



Revista Brasileira de Cartografia (2014) N<sup>o</sup> 66/3: 463-471  
Sociedade Brasileira de Cartografia, Geodésia, Fotogrametria e Sensoriamento Remoto  
ISSN: 1808-0936

## INDICATIVOS DA POSSIBILIDADE DA DIVISÃO DO ESPECTRO GEPOTENCIAL COM BASE NO DESENVOLVIMENTO DA ALTURA GEOIDAL EM UM ÚNICO PONTO A PARTIR DE WAVELETS

*Evidences of the Possibility of Division of Geopotential Spectrum Based on  
Development of Only one Geoidal Height from Wavelets*

**Rogers Ademir Drunn Pereira<sup>1</sup> & Sílvio Rogério Correia de Freitas<sup>2</sup>**

**<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas – UFPEL**  
**Setor de Geomática / Departamento de Engenharia Rural**  
Av. Eliseu Maciel, s/n. Campus Capão do Leão. Capão do Leão/RS  
rogers.pereira@ufpel.edu.br

**<sup>2</sup>Universidade Federal do Paraná – UFPR**  
**Centro Politécnico da Universidade Federal do Paraná / Setor de Geomática**  
R. Cel. Francisco Heráclito dos Santos, 210, Jardim das Américas, Curitiba - PR, Brasil - CEP: 81531-970  
sfreitas@ufpr.br

*Recebido em 03 de Setembro, 2013/ Aceito em 14 de Maio, 2014*  
*Received on September 03, 2013/ Accepted on May 14, 2014*

### RESUMO

No cálculo de geoides ou quase-geóides gravimétricos normalmente há uma divisão arbitrária do espectro geopotencial. Tal divisão corresponde a diferentes faixas dependendo da época dos referidos cálculos. Neste trabalho introduz-se uma metodologia para divisão de tal espectro com base no conhecimento das amostras de alturas geoidais de um determinado ponto, desenvolvidas de grau em grau a partir de Modelos Globais do Geopotencial e wavelets. As wavelets demonstraram a existência de vazios geopotenciais ao longo das frequências de modelos provenientes da plataforma GOCE e do EGM2008 que podem ser utilizadas para definir faixas bem delimitadas do espectro. Discussões adicionais apresentam a necessidade de uma metodologia que permita fazer uma divisão clara do espectro geopotencial independentemente da época e metodologia utilizada.

**Palavras-chave:** Geopotencial, Espectro, Divisão.

### ABSTRACT

To obtain geoid or quasi-geoid surfaces usually an arbitrary division of geopotential is required. This division points out different spectra bands depending on time of computing considered. In this work, a methodology to divide the geopotential spectra based on development of geoidal heights, order to order from a Global Geopotential Model and wavelets is showed. The wavelets inferred the existence of lacks in geopotential spectra which can be used for determining spectra bands. Further discussions shows the importance in obtaining a methodology that allow get a clear division of geopotential spectra free of time and methodology used.

**Keywords:** Geopotential, Spectrum, Division.

## 1. INTRODUÇÃO

A divisão moderna do espectro geopotencial em curtos, médios e longos comprimentos de onda permite o cálculo de funcionais associados a partir de diferentes fontes de dados. Isto é vantajoso porque permite a uma única pessoa o cálculo do geóide/quase-geóide sem, no entanto, ter que observar todas as informações necessárias a campo ou ainda organizá-las a partir de um banco de dados. Basta que exista um banco de dados adequado para que o interessado em altitudes físicas tenha um geóide com precisão suficiente para as obras de engenharia. Estas características são especialmente importantes também para a conexão de um geóide local a um Sistema Global de Altitudes (por exemplo, o caso do Brasil é apresentado em PALMEIRO et al, 2013).

A divisão apresentada no parágrafo anterior trata-se de uma convenção, geralmente motivada pela frequência de amostragem de algum tipo de observação, como por exemplo, o valor da gravidade. Esta convenção faz com que a cada atualização dos Modelos Globais do Geopotencial (MGGs) surja uma corrida por modelos locais, uma vez que os MGGs – que estão associados somente aos longos comprimentos de onda - contribuem com mais de noventa por cento no cálculo de alturas geoidais (SCHWARZ, 1984) que permitem a substituição do nivelamento geométrico convencional pelo nivelamento GNSS, desde a resolução as informações seja adequada para tanto.

Dado o esforço computacional empregado e a quantidade de dados utilizados nestes cálculos, apresenta-se um critério baseado em *wavelets* para discretização do espectro geopotencial a fim de que se minimize o esforço a cada cálculo de, por exemplo, modelos geoidais locais. Este critério visa então a dois objetivos: a) fornecer subsídios para elaboração de uma metodologia que substitua a convenção ora descrita (que depende da instituição ou do calculista) por um conjunto de análises matemáticas que forneça conclusões independentemente da época e tecnologia disponível e b) contribuir com uma alternativa para as ferramentas com base em densidade de potência espectral para a análise da eficiência dos modelos geoidais em uma dada faixa de frequência.

Será demonstrado que a análise *wavelet* do espectro de Fourier para a altura geoidal é capaz de denunciar descontinuidades que caracterizam zonas limítrofes do espectro geopotencial. Assim, cada modelo teria suas próprias subdivisões com base no potencial de energia que cada um poderia desenvolver. Esta análise usualmente é realizada a partir do cálculo da potência espectral de coeficientes de modelos do Geopotencial.

## 2. REPRESENTAÇÃO DO GEOPOTENCIAL

O geopotencial ( $W$ ) é derivado da soma dos potenciais gravitacional ( $V$ ) e centrífugo ( $\Phi$ ), definido segundo Hofmann-Wellenhof & Moritz (2005, p. 44):

$$W = W(x, y, z) = V + \Phi \quad (01)$$

E é a base para a obtenção de, por exemplo, alturas geoidais, componentes do desvio da vertical, distúrbios e anomalias da gravidade (Ibid., Cap. 2), ditos funcionais do geopotencial (BARTHELMES, 2012). Estas quantidades, todavia, só podem ser determinadas mediante o conhecimento do potencial de um elipsóide de referência, chamado esferopotencial, denotado por  $U$ , definido em Heiskanen & Moritz (1967). Chama-se Potencial Perturbador ( $T$ ) à diferença entre  $W$  e  $U$  (Ibid.).

É possível encontrar um modelo global que expressa  $T$  em qualquer ponto da superfície da Terra. Este modelo é dado por coeficientes  $C_{n,m}$  calculados a partir de observações diretas e indiretas de satélites altímetros, gradiômetros, gravímetros - dentre outros instrumentos, e mesmo integrando-se outros dados. Ele é expresso em termos de somatórios de senos e cossenos podendo ser encontrado, por exemplo, em Petrovskaya et al (2001):

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \quad (02)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \tilde{C}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda)$$

Em que

$r$	distância geocêntrica
$\theta$	ângulo polar ou colatitude
$\lambda$	Longitude
GM	constante gravitacional multiplicada pela massa da Terra
$\bar{Y}_{n,m}$	Funções completamente normalizadas de Legendre.
$\tilde{C}_{n,m}$	Coeficientes harmônicos completamente normalizados

O cálculo é feito então de modo que as componentes  $T$  de cada unidade de resolução (e.g. aproximadamente 9 km no caso do EGM2008) sejam uma combinação de frequências ortonormais entre si e o modelo funciona como se o conjunto de frequências fosse se alterando espacialmente para cada ponto da superfície da Terra. Este ponto de vista é apresentado em Freedon & Michel (2000, p.189). Surge, desta óptica, uma divisão natural do espectro geopotencial associada ao grau ( $m$ ) e ordem ( $n$ ) de expansão do somatório, apresentado em (02). Um Modelo Global do Geopotencial então nada mais é do que a resolução da (02) para os coeficientes  $C_{n,m}$ . Os detalhes importantes desta resolução são apresentados, entre outras fontes, no trabalho de Mainville (1986).

Esta divisão, por sua vez, também tem as suas interfaces. Dependendo da técnica (por exemplo, os médios comprimentos de onda normalmente são associados à gravimetria) e da época, assume-se que uma faixa do espectro citado faz parte dos *longos comprimentos de onda do geopotencial*, que outra faixa faz parte dos *curtos comprimentos de onda do geopotencial*, e logicamente, a faixa intermediária faz parte dos *médios comprimentos de onda do geopotencial*.

No Laboratório de Referenciais Geodésicos e Altimetria por Satélites (LARAS) da UFPR a seguinte convenção é empregada para os comprimentos de onda do geopotencial:

$$\begin{aligned} \text{Longos: } m &= [2, 250] \\ \text{Médios: } m &= (250, 360) \\ \text{Curtos: } m &= (250, 2160] \end{aligned} \quad (03)$$

E, como já dito, estas convenções servem para separar os efeitos globais (longos

comprimentos de onda do geopotencial), dos efeitos locais (curtos comprimentos de onda), e dos seus intermediários (médios comprimentos de onda) quando o objetivo é a determinação de alguma quantidade vinculada ao potencial perturbador (e.g. a altura geoidal  $N$ ).

Todavia, estas linhas delimitadoras são tênues, uma vez que os intervalos citados na (03) são dependentes da época e da metodologia empregada no desenvolvimento dos modelos de geopotencial (Vide, por exemplo, Rapp, 1972, onde os longos comprimentos de onda estão entre 2 e 10, os intermediários estão entre 11 e 100, os curtos estão entre 101 e 1000; e os comprimentos de onda acima de 1000 são definidos como muito curtos).

### 2.1 Os modelos GOCE e EGM2008

O modelo EGM2008 é um modelo desenvolvido pela Inteligência Geoespacial Norte-America e é um modelo completo até o grau e ordem 2150 contendo graus adicionais até 2190 e ordem 2159 (NGA, 2012). Conforme Pavlis et al. (2008), o EGM 2008 é calculado a partir de pelo menos 5 fontes de dados diferentes. Entre elas, é importante citar, dados do satélite GRACE e o modelo de altitudes DNSC07.

O modelo GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R3 é um modelo desenvolvido pela Universidade de Tecnologia de Graz (Áustria), derivado de dados do satélite GOCE e, denominado neste trabalho, à guisa de simplificação, somente de modelo GOCE. Destaque-se que existem outros modelos provenientes desta mesma plataforma. Neste caso, o modelo foi derivado somente de informações da órbita e dos gradiômetros a bordo do satélite. É completo até grau e ordem 250. Todas estas informações podem ser encontradas em ICGEM (2012).

### 3. ANÁLISE WAVELET

A análise *wavelet* pode ser compreendida como um banco de filtros, passa alta e passa baixa no qual o sinal é dividido em componentes de aproximação (A) e componentes de detalhe (D). Na Figura 1, por exemplo, o sinal original  $S$  é filtrado e então dois novos sinais são gerados: a aproximação  $A$  e o detalhe  $D$ . Depois, filtra-se a aproximação  $A$ . O resultado é  $(A)A$ , ou seja, a aproximação de  $A$  e,  $(A)D$ , ou seja, o detalhe de  $A$ . É possível filtrar novamente  $(A)A$ , e então

teriam-se dois novos sinais: (AA)A e (AA)D. Estes representam a suavização ou aproximação de (A)A e o detalhe de (A)A, respectivamente. Pode-se repetir o processo até que se chegue a um único elemento amostral.

Destaque-se que não é possível traçar paralelos totalmente equivalentes para os longos e curtos comprimentos de onda determinados por outros gêneros de transformadas, como por exemplo, a de Fourier. Na prática, a principal consequência deste fato é que o espectro da transformada de Fourier não é totalmente equivalente ao espectro da transformada *wavelet*.

Deve ser destacado neste trabalho o fato de que as *wavelets* são ferramentas predispostas à localização temporal, quando o objetivo é análise de séries temporais. Esta concepção pode ser extrapolada para a localização espacial, uma vez que não há interesse neste trabalho em descobrir quando um fenômeno ocorreu, mas sim, onde ele ocorreu. Mais especificamente, aqui se busca saber em qual frequência o fenômeno ocorreu.

Matematicamente, as *wavelets* são funções que envolvem um parâmetro de translação ( $k$ ), um parâmetro de escala (normalmente esta depende do tamanho da amostra original, uma vez que a escala sempre divide o tamanho da amostra por dois) e, uma tradicionalmente definida na literatura, função base conhecida como função mãe  $\psi$  (e.g. BURRUS et al., 1998). O conjunto de coeficientes  $a_{j,k}$  da função

$$f(t) = \sum_{j,k} a_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (04)$$

Com:

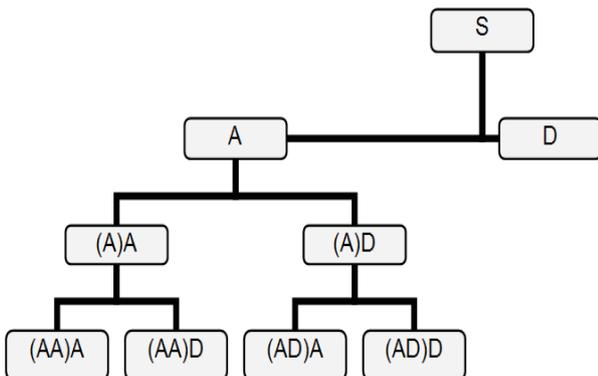


Fig. 1 – Esquema de um sinal decomposto em *wavelets*.

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < t < 0.5 \\ -1 & \text{para } 0.5 < t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

chama-se transformada *wavelet* discreta. A (05) indica que se trata de uma *wavelet* de Haar. A transformada reside no fato de calcular os  $a_{j,k}$ .

#### 4. METODOLOGIA

Pode-se dizer que os resultados serão confeccionados em duas etapas: a) demonstração de que há dificuldade em tratar os de uma série harmônica de alturas geoidais como sendo proveniente de uma distribuição normal e/ou estacionária e, b) transformada *wavelet* da referida série harmônica de alturas geoidais.

Utilizando-se ferramenta da Associação Internacional de Geodésia (ICGEM, 2012), obtiveram-se valores de altura geoidal ( $N$ ) derivados dos MGGs GOCE e EGM2008, apresentados anteriormente, para a latitude  $\phi = -30^\circ$  e para a longitude  $\lambda = -55^\circ$ . Esta escolha foi totalmente aleatória com o único objetivo de apresentar os aspectos metodológicos. As alturas geoidais foram calculadas desde o grau  $m = 2$  até  $m = 240$ . Embora no caso do EGM 2008 fosse possível calcular até  $m = 2190$ , optou-se pelo corte em  $m = 240$  visando-se a possibilidade de comparação entre dois modelos de características diferentes, como apresentado na seção 2. Tomou-se esta operação como sendo equivalente a resolver a (02) variando-se  $m$  de unidade em unidade. Em seguida, calculou-se a diferença em altura geoidal obtida entre os MGG GOCE e EGM2008; gerou-se um histograma destas diferenças objetivando-se estimar a normalidade destas diferenças cujo significado principal está associado às operações como a média entre os dois modelos ser a média real em um modelo estocástico. Também se testou igualdade entre amostras com o teste F de Snedecor.

A demonstração de vazios geopotenciais segue as seguintes etapas:

A expansão, de grau em grau dos modelos EGM2008 e GOCE. Esta etapa compreende a expansão em Séries de Fourier dos dados da altura geoidal. Isto significa dizer que aquela quantidade, referida a um único ponto, é expressa segundo a evolução em frequência  $m$  do grau

de desenvolvimento do modelo geopotencial escolhido. Esta operação gera uma série no domínio das frequências, como a Figura 2.

Faz-se a análise wavelet da série no domínio das frequências. Seria esperado que, se as informações fossem bem distribuídas dentro do espectro total, então a análise não seria capaz de denunciar descontinuidades, que estão presentes para dados do EGM2008 e GOCE. Todavia, estas descontinuidades estão presentes quando se plota o espectro wavelet total;

No sentido de verificar a variabilidade da fronteira encontrada com a transformada *wavelet* buscou-se uma técnica, de características paramétricas, para validar a não-invariância do sistema, antes e depois da interface obtida com *wavelets*. Utilizou-se a idéia apresentada em Araújo (2006) apud Moreira (2008), que diz o seguinte sobre sistemas lineares a parâmetros variantes (LPV):

Um sistema LPV pode ser descrito através das equações a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}(\theta(t)) x(t) + \mathbf{B}(\theta(t)) u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}(\theta(t)) x(t) + \mathbf{D}(\theta(t)) u(t) \end{aligned} \quad (06)$$

Este sistema tem características não-lineares quando depende de outros parâmetros além do tempo  $t$  (Ibid.). Novamente, aqui se faz uma substituição da variável temporal; neste caso, o tempo pela frequência. Para verificar a presença de variação no sistema adicionou-se ainda a matriz  $\mathbf{K}(t)$  e a variável  $e(t)$  no sistema da (06), sabendo-se que os demais coeficientes ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ ) são apenas coeficientes vetoriais necessários ao ajuste do sistema linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}(\theta(t)) x(t) + \mathbf{B}(\theta(t)) u(t) + \mathbf{K}(\theta(t)) e(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}(\theta(t)) x(t) + \mathbf{D}(\theta(t)) u(t) + e(t) \end{aligned} \quad (07)$$

## 5. RESULTADOS

O valor da altura geoidal, desenvolvida de grau em grau, desde  $m=2$  até 240 para o EGM2008 e para o GOCE, está ilustrado na Figura 2.

Embora não seja possível notar separadamente, diferenças sutis (de até 25 cm) são visualizadas quando se faz a diferença entre as ordenadas de ambos os gráficos, como pode ser visualizado na Figura 3, abaixo.

A anormalidade dos dados pode ser visualizada plotando-se um histograma das diferenças encontradas na Figura 3. Este gráfico é apresentada na Figura 4, a seguir.

O teste  $W_{teste}$  Shapiro-Wilks e o valor de P para este teste, com hipótese nula para os dados que vem de distribuição normal com 95% de significância, foram respectivamente:

$$W_{teste} = 0.174 \quad (08)$$

Com a explicação do teste expressa na seção de conclusão. Para o teste F de Snedecor, comparando-se dados do GOCE e do EGM2008 (com 95% de significância), tem-se:

$$F = 0.9916 \quad (09)$$

O teste indica que os dados provavelmente

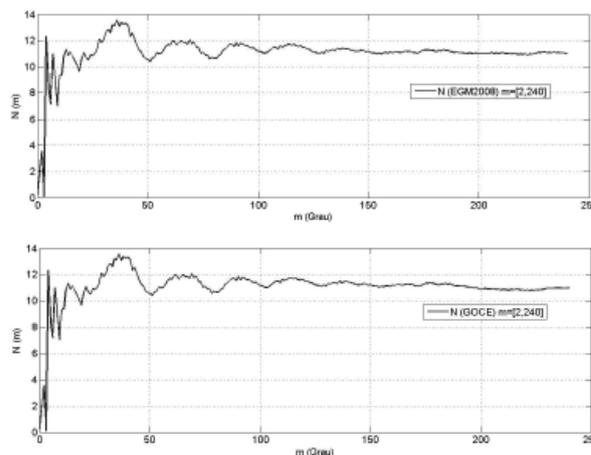


Fig. 2 – Alturas geoidais no intervalo  $m=[2,240]$  para o EGM2008 (acima) e GOCE (abaixo).

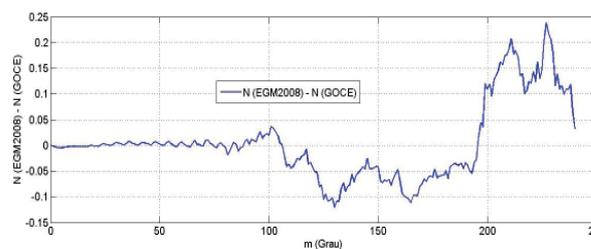


Fig. 3 – Diferenças em altura geoidal - em metros- de grau em grau. EGM2008 – GOCE, com  $m=[2,240]$ .

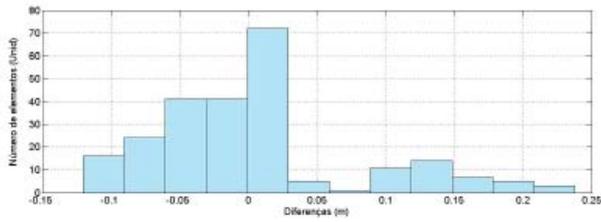


Fig. 4 – Histograma das diferenças em altura geoidal EGM2008 - GOCE.

vêm de uma amostra similar, apontando novamente a necessidade de uma metodologia para a delimitação do espectro. A decomposição em *wavelets* de Haar das alturas geoidais provenientes do EGM2008, em cinco níveis, fica como na Figura 5. Ali podem ser observadas descontinuidades que estão normalmente associadas a mudança de observação.

E a mesma decomposição para as alturas geoidais do GOCE (Figura 6).

Cabe frisar o significado das análises representadas nestas figuras. Houveram 5 filtragens do sinal. Na primeira, separou-se uma aproximação do sinal original (A) do ruído (D). Este primeiro detalhe é compreendido como  $d_1$  na Figura 5 e Figura 6.

Em seguida, filtrou-se A mais uma vez, o que originou a segunda aproximação A(A) e o ruído da primeira aproximação A(D), chamado nas figuras 5 e 6 de  $d_2$ . O processo repetiu-se, passando por  $d_3$ ,  $d_4$  e, finalmente,  $d_5$ . s é o sinal original e  $a_5$  é a suavização do sinal n quinto nível de decomposição. Na figura a seguir (Figura 7) está contida esta idéia, onde se apresenta um esquema mais claro de como ocorreu a filtragem dos sinais.

Se os sistemas forem invariantes no tempo (neste caso, no espaço), a resolução de (07) indicaria coeficientes aproximadamente iguais a zero para  $\mathbf{K}$ . O inverso pode ser tomado como verdade até determinado grau de significância. Este grau de significância não será discutido nesta pesquisa.

A seguir apresentam os resultados numéricos da resolução de (07). Entende-se que estes resultados são importantes para a

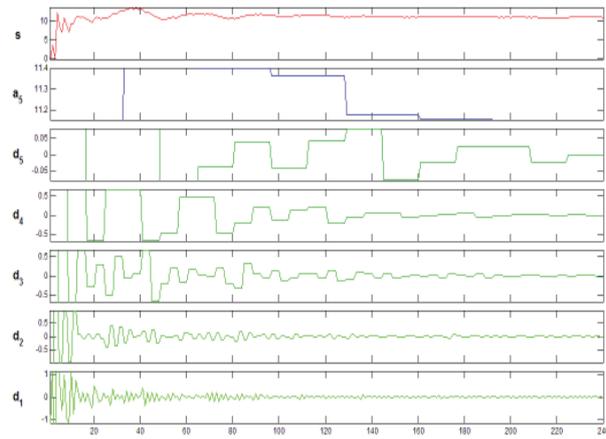


Fig. 5 – Decomposição em *wavelets* de Haar para as alturas geoidais do EGM2008 (n=[2,240]).

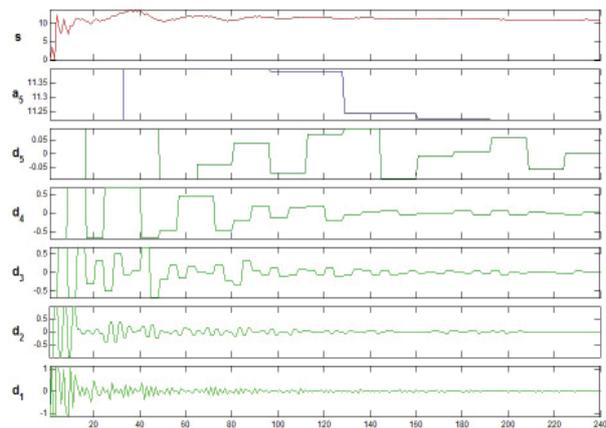


Fig. 6 – Decomposição em *wavelets* de Haar para as alturas geoidais do GOCE (n=[2,240]).

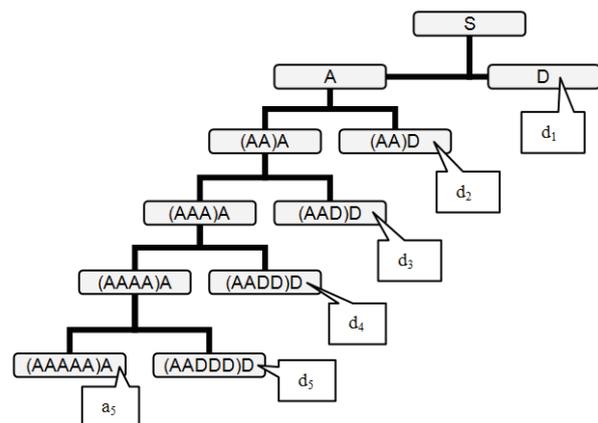


Fig. 7 – Esquema da decomposição *wavelet* utilizada.

verificação da variabilidade dos coeficientes segundo as faixas do espectro escolhidas.

Resolvendo-se a 07 para  $m=[31,149]$  encontra-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1.002 & 9.134 \cdot 10^{-5} \\ -0.00032304 & 0.99983 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -2.131 \cdot 10^{-4} \\ -3.0115 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [183.5 \quad -130.7] \\ \mathbf{D} &= [0] \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0.0042606 \\ 0.00025716 \end{bmatrix} \\ x(0) &= \begin{bmatrix} 7.8335 \\ 0.762 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

O mesmo para  $m=[151,240]$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1.002 & 0.00055859 \\ -4.2665 \cdot 10^{-5} & 0.99985 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -2.6945 \cdot 10^{-3} \\ -3.2797 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [101.3 \quad 8.9] \\ \mathbf{D} &= [0] \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0.0033116 \\ 0.011593 \end{bmatrix} \\ x(0) &= \begin{bmatrix} -2.807 \\ 9.4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

E com  $m = [2,240]$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1.002 & 0.00072727 \\ -3.5415 \cdot 10^{-5} & 0.99984 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -4.2183 \cdot 10^{-5} \\ -5.1482 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [659.9 \quad 634.2] \\ \mathbf{D} &= [0] \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} -0.00058272 \\ 0.0028846 \end{bmatrix} \\ x(0) &= \begin{bmatrix} -4.3792 \\ 4.5564 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

## 6. CONCLUSÕES

Considerando-se que o nível  $a_5$  representa a suavização (ou aproximação) do espectro no quinto nível de decomposição, há uma clara descontinuidade do sinal em  $m \sim 30$  e outra em aproximadamente  $m \sim 130$ . Estas descontinuidades podem ser associadas claramente à mudança de observacional utilizada na confecção dos modelos: no primeiro caso, informações derivadas diretamente de informações sobre órbita dos satélites; no segundo, informações derivadas de altimetria por satélites (caso do EGM2008) ou de gradiometria (caso do GOCE). Este fato reforça o argumento da utilização de metodologias que não sejam de todo arbitrárias, uma vez que estes resultados, numéricos, têm associação direta com as componentes físicas de cada modelo.

Descontinuidades também podem ser vistas nos níveis de detalhe  $d_3$ ,  $d_4$  e  $d_5$ . Estas podem estar associadas às características de ortogonalidade do modelo, uma vez que durante o ajuste dos MGGs a energia em cada frequência é calculada para ser máxima em cada componente. Este fato não ocorre devido à mudança de técnica para cada comprimento de onda, ou seja, embora matematicamente isso seja desejável, não é possível garantir suavidade na transição dos diferentes graus, justamente por estarem associados a diferentes técnicas.

As soluções (10), (11) e (12) indicam que não haveria variabilidade do sistema caso a convenção apresentada com *wavelets* para o espectro geopotencial fosse utilizada. A mesma análise não foi possível com  $m < 30$  devido à falta de graus de liberdade para solucionar o sistema de equações da (07). Resultados nas mesmas faixas dos dois parágrafos acima podem ser reproduzidos com outras *wavelets*-mãe (e.g. biortogonais, Daubechies, etc).

Se a suavização do sinal ( $a_5$ ) for tomada como referência, então é possível separar o espectro geopotencial ou pelo espectro representado em ( $a_5$ ) ou até mesmo pela própria amostra, Cabe lembrar que neste estudo foi abordada somente a altura geoidal – o que significa que análises similares para outros funcionais devem ser testadas.

A contribuição para o cálculo de alturas

geoidais deve, no entanto, ser estudada mais criteriosamente em função da principal técnica utilizada para a obtenção de modelos geoidais: a metodologia *remove-restore*. Nesta técnica, anomalias da gravidade residuais são obtidas da subtração de anomalias da gravidade oriundas da gravidade observada em relação a anomalias da gravidade obtidas do truncamento de algum MGG nos longos comprimentos de onda. Estas anomalias residuais são utilizadas na Integral de Stokes (não referida aqui), que gera alturas geoidais residuais, posteriormente somadas às alturas geoidais provenientes do mesmo modelo truncado e referido neste parágrafo. Assim, ainda que seja numa escala centí ou, possivelmente, milimétrica, os resultados serão afetados pela escolha ou convenção utilizada para os longos, médios e curtos comprimentos de onda.

O teste F das duas amostras selecionadas indicaram que elas têm características similares no sentido estatístico, o que talvez possa justificar os mesmos resultados para as fronteiras encontradas a partir da análise *wavelet*. Tanto o histograma quanto o teste de normalidade (Em que *P* da (08) teria um mínimo de 0.05 para que a amostra fosse normal) apontaram que, quaisquer modelos baseados em distribuição normal não devem ser utilizados para tentar reproduzir o comportamento das frequências, pelo menos, aquelas associadas à altura geoidal. Este fato se soma aos indícios já apresentados no sentido da construção de uma nova divisão espectral independente da tecnologia presente e da época como também caminham no sentido da modernização dos sistemas geodésicos frente em vista das novas tecnologias (como apresentado em DE FREITAS et al, 2012). Por último, convém dizer que normalmente o espectro dos modelos é definido com base na sua potência espectral. Assim, apesar de ser uma análise pontual, este trabalho apresenta uma idéia diferente daquela tradicionalmente utilizada ocupando-se da propriedade de detecção de descontinuidades das *wavelets*.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARTHELMES, F. **Definition of Functionals of the Geopotential and their calculation from spherical harmonic models**. Potsdam: GFZ German Research Centre for Geosciences, 2012. Disponível em < [\[potsdam.de/ICGEM/theory/str-0902 .pdf\]\(http://potsdam.de/ICGEM/theory/str-0902.pdf\) >. Acesso em 08/02/2012. 36 p.](http://icgem.gfz-</a></p>
</div>
<div data-bbox=)

BURRUS, C.S.; RAMESH, A.G.; GUO, H. **Introduction to Wavelets and Wavelets transforms – A primer**. Upper Sadle River: Prentice Hall, 1998. 268 p.

DE FREITAS, S.R.C; DALAZOANA, R.; FERREIRA, W.G. The spatial age and the new paradigms in Geodesy: Implications for surveying and mapping in Brazil. **Revista Brasileira de Cartografia**. 2012. n.º 64/6. Pp.845-862.

FREEDEN, W.; MICHEL, V. Least-squares geopotential approximation by Windowed Fourier Transform and Wavelet Transform. **Wavelets in the Geosciences – Lecture Notes in Earth Sciences**. v.90, p. 189-241, 2000.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1967. 364 p.

HOFMANN-WELLENHOF, B; MORITZ, H. **Physical geodesy**. New York: Springer Wien, 2005. 403 p.

ICGEM. Datasheet *go\_cons\_gcf\_2\_tim\_r3*.pdf. **Global Gravity Fields - GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R3**. Disponível em < <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>>. Acesso em 10/02/2012.

MAINVILLE, A.; The Altimetry-Gravimetry problems using orthonormal base functions. **Reports of the Department of Geodetic Science – Report No. 373**. The Ohio State University: Columbus, 1986. 203 p.

MOREIRA, W. J. **Identificação linear a parâmetros variantes no tempo de sistemas não-lineares**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Instituto Militar de Engenharia: Rio de Janeiro, 2008. 106 p.

NGA. **National Geospatial-Agency Agency – Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)**. Disponível em < <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/>> Acesso em 10/02/2012

PALMEIRO, A.S.; DE FREITAS, S.R.C.; DALAZOANA, R. Análise do Vínculo do Datum Vertical Brasileiro a um Sistema Global

de Altitudes. **Revista Brasileira de Cartografia**. 2013. n.º 65/6. pp. 1097-1111.

PAVLIS, N.K.; HOLMES, S.A.; KENYON, S. C.; FACTOR, J.K. An Earth Gravitational Model to 2160: EGM2008. **EGU General Assembly 2008**. Vienna, Austria, April 13-18, 2008. 37p.

PETROVSKAYA, M.S.; VERSHKOV, A.N.; PAVLIS, N.K. New analytical and numerical approaches for geopotential modeling. **Journal of Geodesy**. v.75, p.661-772, 2001.

RAPP, R. H.; Geopotential Coefficient Behavior to High Degree and Geoid Information by Wavelength. **Reports of the Department of Geodetic Science – Report No. 180**. The Ohio State University: Columbus, 1972. 22p.

SCHWARZ, K.P.; Data types and their spectral properties. In: SCHWARZ, K.P. **Local Gravity Field Approximation**. Kalgary: Division of Surveying Engineering, 1984. p.1-66