

A SEPARAÇÃO ENTRE O GEOIDE E O QUASE GEOIDE: UMA ANÁLISE NO CONTEXTO BRASILEIRO

The Separation Between Geoid and Quasigeoid: an Analysis in the Brazilian Context

Vagner Gonçalves Ferreira¹
Silvio Rogério Correia de Freitas¹
Bernhard Heck²

¹Universidade Federal do Paraná – UFPR
Departamento de Geomática
Centro Politécnico, 81531-990, Curitiba, PR, Brasil
vagnergf@gmail.com
sfreitas@ufpr.br

²Universidade de Karlsruhe
Instituto de Geodésia
Englerstraße 7, 76131, Karlsruhe, Alemanha
bernhard.heck@kit.edu

RESUMO

Trata da separação entre o geóide e o quase geóide avaliando as metodologias tradicionalmente empregadas para a quantificação desta separação. O conhecimento da separação entre o geóide e o quase geóide com precisão na ordem do centímetro, é essencial para a realização de redes de referência verticais modernas. Propõem-se uma alternativa mais realista para a avaliação da gravidade média ao longo da linha de prumo com o intuito de calcular a referida separação. Para tanto, determinou-se um modelo de variação de densidade das massas topográficas para uma área de estudos. Os resultados mostram a necessidade da referida modelagem tendo em vista que somente o uso do valor padrão $2,67 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ induz erros significativos na separação geóide – quase geóide. Em vista da metodologia proposta, testes numéricos e análises procedidas, conclui-se que a determinação consistente da superfície do geóide a partir da superfície do quase geóide é possível, com uma precisão de poucos centímetros, mesmo para as áreas com grandes variações de altitude.

Palavras-chave: Densidades, Altitudes, Linha de Prumo.

ABSTRACT

The traditionally methodologies for the separation between the geoid and quasigeoid has been evaluated. Therefore, an alternative approach for the evaluation of the gravity average along the plumb line in order to improve the knowledge of that separation is proposed here. Furthermore, a simple model variation of density for the topographic masses is proposed for the present study. The results show the need to know such a model, considering that the use of the standard value $2.67 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ differs significantly if considered a model for density variation. The methodology, numerical tests, results and discussion show that it is possible to determine the geoid from the quasigeoid with a precision of few centimeters even in regions with a large variations of heights.

Keywords: Density, Heights, Plumb Line.

1. FUNDAMENTAÇÃO

O entendimento da separação entre o geóide e o quase geóide é importante no contexto da modernização do sistema altimétrico brasileiro. Esta

separação reflete a diferença entre as altitudes do tipo ortométricas das normais. Independente de qual o sistema de altitudes adotado pelos países contíguos pode-se efetivar a conversão das altitudes entre estes sistemas com modelagem adequada. Portanto, a modelagem da transformação precisa entre altitudes normal e ortométrica faz-se necessária, muito embora

possa haver no futuro uma referência unívoca para os números geopotenciais. Alguns trabalhos têm sido publicados tratando da separação entre o geoide e o quase geoide, como por exemplo, Sjöberg (2006a), Tenzer *et al.*, (2006), Flury e Rummel (2009), entre outros.

A altitude elipsoidal pode ser aplicada em algumas situações práticas, porém, não pode ser empregada diretamente no contexto referido no parágrafo anterior. Uma característica da altitude elipsoidal é que ela não é relacionada com o campo da gravidade terrestre. Pontos com a mesma altitude elipsoidal não descrevem uma superfície equipotencial, ou seja, não estão em nível. Ainda que a rigor o mesmo se aplique para as altitudes normais e as ortométricas, estas ainda preservam significado físico, já que ambas relacionam-se com o número geopotencial. Caso seja necessário descrever uma superfície equipotencial, a recomendação é trabalhar com números geopotenciais diretamente, ou ainda altitudes dinâmicas, que nada mais é do que a conversão da unidade do geopotencial em linear (metros) via um valor de gravidade constante. Uma comparação conceitual sobre os dois sistemas de altitudes, normal e ortométrica, pode ser encontrado em Vaniček *et al.*, (2003).

Uma revisão sobre os métodos disponíveis para a avaliação da altitude ortométrica pode ser encontrada em Santos *et al.*, (2006). Estes autores apresentam uma comparação numérica entre o método proposto por Tenzer *et al.* (2005) para a aproximação “rigorosa” da altitude ortométrica e outras aproximações que podem ser encontradas, por exemplo, em Heiskanen e Moritz (1967, capítulo 4). Uma formulação mais compacta sobre a proposta de Tenzer *et al.* (2005) pode ser vista em Flury e Rummel (2009). De forma simplificada, todos estes autores pretendem avaliar a integral:

$$\bar{g} = \frac{1}{H^o} \int_{\text{geoide}}^{\text{superfície terrestre}} g \cdot dH^o \quad (1)$$

em que \bar{g} é o valor médio de gravidade ao longo da linha de prumo entre o geoide e a superfície terrestre; H^o altitude ortométrica; g o valor de gravidade correspondente ao elemento infinitesimal de altitude ortométrica dH^o .

Historicamente, para a definição de altitudes, empregaram-se várias formas de avaliação do valor médio de gravidade na integral (1). De acordo com Tenzer (2004), o valor médio de gravidade ao longo da linha de prumo entre o geoide e a superfície terrestre depende da distribuição da densidade das massas topográficas. Uma sustentação a esta ideia pode ser vista em Featherstone e Kirby (1998) que apontam ser a densidade de subsuperfície requerida para determinar \bar{g} . Porém esta informação não é habitualmente

disponível. Tenzer (2004), seguido por Tenzer *et al.*, (2005), Kigdon *et al.*, (2005), Santos *et al.*, (2006), Tenzer e Ellmann (2009) e Flury e Rummel (2009) basicamente decompõem o valor de \bar{g} como a soma das seguintes componentes:

$$\bar{g} = \bar{\gamma} + \delta\bar{g}^{NT} + \bar{g}^t + \bar{g}^a. \quad (2)$$

Neste caso o problema resume-se em determinar o distúrbio de gravidade gerado pelas massas interiores ao geoide $\delta\bar{g}^{NT}$ e a atração média das massas topográficas \bar{g}^t . O termo \bar{g}^a correspondente à atração gravitacional média gerada pela atmosfera. De acordo com Tenzer *et al.* (2005), o termo \bar{g}^a pode ser negligenciado uma vez que o seu efeito sobre a altitude ortométrica é muito menor que 1 mm em situações mais extremas.

Pretende-se avaliar neste artigo a separação entre o geoide e o quase geoide no contexto brasileiro, bem como avaliar metodologias diferentes para a determinação da mesma. Para alcançar este objetivo, os seguintes experimentos são conduzidos: Experimento 1: avaliar os coeficientes de transformação de anomalia de altura para altura geoidal, tendo em vista que os modelos do geopotencial, *e.g.* EGM2008 (PAVLIS *et al.*, 2008), são largamente empregados para o cálculo de modelos geoidais locais; Experimento 2: avaliar a metodologia que é empregada para a transformação de modelos quase geoidais em modelos geoidais. Este é de fundamental importância, pois modelos quase geoidais podem ser calculados com base na Teoria de Molodenskii (MOLODENSKII; EREMEEV; YURKINA, 1962) e, como uma última etapa, convertê-los em modelos geoidais. A vantagem da Teoria de Molodenskii é que não há a necessidade de reduções gravimétricas. Experimento 3: sugere-se uma alternativa para a avaliação do valor médio de gravidade real ao longo da linha de prumo empregando-se um valor constante de densidade e um modelo local de variação. Estes experimentos compõem a seção 3. Na seção 4 são apresentadas as análises e discussões, com um teste sobre altitudes do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) a fim de analisar o seu comportamento em relação às altitudes normais e ortométricas. Finalmente, na seção 5, são apresentadas as conclusões.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Números geopotenciais

O número geopotencial C para um ponto P sobre a superfície terrestre é a diferença entre o valor do geopotencial W_0 sobre o geoide, ou para uma referência local como é a maioria dos casos, e o valor do geopotencial W_p para este ponto. O número

geopotencial, portanto, é uma grandeza unívoca, independente do trajeto seguido para o deslocamento entre duas superfícies equipotenciais, e tem significado físico real na definição da altitude com relação à superfície de referência, o que não ocorre com os desníveis medidos geometricamente.

O espaçamento entre as superfícies de nível ou equipotenciais do campo da gravidade da Terra real varia com a latitude (e o mesmo ocorre para o campo da gravidade da Terra normal) e também de acordo com a distribuição lateral de massas na crosta terrestre. Porém a diferença de geopotencial entre aquelas superfícies é constante em toda a sua extensão.

De acordo com Torge (2003) o número geopotencial é dado por:

$$C_p = \int_{\text{geóide}}^P g dn \quad (3)$$

sendo C_p o número geopotencial para um ponto P , g o valor de gravidade entre duas superfícies equipotenciais infinitesimalmente próximas separadas pela distância dn . Na prática não se dispõe de uma distribuição contínua das grandezas envolvidas no cálculo do número geopotencial, portanto, a integral da equação (3) deve ser substituída por um somatório sobre um conjunto discreto de valores médios de gravidade entre pontos nos quais foram observados valores de gravidade e desníveis.

2.2. Da separação entre o geóide e o quase geóide

Em Heiskanen e Moritz (1967, p. 326), após igualar a altitude normal H^N e a ortométrica H^O em função do número geopotencial C , chega-se a:

$$H^O - H^N = \frac{\bar{\gamma} - \bar{g}}{\bar{\gamma}} H^O \quad (4)$$

sendo esta relação a separação entre o geóide e o quase geóide. Sendo \bar{g} já definido anteriormente e $\bar{\gamma}$ a gravidade teórica média entre o elipsoide e o teluroide, superfície que pode ser visualizada na Fig. 1. Ainda conforme esta figura pode-se expressar a altitude elipsoidal h como:

$$h \approx H^N + \zeta \quad (5)$$

$$h \approx H^O + N$$

em que N é a altura geoidal e ζ a anomalia de altura. O sinal de aproximado na relação (5) se dá devido ao fato de que as diferentes altitudes são medidas em diferentes linhas de campos. Deste ponto em diante considerar-se-á as altitudes, ortométrica, normal, e

normal-ortométrica referidas à projeção de Helmert $\overline{PQ_0}$.

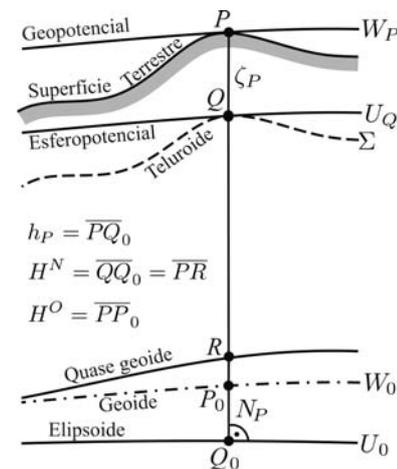


Fig. 1 – Altitude elipsoidal, altura geoidal e anomalia de altura.

Considerando o caso extremo em que a linha de prumo seja aproximada por um segmento circular entre o geóide e a superfície terrestre e uma deflexão da vertical de 2 minutos de arco, com a aproximação da (5) comete-se um erro de 0,00001% para a altitude ortométrica. Por outro lado, considerando a reta tangente à linha de prumo passando por P , prolongada até o geóide, e uma deflexão da vertical de 2 minutos de arco, comete-se um erro de 0,00002% para a altitude ortométrica. Considerando uma altitude de 1.300 metros, e o erro de 0,00002%, esta consideração não excederá 0,26 mm. Detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em Jekeli (2000) e Sjöberg (2006b).

Nas condições analisadas no parágrafo anterior, e empregando-se as relações (4) e (5), pode-se escrever:

$$dH = \zeta - N = \frac{\bar{\gamma} - \bar{g}}{\bar{\gamma}} H^O \quad (6)$$

O problema em determinar a separação entre a altitude ortométrica e normal é o mesmo que determinar a diferença entre a anomalia de altura e a altura geoidal, ou seja, $H^O - H^N = \zeta - N$. O problema está em avaliar o valor médio de gravidade ao longo da linha de prumo conforme mostram as relações (4) e (6). A avaliação de \bar{g} ao longo da linha de prumo na equação integral (1) é um tópico importante na realização prática das altitudes ortométricas. O valor de gravidade não é usualmente medido no interior das massas topográficas. Portanto, a determinação de \bar{g} deve ocorrer a partir de valores observados sobre a superfície terrestre, empregando-se um modelo realista e fisicamente significativo para a redução da gravidade.

Na relação (4) o termo $\bar{g} - \bar{\gamma}$ é

aproximadamente igual à anomalia Bouguer Δg_B , sendo assim, tem-se a relação sugerida por Heiskanen e Moritz (1967, p. 327):

$$\zeta - N \approx -\frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} H^o. \quad (7)$$

Em muitas aplicações pode-se ainda fazer $\bar{\gamma} \approx 981 \text{ gal}$, tal que da (7) obtém-se:

$$(\zeta - N)_{[m]} \approx -\frac{\Delta g_{B[Gal]}}{981} H^o_{[m]} \approx -\Delta g_{B[Gal]} \cdot H^o_{[km]}. \quad (8)$$

As anomalias Bouguer são geralmente negativas sobre os continentes, assim sendo, a diferença $\zeta - N$ é geralmente positiva. Sobre os oceanos, naturalmente, tem-se que $\zeta = N$. Sabe-se ainda que as anomalias Bouguer são pouco correlacionadas com a altitude para os curtos comprimentos de onda. Localmente o produto da relação (8) é basicamente proporcional à altitude, pois as anomalias Bouguer tendem a serem constantes para um perfil de mesma densidades.

2.3. O gradiente vertical de gravidade

A abordagem aqui adotada tem como ideia básica o fato de que, para uma correta redução do valor de gravidade ao geóide precisa-se do gradiente vertical de gravidade $\partial g / \partial H^o$. Este gradiente vertical é dado pela equação de Bruns (PICK; PÍCHA e VYSKOČIL, 1973, p. 81):

$$\frac{\partial g}{\partial H^o} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2. \quad (9)$$

Em que J é a curvatura média das superfícies equipotenciais, G é a constante universal da gravitação, ρ é a densidade das massas topográficas e ω a velocidade angular terrestre. Esta equação não pode ser diretamente aplicada por conta do não conhecimento da curvatura média J das superfícies equipotenciais. Para o segundo termo do lado direito da equação (9) adota-se $\rho = 0$ implicando este artifício em se admitir que não existam massas externas ao geóide. Nesta condição, o gradiente vertical será ar-livre. De acordo com Heiskanen e Moritz (1967, p. 115) é possível então decompor a equação (9) em uma parte relativa à Terra normal e uma parte anômala:

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} + \frac{\partial \Delta g}{\partial h}. \quad (10)$$

Existem muitas maneiras de se calcular o gradiente normal $\partial \gamma / \partial h$. Aqui se optou pelo uso da

equação (2-121) fornecida em Heiskanen e Moritz (1967, p. 78):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2\gamma}{a} (1 + f + m - 2f \text{sen}^2 \varphi) \quad (11)$$

sendo a o semieixo maior do elipsoide de referência, f o achatamento, m é a abreviação para a relação $\frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$, b o semieixo menor e GM a constante gravitacional geocêntrica. Todas estas grandezas são definidas para o Sistema Geodésico de Referência (SGR) adotado. Em Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006, Tabela 2.5) são fornecidos os valores para estas constantes em WGS84 e GRS80.

A parte anômala, $\partial \Delta g / \partial h$, será abordada agora empregando a continuação analítica, que após uma aproximação esférica é dada por (HEISKANEN e MORITZ, 1967, p. 115):

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r} \right)_P = -2 \frac{\Delta g_P}{R} + \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g - \Delta g_P}{\ell_0^3} d\sigma. \quad (12)$$

Nesta equação, Δg_P refere-se ao ponto fixo P , onde se deseja avaliar o gradiente $\partial \Delta g / \partial h$. R é o raio da esfera, ℓ_0 é a distância Euclidiana entre o ponto fixo P e o elemento de superfície variável $R^2 d\sigma$, expresso de acordo com a Fig. 2.

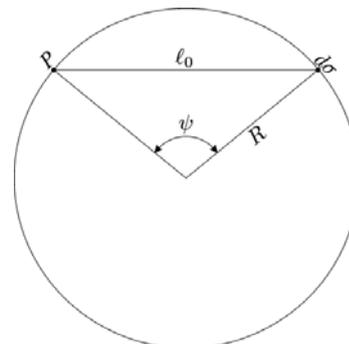


Fig. 2 – A distância espacial entre dois pontos sobre a esfera.

$$\ell_0 = 2R \text{sen} \frac{\psi}{2}. \quad (13)$$

A distância angular ψ é dada por:

$$\psi = \text{arc cos} \left[\text{sen} \varphi_P \text{sen} \varphi + \cos \varphi_P \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_P) \right]. \quad (14)$$

Define-se a anomalia de gravidade ar-livre no contexto da Teoria de Molodenskii (MOLODENSKII; EREMEEV; YURKINA, 1962) com base na Fig. 1

como sendo:

$$\Delta g_p = g_p - \gamma_Q. \quad (15)$$

Na ausência de valores de anomalias de gravidade para o cálculo da integral (12) pode-se, segundo Chijun (1999), substituir o gradiente vertical da anomalia de gravidade ar-livre pelo gradiente vertical da atração calculado com dados topográficos com erro relativo de aproximadamente 4%.

A gravidade média ao longo da linha de prumo pode ser avaliada da seguinte maneira:

$$\bar{g} = g - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial H^o} + 4\pi G \rho \right) H^o. \quad (16)$$

Note-se a inclusão da densidade das massas topográficas ρ . Na equação (16) há um termo que se relaciona com o efeito gravitacional do platô de Bouguer $2\pi G \rho H^o$. A equação (16) é a redução de Poincarè-Prey em sua forma completa sem aproximações (HEISKANEN; MORITZ, 1967, p. 164). A referida equação pode ser encontrada em Sjöberg (1995, p. 188) destinada à mesma finalidade aqui proposta.

A equação (16) pode ser ainda escrita da seguinte forma:

$$\bar{g} = g - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial H^o} H^o - 2\pi G \rho_0 H^o - 2\pi G \Delta \rho H^o \quad (17)$$

onde ρ_0 é o valor padrão da densidade da crosta ($2,67 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$) e $\Delta \rho$ é a densidade anômala com respeito a densidade padrão. Entende-se aqui como densidade anômala a decorrente de $\rho = \rho_0 + \Delta \rho$.

Como sugerido por Heiskanen e Moritz (1967) procede-se à estimativa do erro no valor médio da gravidade a partir da incerteza no valor da densidade das massas topográficas. O objetivo é responder a seguinte questão: Qual o erro que uma dada diferença em densidade pode causar na separação ($\zeta - N$)? Aplicando a equação (16) na (6) e derivando a equação resultante em relação à ρ tem-se:

$$\delta H = - \frac{2\pi G (H^o)^2 \delta \rho}{\bar{\gamma}}. \quad (18)$$

Considerando uma incerteza para a densidade das massas topográficas de $\delta \rho = \pm 0,6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ que corresponde à variação máxima da densidade das rochas que ocorrem na prática em relação ao valor padrão $\rho_0 = 2,67 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, e tomando altitude de 1.300 metros comete-se um erro de aproximadamente

$\pm 4,3 \text{ cm}$ na separação dH .

Para o valor médio de gravidade normal $\bar{\gamma}$ pode-se escrever, de forma análoga à equação integral (1), (HEISKANEN; MORITZ, 1967, p. 170):

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H^N} \int_{\text{elipsoide}}^{\text{teluroide}} \gamma dH^N. \quad (19)$$

O termo não linear da gravidade normal é levado em consideração aqui, porém, numa aproximação esférica. Segundo Santos *et al.*, (2006), somente este termo tem uma influência máxima de $-1,8 \text{ mGal}$ sobre o valor de γ , que por sua vez pode acarretar um erro de 15 mm em H^o para o Monte Everest. Para uma altitude de 1.300 metros tem-se um erro de $-0,04 \text{ mGal}$ no valor de $\bar{\gamma}$ que por sua vez afeta a separação dH (relação 6) em $0,05 \text{ mm}$.

O resultado para a equação (19), nas condições aqui comentadas, pode ser encontrado, por exemplo, em Heiskanen e Moritz (1967, p. 170):

$$\bar{\gamma} = \gamma \left[1 - (1 + f + m - 2f \text{sen}^2 \varphi) \frac{H^N}{a} + \left(\frac{H^N}{a} \right)^2 \right] \quad (20)$$

Sjöberg (1995, p. 189) empregando uma aproximação para $\bar{\gamma}$ como:

$$\bar{\gamma} \approx \gamma_Q - \frac{H_p}{2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_Q \quad (21)$$

e usando a relação (16) e a (21) dentro da (6) obtve:

$$\zeta - N = - \frac{H_p \Delta g_p^B}{\gamma_p} + \frac{H_p^2}{2\gamma_p} \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial H} \right)_p. \quad (22)$$

Note-se que esta é uma fórmula da ordem $O(H^2)$, e implicitamente assume-se a aproximação que $H^N = H^o$. Na prática, segundo Featherstone e Kirby (1998), $\bar{\gamma}$ é calculado entre o geoide e a superfície terrestre. Para os países que possuem número geopotencial é uma tarefa simples calcular $\bar{\gamma}$ entre o elipsoide e o teluroide de acordo com a equação (20).

A relação (6) pode ser facilmente avaliada agora. No entanto, notar a dependência do valor da densidade anômala das massas topográficas $\Delta \rho(\varphi, \lambda)$ na relação (17).

2.4. Construção de um modelo de variação de densidade anômala

Como mencionado anteriormente, comumente emprega-se a densidade de referência ρ_0 para o

cálculo do geóide. Muitos autores como, por exemplo, Martinec *et al.*, (1995); Martinec (1998, capítulo VI); Huang *et al.*, (2001); Rózsa (2002); Tenzer e Vaníček (2003); Sjöberg (2004); Kiamehr (2006), entre outros, tratam do impacto da variação lateral da densidade das massas topográficas na determinação do geóide. Hwang e Hsiao (2003) aplicaram à determinação de altitudes a variação de densidades na correção ortométrica.

A Geofísica oferece muitos métodos e abordagens para a modelagem da densidade. Para fins deste estudo, o método de perfil de densidade, proposto por Nettleton (1971, p. 7), é empregado por sua simplicidade. Este método baseia-se em uma solução iterativa procurando o melhor valor para a densidade das massas. A melhor densidade é aquela em que as anomalias Bouguer são bastante semelhantes (constante) e sua correlação com a topografia seja mínima.

Resumidamente, a estimativa da densidade baseia-se em saber se é possível tornar a anomalia de gravidade ar livre independente da altitude, adicionando um termo que é proporcional à elevação do terreno conforme a equação:

$$\Delta g_B = \Delta g - b\Delta H \quad (23)$$

para um determinado coeficiente b . Segundo Heiskanen e Moritz (1967, p. 284) a modelagem de b nos remete ao “Método de Nettleton”. Nesta modelagem de dispersão da gravidade ar-livre com a altitude é possível extrair o valor do coeficiente b . Neste caso não é necessário um processo iterativo para procurar o melhor valor da densidade das massas, conforme originalmente proposto por Nettleton (1971, p.7). Note-se que para a relação (23), de acordo com Pick, Pícha e Vyskočil (1973, p. 208), se escreve:

$$b = 2\pi G\rho. \quad (24)$$

Assumindo-se que b dependa somente da densidade local das massas topográficas ρ , tem-se então um método de determinação da densidade média, a qual é difícil de ser avaliada diretamente. Pick, Pícha e Vyskočil (1973, p. 209) chamam a atenção para o fato de que todos os métodos para determinar a densidade ρ , a partir de observações da gravidade, podem ser somente usados para determinar a variação de densidade média para as camadas superiores da crosta terrestre.

3. TESTES NUMÉRICOS

Para a avaliação numérica das equações apresentadas, conduziram-se três experimentos nas subseções seguintes. Para tanto, empregaram-se os seguintes dados:

- Coeficientes do modelo do geopotencial para a transformação de anomalia de altura em altura geoidal do *Earth Gravity Model 2008* (EGM2008) (PAVLIS *et al.*, 2008);
- 4.112 pontos com valores de gravidade provenientes de levantamentos gravimétricos (BLITZKOW, 2006) conforme pode ser visualizado na Fig. 3; e
- Um modelo digital do terreno (MDT), especificamente o *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM) (RODRIGUEZ *et al.*, 2005) com resolução espacial de 3 segundos de arco detalhes são mostrados na Fig. 4.

Estes dados estão disponíveis para a região compreendida entre as latitudes -27° e -22° e longitudes -55° e -48° conforme Fig. 3 e 4.

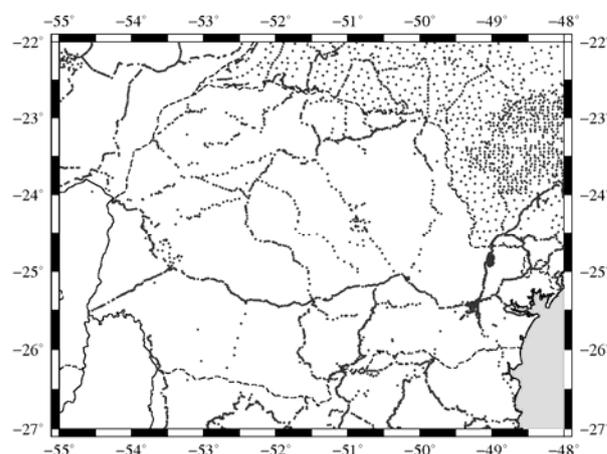


Fig. 3 – Levantamento gravimétrico para a área de estudos conforme Blitzkow, (2006).

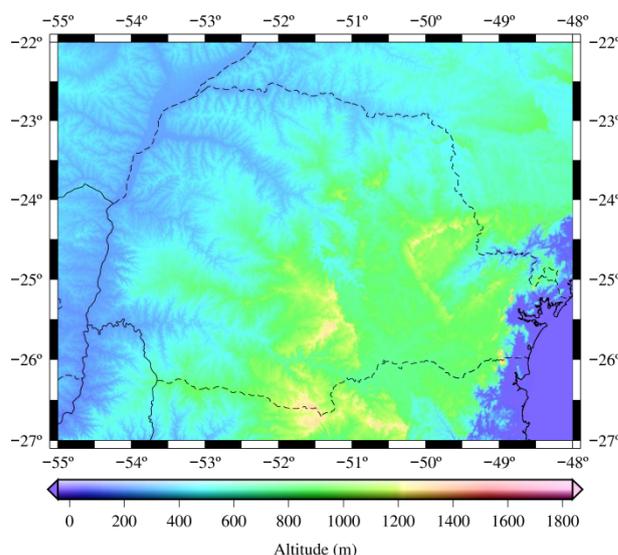


Fig. 4 – Modelo digital de elevação para a área de estudos.

3.1. Experimento 1

Rapp (1997) sugeriu um termo de transformação para converter a anomalia de altura proveniente de modelos globais do geopotencial em altura geoidal. Para tanto, utilizou-se o conjunto de harmônicos esféricos relativos ao EGM2008 desenvolvido para o grau e ordem 2160 para converter anomalia de altura em altura geoidal. Este conjunto de coeficientes normalizados dos harmônicos esféricos \overline{CC}_{nm} e \overline{CS}_{nm} são consistentes com a série (PLAVIS *et al.*, 2008):

$$dH^{EGM} = \sum_{n=0}^{máx} \sum_{m=0}^n \left[\frac{\overline{CC}_{nm} \cos(m\lambda) + \overline{CS}_{nm} \sin(m\lambda)}{\overline{P}_{nm}} \right] \overline{P}_{nm}(\sin\varphi). \quad (25)$$

Detalhes sobre esta abordagem podem ser encontrados em Rapp (1997), que encontrou para as Montanhas do Himalaia um valor máximo, em módulo, de 3,4 metros para a separação dH empregando os coeficientes do EGM96 (LEMOINE *et al.*, 1998). A separação dH^{EGM} pode ser visualizada no domínio do espaço na Fig. 5.

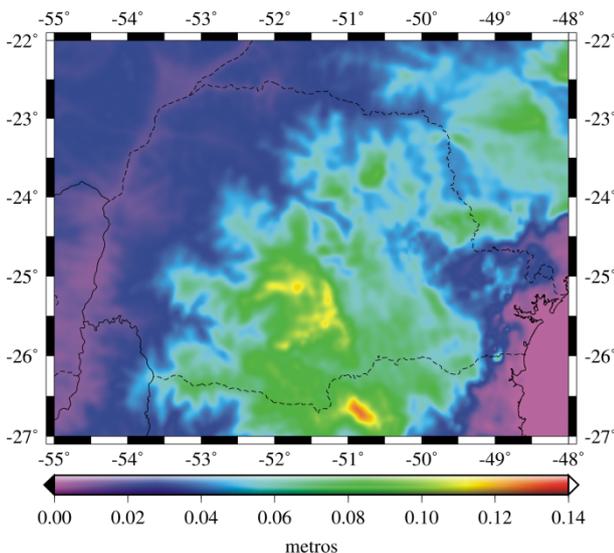


Fig. 5 – Da separação entre o geóide e o quase geóide usando os coeficientes do EGM2008.

Da Fig. 5 pode-se observar que existem somente valores positivos para as diferenças $\zeta - N$ sobre o continente quando empregados os coeficientes do EGM2008. Pode-se notar que estes valores são significantes, chegando a 13 cm. Segundo Heiskanen e Moritz (1967), as anomalias Bouguer dependem da elevação média do terreno, decrescendo aproximadamente 0,1 Gal a cada 1 km de elevação média. Assumindo como uma estimativa aproximada, a qual pode ser verificada em um mapa das anomalias Bouguer, pode-se escrever:

$$\Delta g_{B[Gal]} = -0,1 \overline{H}_{[km]}, \quad (26)$$

obtendo então, com a equação (8):

$$(\zeta - N)_{[km]} \approx +0,1 \overline{H}_{[km]} H_{[km]}, \quad (27)$$

onde H é a altitude do ponto de interesse e \overline{H} é a altitude média para a área considerada. Esta relação serve somente para dar uma ideia da magnitude para as diferenças $\zeta - N$.

A Fig. 6 mostra o gráfico de dispersão relativo à separação entre o geóide e o quase geóide empregando-se a série (25). Neste gráfico é possível notar que o termo $+0,1 \overline{H}_{[km]}$ pode ser determinado com base no coeficiente angular da reta que melhor se ajusta à dispersão. Para este exemplo tem-se para o coeficiente angular $b \approx 0,07$, sendo o termo $+0,1 \overline{H}_{[km]} \approx 0,06$, que reflete o sinal médio da anomalia de gravidade Bouguer para a região, conforme a relação (26).

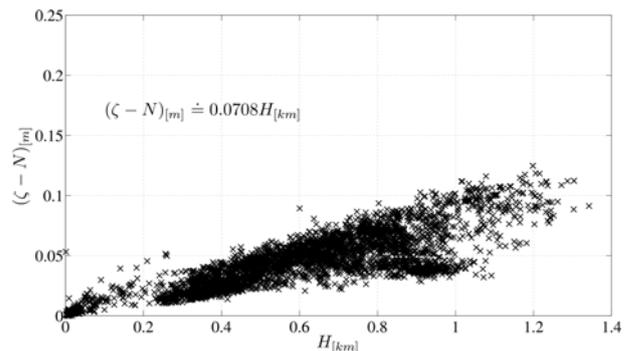


Fig. 6 – Dispersão da separação com base nos coeficientes do EGM2008.

3.2. Experimento 2

As anomalias de gravidade Bouguer foram calculadas a partir de valores observados de gravidade (Fig. 3). No entanto, as mesmas foram determinadas somente para a parte continental, atendendo ao objetivo aqui proposto. Usando um mapa de anomalias Bouguer para a região de estudo procede-se à avaliação quanto às aproximações sugeridas por Heiskanen e Moritz, relação (7). Esta relação é geralmente aplicada na determinação do geóide a partir de anomalias da gravidade ar-livre sobre a superfície terrestre – detalhes em: (SÜNKEL, 1997, p. 235); (FORSBERG; TSCHERNING, 1997, p. 247); e (SIDERIS, 1994, p. 82) –. Usando informações sobre as anomalias Bouguer e a altimetria para a área de estudos, aplicou-se a relação (7), dH^{HM} , obtendo-se o resultado mostrado na Fig. 7.

A dispersão para os valores na Fig. 7 é menor relativamente à dispersão mostrada na Fig. 6,

principalmente para o intervalo de 0 a 400 metros de altitude. A anomalia de gravidade Bouguer é pouco sensível para as irregularidades local da topografia, o coeficiente da relação (7) é localmente constante e existe, aproximadamente, uma correlação linear entre $N - \zeta$ e variação da topografia.

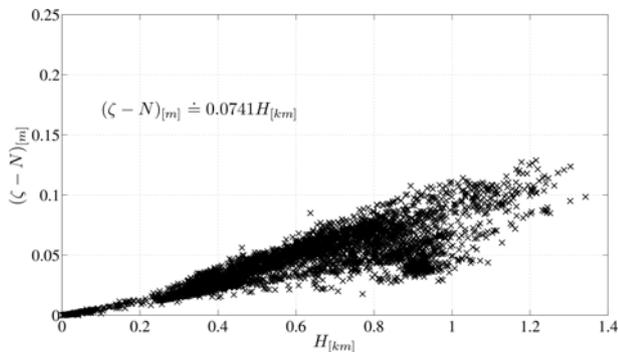


Fig. 7 – Dispersão da diferença dH^{HM} empregando a relação (6).

3.3. Experimento 3

Na Fig. 8 pode-se observar o comportamento do gradiente vertical ar-livre de gravidade conforme a relação (10). Para o gradiente vertical da gravidade encontrou-se valores a partir de $-0,40 \frac{mGal}{m}$ a $-0,16 \frac{mGal}{m}$, valores estes diferentes do valor do gradiente ar-livre comumente empregado para as reduções gravimétricas, igual a $-0,3086 \frac{mGal}{m}$. Este valor desconsidera, por exemplo, a variação $\partial\gamma/\partial h$ com a latitude. Para o gradiente Prey, usando uma densidade constante de $\rho = 2,67 \frac{g}{cm^3}$, tem-se uma variação de $-0,1862 \frac{mGal}{m}$ a $-0,0638 \frac{mGal}{m}$, comparado com o valor padrão de $-0,0848 \frac{mGal}{m}$.

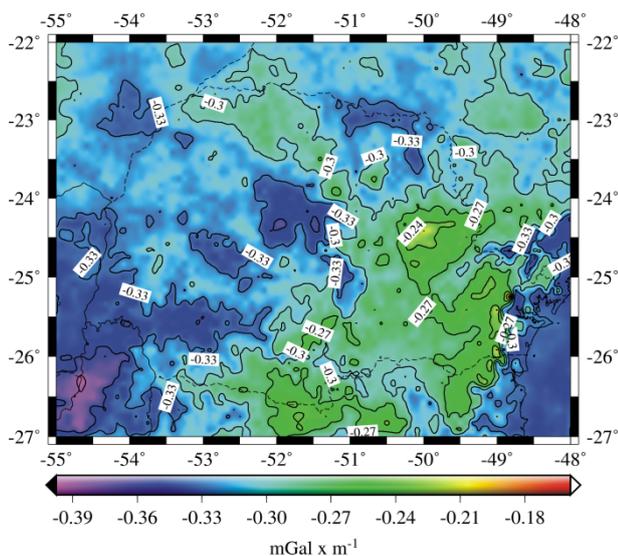


Fig. 8 – Gradiente vertical ar-livre de gravidade para a região de estudos.

Empregando a equação (6) e a equação (17) com $\Delta\rho=0$, ou seja, utilizou-se somente o valor padrão para a densidade das massas, obtiveram-se as diferenças $dH^{\Delta\rho=0}$ mostradas na Fig. 9.

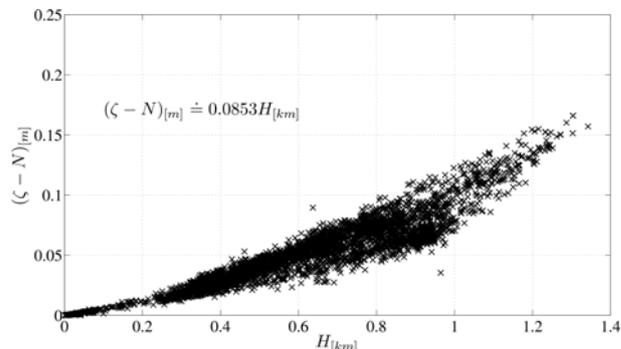


Fig. 9 – Dispersão usando somente a densidade padrão de ρ_0 .

Em comparação com as Fig. 6 e 7 nota-se claramente que a partir dos 800 metros de altitude o emprego da relação (6) apresenta valores mais significativos para a separação $dH^{\Delta\rho=0}$ atingindo mais de 15 cm (Fig. 9). Para as Fig. 6 e 7 a separação não atinge 13 cm.

A Fig. 10 mostra a variação da densidade lateral $\Delta\rho$ das massas topográficas calculada conforme o item 2.4. No entanto, não se considerou neste trabalho a variação vertical da densidade das massas topográficas.

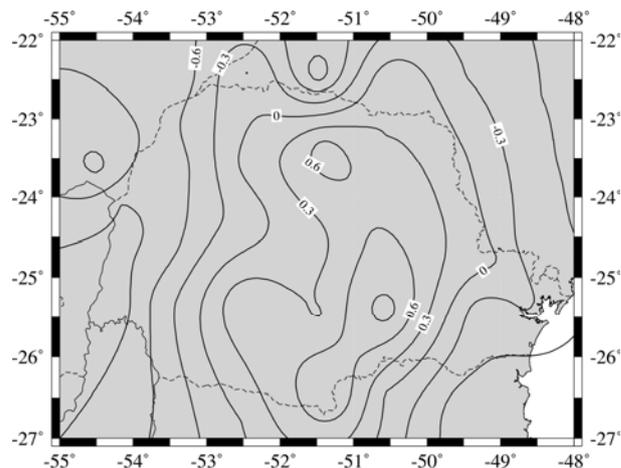


Fig. 10 – Densidade anômala ($g \cdot cm^{-3}$) para a região de estudos conforme o item 2.4.

Empregando as equações (6), (17) e (20) e os resultados das Fig. 8 e 10 calculou-se a separação $dH^{\Delta\rho(x)}$. O resultado pode ser avaliado em forma de dispersão na Fig. 11. Para esta análise no contexto da separação entre o geóide e o quase geóide, assumiram-se apenas as variações laterais de densidade (Fig. 10),

deixando a variação radial ainda a ser abordado. No entanto pela Fig. 11 nota-se que as separações atingem 20 cm, o que reforça a necessidade do conhecimento das densidades das massas topográficas.

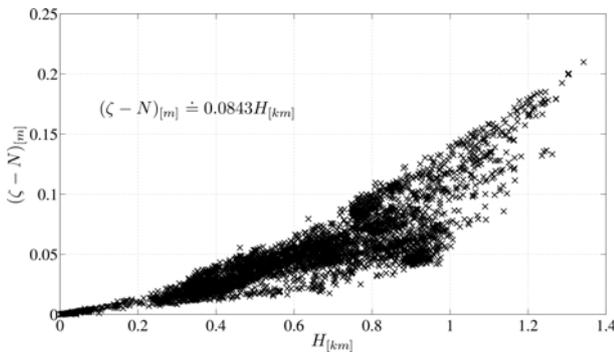


Fig. 11 – Dispersão usando a densidade anômala para a estimativa de $dH^{\Delta\rho(x)}$.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO

As estatísticas para os resultados em termos de valores máximos e mínimos, média, desvio padrão (dp) e amplitude são apresentadas na Tabela 1. As estatísticas são organizadas como:

- Na coluna (2) tem-se os afastamentos relativos aos coeficientes de transformação do EGM2008, dH^{EGM} , segundo a série (25);
- Para a coluna (3), os afastamentos são relativos à relação (7), dH^{HM} ;
- Para a coluna (4) tem-se os afastamentos relativos à relação (6) empregando as relações (17) e (20) para $\Delta\rho = 0$, $dH^{\Delta\rho=0}$; e
- Para a coluna (5) tem-se os afastamentos relativos à relação (6) empregando-se as relações (17) e (20), $dH^{\Delta\rho(x)}$.

Tabela 1 – Comparação entre as abordagens para a avaliação de dH (m) para 4.112 pontos.

Parâmetro	dH^{EGM}	dH^{HM}	$dH^{\Delta\rho=0}$	$dH^{\Delta\rho(x)}$
mín.	0,0000	-0,0005	-0,0006	-0,0006
máx.	0,1247	0,1288	0,1660	0,2098
média	0,0459	0,0473	0,0529	0,0514
dp	0,0219	0,0236	0,0282	0,0334
ampl.	0,1247	0,1293	0,1666	0,2104

Procede-se ainda uma avaliação pontual, usando 102 referências de nível (RNs) ocupadas com o GPS (*Global Positioning System*) (SÁ e VIEIRA 2006) e os resultados provenientes do experimento (3).

Experimento semelhante a este foi realizado por Featherstone e Kirby (1998). Estes autores tinham

como objetivo analisar se o sistema de altitudes australiano possui as altitudes mais próximas às altitudes normais ou as ortométricas. No entanto, segundo Vaniček *et al.* (1980), se a gravidade normal é empregada ao invés da gravidade real para a determinação das altitudes, a distinção entre altitude ortométrica e normal desaparece. As altitudes da Austrália têm as mesmas características das do Brasil, pois ambos os países possuem altitudes normais-ortométricas, H^{NO} . Para detalhes sobre a altitude normal-ortométrica consultar, por exemplo, Heck (2003).

O posicionamento GPS sobre as RNs do SGB, que possuem altitudes normais-ortométricas, fornece:

$$\eta \approx h - H^{NO} \quad (28)$$

novamente, o sinal de aproximado na relação (28) é devido ao fato de que as diferentes altitudes são medidas em diferentes linhas de campo. O seguinte resultado é avaliado:

$$\delta_1 = h - H^{NO} - (\zeta_{EGM} - dH)_{geoides}, \quad (29)$$

$$\delta_2 = h - H^{NO} - \zeta_{EGM}. \quad (30)$$

A partir das relações (29) e (30) pode-se realizar a seguinte análise:

$$\text{se } \begin{cases} |\delta_1| < |\delta_2| \Rightarrow H^{NO} \approx H^O \\ |\delta_2| < |\delta_1| \Rightarrow H^{NO} \approx H^N \end{cases} \quad (31)$$

Na Tabela 2 são mostradas as estatísticas para o resultado das relações (29) e (30). Analisando a média e a diferença média quadrática, o quase geóide é a melhor referência para as atuais altitudes brasileiras.

Tabela 2 – Estatísticas básicas para as relações (29) e (30).

Parâmetro	δ_1 (m)	δ_2 (m)
mín.	-1,13	-1,15
máx.	3,14	3,09
média	0,33	0,28
dp	0,68	0,69
emq	0,76	0,74
ampl.	4,28	4,25

No domínio do espaço, pela Fig. 12 pode-se visualizar a análise para as diferenças conforme a relação (31). Nota-se que as altitudes do tipo normais-ortométricas não têm uma característica própria, ora ela se assemelha à normal, ora à ortométrica. Para 56% dos pontos analisados as altitudes normais-ortométricas se assemelham às normais e 44% às ortométricas.

O problema desta análise encontra-se na

qualidade das observações. Por exemplo: para as observações GPS têm-se para as altitudes um desvio padrão máximo de 9,1 cm e um mínimo de 2,3 cm, com uma média de 5,0 cm. Note-se que de acordo com a Fig. 11, considerando a incerteza para as observações GPS, não se faz diferença usar o quase geoide e o geoide até uma altitude de 800 metros para a determinação de altitudes com o GPS. Acima de 800 metros, nas condições aqui analisadas, recomenda-se o uso do quase geoide para a determinação de altitudes empregando-se o posicionamento GPS.

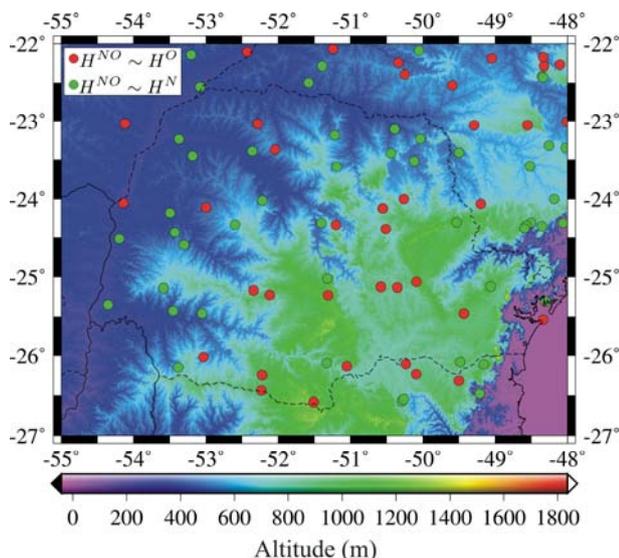


Fig. 12 – Comparação entre a referência vertical para o SGB e o quase geoide do EGM2008.

5. CONCLUSÕES

Note-se que a partir das Fig. 7, 9 e 11 o uso da equação (7) foge da “realidade” significativamente – tomando como parâmetro as equações (6) e (17) –; pode-se notar um comportamento linear para as dispersões na Fig. 7 devido ao uso das anomalias de gravidade Bouguer e suas características para os curtos comprimentos de onda.

A variação lateral das massas topográficas $\Delta\rho(\varphi, \lambda)$ em relação ao valor padrão de $\rho_0 = 2,67 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ deve ser levada em consideração, pois a negligência da mesma pode acarretar em diferenças da ordem de 4 cm. Faz-se necessário um modelo de variação lateral da densidade com uma qualidade melhor que o aqui adotado. Importante também é a consideração da variação vertical das densidades.

Diante das condições aqui analisadas, a partir da Tabela 2 e da Fig. 12 pode-se concluir que para as atuais altitudes do SGB pode-se utilizar o quase geoide ou o geoide como referência vertical. Possibilitando empregar o GPS para a determinação de altitudes normais ou ortométricas na ordem do decímetro. Muito

embora se deva persistir na determinação de altitudes do Brasil com significado físico, ou seja, com base em números geopotenciais. Estes, por seu turno, servem de base para os diferentes tipos de altitudes físicas. A determinação consistente da superfície do geoide com uma precisão de poucos centímetros é possível mesmo para as áreas com topografia extrema a partir do quase geoide. Os conceitos de altitude ortométrica e normal podem ser realizados de forma consistente e utilizados para este nível de precisão.

Para o gradiente vertical da gravidade $\partial g / \partial H^0$ não se levou em consideração a variação do mesmo ao longo da linha de prumo. No entanto, ele é um valor mais realista que o valor padrão $0,3086 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$, que não leva em consideração, por exemplo, a variação com a latitude.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Denizar Blitzkow pelo fornecimento de dados gravimétricos terrestres utilizados neste trabalho. Ao Professor Nelsi Côgo de Sá pelo fornecimento de dados GPS sobre RNs utilizados. Ao CNPq processo 560796/2008-0. À CAPES através do PROBRAL (CAPES/DAAD) projeto n. 228/06 processo BEX4157/08-7. Aos revisores e editores pelas críticas construtivas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BLITZKOW, D. **Banco de dados gravimétricos**. Departamento de Engenharia de Transportes, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2006.
- CHIJUN, Z. Determination of the gradient of gravity anomaly with topographic data. **Chinese Science Bulletin**, v. 44, n. 11, p. 1029-1034, 1999.
- FEATHERSTONE, W. E.; KIRBY, J. F. Estimates of the separation between the geoid and the quasigeoid over Australia. **Geomatics Research Australasia**, n. 68, p. 79-90, jul 1998.
- FLURY, J.; RUMMEL, R. On the geoid-quasigeoid separation in mountain areas. **Journal of Geodesy**, v. 83, n. 9, p. 829-847, 2009.
- FORSBERG, R.; TSCHERNING, C. C. **Topographic effects in gravity field modelling for BVP**. Vol. 65, in Geodetic boundary-value problem in view of the one centimeter geoid, by F. SANSÒ and R. RUMMEL, p. 241-272. Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 1997. 591 p.
- HECK, B. **Rechenverfahren und auswertemodelle der landesvermessung**. 3rd edition. Karlsruhe:

- Wichmann, 2003. 473 p.
- HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. San Francisco and London: W. H. Freeman and Company, 1967. 364 p.
- HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. 2^a ed. Wien: Springer Wien New York, 2006. 403 p.
- HUANG, J.; VANÍČEK, P.; PAGIATAKIS, S. D.; BRINK, W. Effect of topographical density on geoid in the Canadian Rocky Mountains. **Journal of Geodesy**, v. 74, n. 11/12, p. 805-815, 2001.
- HWANG, C.; HSIAO, Y. -S. Orthometric corrections from leveling, gravity, density and elevation data: a case study in Taiwan. **Journal of Geodesy**, v. 77, n. 5/6, p. 279-291, 2003.
- JEKELI, C. **Heights, the geopotential, and vertical data**. Technical Report, No. 459, Ohio State University, Ohio, 2000, p. 34.
- KIAMEHR, R. The impact of lateral density variation model in the determination of precise gravimetric geoid in mountainous areas: a case study of Yran. **Geophysic Journal International**, v. 167, ed. 9, p. 521-527, 2006.
- KINGDON, R.; VANÍČEK, P.; SANTOS, M.; ELLMANN, A.; TENZER, R. Toward an improved orthometric height system for Canada. **Geomatica**, v. 59, n. 3 p. 241-249, 2005.
- LEMOINE, F. G.; KENYON, S. C.; FACTOR, R. G.; TRIMMER, R. G.; PAVLIS, N. K.; CHINN, D. S.; COX, C. M.; KLOSKO, S. M.; LUTHCKE, S. B.; TORRENCE, M. H.; WANG, Y. M.; WILLIAMSON, R. G.; PAVLIS, E. C.; RAPP, R. H.; OLSON, T. R. **The development of the joint NASA GSFC and National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96**. NASA/TP-1998-206861, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, 1998.
- MARTINEC, Z. **Boundary value problems for gravimetric determination of a precise geoid**. v. 73. Berlin: Springer, 1998, 223 p.
- MARTINEC, Z.; VANÍČEK, P.; MAINVILLE, A.; VÉRONNEAU, M. The effect of lake water on geoidal height. **Journal of Geodesy**, v. 20, n. 3, p. 193-203, 1995.
- MOLODENSKII, M. S.; EREMEEV, V. F.; YURKINA, M. I. **Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth**. Translated by Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem, 1962, 248 p.
- NETTLETON, L. L. **Elementary gravity and magnetics for geologists and seismologist**. Edição: P. C. WUENSCHHEL. v. 1. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 1971, 121 p.
- PAVLIS, N. K.; SIMON, H. A.; STEVE, K. C.; JOHN, F. K. An Earth Gravitational Model to Degree 2160. **EGU General Assembly 2008**. Vienna, 2008.
- PICK, M.; PÍCHA, J.; VYSKOČIL, V. **Theory of the earth's gravity field**. New York: Elsevier, 1973, 538 p.
- RAPP, R. H. Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulations difference. **Journal of Geodesy**, v. 71, n. 5, p. 282-289, 1997.
- RODRIGUEZ, E.; MORRIS, C. S.; BELZ, J. E.; CHAPIN, E. C.; MARTIN, J. M.; DAFFER, W.; HENSLEY, S. **An assessment of the SRTM topographic**. Technical Report JPL D-31639, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, 2005, p. 143.
- RÓZSA, S. Local geoid determination using surface densities. **Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng.**, v. 46, n. 2, p. 205-212, 2002.
- SÁ, N. C.; VIEIRA, V. **Rede GPS do Estado de São Paulo: aprimoramento de modelos geoidais e apoio básico local**. Departamento de Geofísica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.
- SANTOS, M. C.; VANÍČEK, P.; FEATHERSTONE, W. E.; KINGDON, R.; ELLMANN, A.; MARTIN, B. - A.; KUHN, M.; TENZER, R. The relation between rigorous and Helmert's definitions of orthometric heights. **Journal of Geodesy**, v. 80, n. 12, p. 691-704, 2006.
- SIDERIS, M. G. **Regional geoid determination**. Chap. 4 in Geoid and its geophysical interpretations, edited by P. VANÍČEK and N. T. CHRISTOUS, p. 77-94. Boca Raton/Ann Arbor/London/Tokyo: CRC Press, 1994. 343 p.
- SJÖBERG, L. E. On the quasigeoid to geoid separation. **Manuscripta Geodaetica**, v. 20, n. 3, p. 182-192, 1995.
- SJÖBERG, L. E. The effect on the geoid of lateral density variations. **Journal of Geodesy**, v. 78, n. 1/2, p. 34-39, 2004.

SJÖBERG, L. E. A new technique to determine geoid and orthometric heights from satellite positioning and geopotential numbers. **Journal of Geodesy**, v. 80, n. 6, p. 304-312, 2006a.

SJÖBERG, L. E. A refined conversion from normal height to orthometric height. **Stud. Geophys. Geod.**, v. 50, n. 4, p. 595-606, 2006b.

SÜNKELE, H. **GBVP - Classical solutions and implementation**. Vol. 65, in Geodetic boundary-value problem in view of the one centimeter geoid, by F. SANSÓ and R. RUMMEL, p. 219-237. Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 1997, 591 p.

TENZER, R. Discussion of mean gravity along the plumbline. **Stud. Geophys. Geod.**, v. 48, n. 2, p. 309-330, 2004.

TENZER, R.; ELLMANN, A. **On evaluation of the gravity gradient within the topography**. Edição: M. G. SIDERIS. Observing our changing Earth. Springer-Verlag, 2009. p. 253-261.

TENZER, R.; VANÍČEK, P.. Correction to Helmert's orthometric height due to actual lateral variation of topographical density. **Revista Brasileira de Cartografia**, v.55, n. 02, p. 44-47, 2003.

TENZER, R.; NOVÁK, P.; MOORE, P.; KUHN, M.; VANÍČEK, P. Explicit formula for the geoid-quasigeoid separation. **Stud. Geophys. Geod.**, v. 50, n. 4, p. 607-618, 2006.

TENZER, R.; VANÍČEK, P.; SANTOS, M.; FEATHERSTONE, W. E.; KUHN, M. The rigorous determination of orthometric heights. **Journal of Geodesy**, v. 79, n. 1/3, p. 82-92, 2005.

TORGE, W. **Geodesy**. Berlin: Gruyter, 2003, 400 p.

VANÍČEK, P.; SANTOS, M. S.; TENZER, R.; NAVARRO, A. H.. Algunos aspectos sobre alturas ortométricas y normales. **Revista Cartográfica**, n. 76/77, p. 79-86, dez 2003.

VANÍČEK, P.; CASTLE, R. O.; BALAZS, E. I.. Geodetic leveling and its applications, **Reviews of geophysics and space physics**, v. 18, n. 2, p. 505-524, maio 1980.