicionamento GPS estático, pelo software Bernese, efetuou-se o cálculo dos azimutes das direções 31-32 e 88-89, correspondentes às direções inicial e final. Utilizou-se o formulário de Puissant, Problema Inverso.

#### 3.3.2. Problema Direto

Conhecido o azimute da direção inicial 31-32, antes de aplicar o Problema Direto foram efetuados os seguintes cálculos:

- a) redução das distâncias inclinadas ao elipsóide, a partir das distâncias médias corrigidas dos efeitos meteorológicos;
- b) correção da curvatura, a partir das distâncias reduzidas ao elipsóide.

Aplicou-se a seguir o formulário do Problema Direto segundo Puissant, obtendo-se a convergência meridiana e as coordenadas geodésicas, latitude e longitude, para todas as estações, que serão utilizadas na 1ª. iteração de ajustamento. Os azimutes geodésicos em cada estação foram calculados a partir do contra-azimute da direção anterior, do ângulo horizontal envolvido e da convergência meridiana, que variou entre 1'' e 30'', sendo indispensável sua utilização no transporte de coordenadas geodésicas. Foram calculadas também as correções para passar da seção normal à linha geodésica, que devido à magnitude das distâncias medidas, foram menores que o centésimo de segundo de arco, ou seja, não significativas.

### 3.4. AJUSTAMENTO DA POLIGONAL GEODÉSICA ENQUADRADA PELO MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO

O ajustamento da poligonal enquadrada foi realizado considerando-se 48 estações, sendo a estação 32 a primeira e a estação 88 a última. São seis os arquivos de entrada de dados: 47 distâncias, 48 ângulos, 47 azimutes, 47 convergências, 48 latitudes e 48 longitudes.

Os valores observados são os ângulos e as distâncias. O arquivo composto pelos ângulos corresponde à média das séries dos ângulos horizontais medidos em campo. O arquivo das distâncias corresponde à média das distâncias medidas, reduzidas à superfície do elipsóide de revolução.

Os arquivos dos azimutes, convergências meridianas, latitudes e longitudes são obtidos após a execução do problema direto segundo Puissant, para todas as estações.

No presente trabalho o ajustamento foi realizado de duas maneiras: com a matriz diagonal  $\Sigma_{Lb}$  igual à matriz identidade e com a matriz diagonal  $\Sigma_{Lb}$

composta pelas variâncias das medidas angulares e lineares.

Executando-se o ajustamento pelo método das equações de condição, obtém-se os valores observados ajustados dos ângulos, ressaltando-se que, após o ajustamento, não existiram correções significativas a serem efetuadas nas distâncias em nenhuma iteração, pois os valores observados ajustados das distâncias são iguais aos valores observados destas.

Visando obter um ajustamento mais consistente em termos das observáveis, considerou-se a matriz variância-covariância dos valores observados ( $\Sigma_{Lb}$ ) composta pelas variâncias dos ângulos medidos e pela precisão linear ao quadrado da estação total (2mm + 2ppm) e igualmente não existiram correções significativas (ordens de grandeza menores que as resoluções das medidas) a serem efetuadas nas distâncias.

Em ambos os casos considerou-se o ajustamento encerrado na segunda iteração pelo fato do modelo matemático linearizado do método das equações de condições igualar-se a zero.

## 4. RESULTADOS

### 4.1. PROCESSAMENTO DOS DADOS TOPOGRÁFICOS

Para o cálculo das coordenadas das estações da poligonal topográfica enquadrada, as coordenadas geodésicas das estações iniciais, 31 e 32, e finais, 88 e 89, obtidas na segunda campanha de posicionamento GPS, foram transformadas em coordenadas no STL, de acordo com a NBR 14166 (ABNT, 1998), considerando-se a estação 31 como origem e altitude de referência de 471,846 m.

A partir destas coordenadas, efetuou-se o cálculo das demais coordenadas das estações da poligonal enquadrada, através do software Posição (MANFRA, 2000).

Os dados obtidos para o fechamento da poligonal topográfica enquadrada, no STL são:

Perímetro:	22643,725 m
Erro angular:	- 0° 01' 55"
Erro relativo:	1:38956
Desnível total:	906,573 m

### 4.2. TRANSFORMAÇÃO DAS COORDENADAS GEODÉSICAS AJUSTADAS EM COORDENADAS CARTESIANAS TRIDIMENSIONAIS

As coordenadas geodésicas de todas as estações da poligonal, obtidas a partir dos valores observados ajustados, considerando a solução para a matriz variância-covariância composta pelas variâncias das medidas angulares e lineares, foram transformadas em coordenadas cartesianas tridimensionais visando utilização na solução do Problema Procrustes simples.



Para tal, as altitudes ortométricas, obtidas sem a medida da altura do instrumento, foram transformadas em altitudes geométricas através das ondulações geoidais, referidas ao SIRGAS2000, fornecidas pelo programa MAPGEO2004 (IBGE, 2005).

### 4.3. CÁLCULO DO DESVIO DA VERTICAL

#### 4.3.1. Cálculo Preliminar das Componentes do Desvio da Vertical

Com a hipótese da inexistência de erros de observação, um cálculo preliminar para obtenção do desvio da vertical, pode ser feito com as equações:

$$\Delta\xi'' = \phi_T - \phi_{GPS} \quad (25)$$

$$\Delta\eta'' = (\lambda_T - \lambda_{GPS}) \cos\phi_{GPS} \quad (26)$$

Sendo:

$(\phi_T, \lambda_T)$  coordenadas obtidas do transporte de coordenadas a partir dos valores observados ajustados, considerando a solução para a matriz  $\Sigma_{Lb}$  composta pelas variâncias das medidas angulares e lineares.

$(\phi_{GPS}, \lambda_{GPS})$  coordenadas obtidas do posicionamento GPS.

A tabela 3 apresenta os resultados deste cálculo para as estações onde foi efetuado posicionamento GPS.

Os resultados para as componentes da deflexão da vertical obtidas pelo método astro-geodésico são irrelevantes e no problema abordado não evidenciam serem possíveis fontes de erros para o fechamento.

TABELA 3 - CÁLCULO PRELIMINAR DAS COMPONENTES DO DESVIO DA VERTICAL

Estações	$\Delta\xi''$	$\Delta\eta''$
RN	-0,00230	-0,00192
43	-0,00137	-0,00328
46	0,00130	-0,00471
54	0,00753	-0,00348
58	0,00650	-0,00399
71	0,00702	-0,00537
83A	0,00860	-0,00141
86	0,00384	-0,00209
89	-0,00613	0,00024
92	-0,01644	-0,00363
PE91A	-0,01615	-0,00379

#### 4.3.2. Cálculo do Desvio da Vertical utilizando os fundamentos do Problema Procrustes Simples

Segundo AWANGE (1999, p. 30) para a obtenção do desvio da vertical através do Problema Procrustes Simples, são necessárias no mínimo quatro estações, com coordenadas cartesianas tridimensionais X, Y, Z conhecidas no Sistema Global e coordenadas cartesianas tridimensionais x, y, z conhecidas no

Sistema Astronômico Local, com as seguintes características:

- origem em um ponto P na superfície física;
- coordenadas cartesianas, formando um sistema dextrógiro;
- eixo z coincidindo com a direção da vertical local e sentido positivo na direção do zênite;
- eixo x perpendicular ao eixo z e contido no plano do meridiano astronômico do ponto P, com sentido positivo para o Sul astronômico. Este aspecto é discutido na seqüência;
- eixo y perpendicular aos eixos x e z e contado positivamente para o leste astronômico.

Baseando-se em JOHNSON, R.A. e WICHERN D.W. (1998, p. 782) e em SCHÖNEMANN (1966, p. 7) a obtenção do desvio da vertical através do Problema Procrustes Simples foi executada com o software Matlab versão 5.3, onde a matriz  ${}_i(Y_1)_3$  possui coordenadas no Sistema Astronômico Local, adaptadas às definições de AWANGE (1999, p. 17), e a matriz  ${}_i(Y_2)_3$  coordenadas cartesianas tridimensionais no Sistema Global. Têm-se as matrizes  ${}_i(Y_1)_3$  e  ${}_i(Y_2)_3$  a seguir:

$${}_i(Y_1)_3 = \begin{bmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \\ \dots & \dots & \dots \\ x_i - x & y_i - y & z_i - z \end{bmatrix}$$

e

$${}_i(Y_2)_3 = \begin{bmatrix} X_1 - X & Y_1 - Y & Z_1 - Z \\ X_2 - X & Y_2 - Y & Z_2 - Z \\ X_3 - X & Y_3 - Y & Z_3 - Z \\ \dots & \dots & \dots \\ X_i - X & Y_i - Y & Z_i - Z \end{bmatrix}$$

A rotina de cálculo apresentada a seguir foi testada utilizando os dados fornecidos por AWANGE (1999, p. 69) obtendo-se os mesmos resultados.

- Ler  ${}_i(Y_1)_3$  e  ${}_i(Y_2)_3$
- ${}_3C_3 = {}_3(Y_1)'_i(Y_2)_3$
- ${}_3C'_3{}_3C_3 = {}_3Q_3{}_3D1_3{}_3Q'_3$
- ${}_3Q_3$  = auto-vetores de  ${}_3C'_3{}_3C_3$  com  $D1$  = auto-valores de  $C'C$
- ${}_3C_3{}_3C'_3 = {}_3P_3{}_3D2_3{}_3P'_3$
- ${}_3P_3$  = auto-vetores de  ${}_3C_3{}_3C'_3$  com  $D2$  = auto-valores de  $CC'$
- ${}_3R_3 = {}_3P_3{}_3Q_3'$

$${}_3R_3 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Chegando-se aos valores da longitude astronômica  $\Lambda$ , latitude astronômica  $\Phi$  e orientação desconhecida  $\Sigma$ , através das equações (22), (23) e (24).

A tabela 4 apresenta alguns resultados da aplicação do problema Procrustes simples com as coordenadas das estações da poligonal desenvolvida neste trabalho.

TABELA 4 – ALGUNS RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DO PROBLEMA PROCUSTES SIMPLES

Est.	$\Phi$ (S)	$\Lambda$ (W)	$\Sigma$ (S)
83A	25° 37' 41"	49° 00' 44"	0° 05' 48"
86	25° 29' 26"	48° 57' 56"	0° 04' 58"
92	25° 33' 39"	48° 59' 25"	0° 05' 15"

Na tabela 4 observa-se que os valores obtidos apenas aproximam-se de latitudes e longitudes não representando, porém coordenadas astronômicas.

Diversos cálculos foram realizados, com diferentes estações, apresentando sempre inconsistências nos resultados e chegou-se a conclusão que a geometria da poligonal enquadrada realizada neste trabalho, não é favorável à aplicação deste modelo matemático, desenvolvido, de forma sintética, para pontos excêntricos e aproximadamente a uma mesma distância do ponto base. O tratamento dos pontos da poligonal como excêntricos à base adotada implica em distâncias substancialmente diferentes. Na geometria adotada, não existiu possibilidade de geração de um teste em condições similares às soluções corriqueiras obtidas com o Problema Procrustes simples encontradas na literatura.

Sugere-se que novos testes sejam realizados com outra configuração das estações, mais aproximada àquela predita para o método. No entanto é evidente a inadequação da aplicação do método para situações usuais em levantamentos cadastrais.

## 5. CONCLUSÕES

A potencialidade de uso do denominado “Problema de Procrustes Simples” é questionável, na medida em que depende da geometria da rede onde se efetiva a análise. Os testes efetivados com dados sintéticos e ideais são aparentemente excelentes o que não se repete com dados reais, com precisão no mesmo nível da resolução preconizado para o instrumental empregado. Recomendam-se assim novos desenvolvimentos associados ao método que comporte testes com diferentes geometrias, tais como aquelas usualmente encontradas nos levantamentos com LPS.

## 6. AGRADECIMENTOS

Ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná;  
À Concessionária Ecovia Caminho do Mar S/A na pessoa do Eng. Fabio Pereira Martins.

Ao CNPq, processo 479838/2006-2, pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT. **NBR 14166 – Rede de Referência Cadastral Municipal – Procedimento**. ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro. 1998.

ASTRONOMISCHES INSTITUT UNIVERSITÄT BERN. **Bernese GPS Software Version 5.0**. Switzerland. 2005.

AWANGE, J. L. **Integrating the Global Positioning System (GPS) with the Local Positioning System (LPS) – The Threedimensional Orientation Problem**. 85 p. Thesis of the Ph.D. studies in Geodesy. Institute of Geodesy and Geoinformatics. University of Stuttgart. 1999.

FEATHERSTONE, W.E.; RÜEGGER, J. M. The Importance of Using Deviations of the Vertical for the Reduction of Survey Data to a Geocentric Datum. **The Australian Surveyor**, vol. 45, n.2, p. 46-61. dec 2000.

GEMAEEL, C. **Geodésia Física**. 1. Ed. Curitiba: Editora UFPR. 1999.

GRAFAREND, E.W. Der Einfluß der Lotrichtung auf lokale geodätische Netze. **Zfv**. V.8, 1987. p. 413-424.

GRAFAREND, E.W.; AWANGE, J.L. Determination of vertical deflections by GPS/LPS Measurements. **Zfv**. v.8, 2000. p. 279-288.

HIRT, C. **The Digital Zenith Camera TZK2-D – A Modern High-Precision Geodetic Instrument for Automatic Geographic Positioning in Real Time**. Disponível em <<http://www.adass.org/adass/proceedings/adass02/P6-1>> acesso em 06 de junho de 2004.

HIRT, C.; BÜRKI, B. **Status of Geodetic Astronomy at the beginning of the 21<sup>st</sup> Century**. In: Wissenschaftliche Arbeiten de Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik de Universtät Hannover Nr 258. Ed. C. Hirt, pp. 81- 100, 2006.

IBGE . **MAPGEO2004**. Rio de Janeiro: FIBGE.2005. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br>> Acesso em mar. 2005.

JOHNSON, R.A.; WICHERN, D.W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 4. edition. Prentice Hall, New Jersey, 1998. 816 p.

LEICA GEOSYSTEMS AG. **Leica GeoOffice version 2.0**. Switzerland. 2005.

MANFRA & CIA LTDA. **Sistema de Automação Topográfica Posição**: versão 2000. Curitiba, PR. Conjunto de software: 1 CD-ROM e 1 manual. 2000.

MATHWORKS, INC. **Matlab 5.3**. Massachusetts. 1998.

SCHÖNEMANN, P.H. Generalized Solution of the Orthogonal Procrustes problem, **Psychometrika**. Vol. 31 n°.1 p. 1-10. 1966.