Revista Brasileira de Cartografia (2011) N⁰ 63/5: 609-617
Sociedade Brasileira de Cartografia, Geodésia, Fotogrametria e Sensoriamento Remoto
ISSN: 1808-0936

ATUALIZAÇÃO DE PARÂMETROS NA TRANSFORMAÇÃO EM REFERENCIAIS GEODÉSICOS HISTÓRICOS

Updating of Parameters for Processing in Historical Geodetic Reference Frames

Giuliano Sant'Anna Marotta[1] & Dalto Domingos Rodrigues[2]

[1]**Universidade de Brasília - UnB**
Instituto de Geociências - IG
Campus Universitário Darcy Ribeiro ICC - Ala Central - CEP 70910-900 - Brasília - DF
marotta@unb.br

[2]**Universidade Federal de Viçosa – UFV**
Departamento de Engenharia Civil - Setor de Engenharia de Agrimensura
Av. PH Holfs, S/N – CEP 36570-000 - Viçosa - MG
dalto@ufv.br

Recebido em 06 Abril, 2011/ Aceito em 03 Julho, 2011
Received on April 06, 2011/ accepted on July 03, 2011

RESUMO

O mapeamento do território brasileiro passa por grandes transformações evidenciadas por constantes mudanças no referencial geodésico ocorridas ao longo do tempo. Tais mudanças possuem caráter espacial, temporal e dependem do modelo matemático empregado para relacionar os diferentes sistemas de referências. Aqui, o foco será o Distrito Federal do Brasil, que tem, conforme previsto em legislação distrital vigente, a sua referência geodésica atrelada ao Chuá Astro Datum e grande parte dos trabalhos é referenciada a pontos com coordenadas neste sistema. Parte de seu mapeamento encontra-se em discordância com as tecnologias, metodologias e legislações aplicadas no restante do país. Para entender o comportamento de dois diferentes modelos de transformação na região de Brasília, em diferentes épocas e adequar documentos geodésicos, atrelados ao referencial Chuá Astro Datum, ao SIRGAS2000, este trabalho apresenta a determinação de parâmetros de transformação utilizando o modelo simplificado de três parâmetros de translação, adotado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, e o modelo proposto por Helmert. Estes modelos foram aplicados em coordenadas de pontos geodésicos determinadas entre os anos de 1971 e 1972, cujo referencial é o Astro Datum Chuá, e às coordenadas dos mesmos pontos determinadas entre os anos de 2004 e 2006, no referencial SIRGAS2000. Como resultado, verificou-se que o modelo de Helmert apresentou melhor precisão relativa enquanto que o modelo simplificado se mostrou mais consistente na determinação dos parâmetros.

Palavras chaves: Incerteza Posicional, Parâmetros de Transformação, Referenciais Cartesianos.

ABSTRACT

The Brazilian territory mapping has undergone major transformations as evidenced by constant changes in its geodetic referential over the time. Such changes have spatial and temporal characters, and are dependent on the mathematical model used to relate the different reference systems. Here, the focus will be the Brazil's Federal District which is, as specified in its legislation, tied to the geodetic reference Chuá Astro Datum and most of its completed mapping is referenced to this system. This implies being in disagreement with technologies, methodologies and legislations applied to the rest of the country. To understand the behavior of two different transformation models in the region of Brasilia, at different times and to adequate the geodesical documents, linked to the reference Chuá Astro Datum, to the SIRGAS2000, this work presents the determination of transformation parameters using the simplified model of three translation parameters, adopted by the Brazilian Institute of Geography and Statistics - IBGE, and the model proposed by Helmert. These models were applied to geodetic coordinates of points determined between 1971 and 1972, whose reference is the Chuá Astro Datum, and the same points determined between the years 2004 and 2006, with coordinates referenced to the SIRGAS2000. As a result, it was found that the Helmert model showed better relative accuracy while the simplified model was more consistent in the parameters determination.

Keywords: Positional Uncertainty, Transformation Parameters, Cartesian Referentials.

1. INTRODUÇÃO

A Capital Federal do Brasil foi efetivamente constituída a partir do ano de 1956. Nesta época, as coordenadas utilizadas como referência de pontos bem materializados na superfície terrestre, eram essencialmente determinadas pelo método de triangulação e nivelamento geométrico com densificação realizada pelo método de poligonação. Segundo o IBGE (2011) tais métodos, denominados de "clássicos", foram aplicados até meados da década de 90 e os equipamentos utilizados eram os teodolitos e medidores eletrônicos de distâncias. Somente na década de 70, foram iniciadas operações de rastreio de satélites artificiais do sistema TRANSIT e esta tecnologia foi inicialmente aplicada na densificação de pontos geodésicos em locais onde não era possível empregar os métodos clássicos.

Assim como as diferentes técnicas de levantamentos geodésicos, o Brasil realizou várias mudanças adotando os seguintes sistemas geodésicos: Criciúma/Itararé, Córrego Alegre, PSAD56, Chuá Astro Datum, SAD 69, SAD 69/96 e SIRGAS2000.

Estas mudanças, tanto nos referenciais geodésicos quanto na metodologia empregada para determinação de coordenadas de pontos na superfície, proporcionaram maior precisão e, consequentemente, maior facilidade de integração de informações posicionais em âmbito global.

Porém, devido à necessidade de utilização de documentos geodésicos referenciados a épocas distintas e para cada região, torna-se relevante estabelecer uma relação entre diferentes sistemas geodésicos.

Não diferente da defasagem histórica ocorrida nos documentos geodésicos, a Capital Federal do Brasil apresenta a sua referência geodésica atrelada ao Chuá Astro Datum, onde grande parte dos trabalhos é referenciada a pontos materializados na superfície terrestre, conforme previsto em legislação distrital vigente. Esta situação não está adaptada e em concordância com as tecnologias, metodologias e legislações atuais aplicadas no restante do país.

2. OBJETIVO

Na busca em adequar documentos geodésicos, atrelados ao referencial Chuá Astro Datum, ao SIRGAS2000, este trabalho pretende determinar e analisar as transformações entre os diferentes referenciais geodésicos utilizando métodos existentes e já consolidados em softwares. Como método utilizado, apresenta-se a transformação simplificada que utiliza 03 parâmetros incógnitos de translação e a transformação estabelecida por Helmert, que utiliza 07 parâmetros incógnitos: 03 translação, 03 de rotação e 01 de escala.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Materiais

Foram utilizadas coordenadas geodésicas de pontos que abrangem toda a porção delimitada da Capital Federal do Brasil, fornecidas pela CODEPLAN – Companhia de Desenvolvimento do Planalto Central, estabelecidas entre os anos de 1971 e 1972 pelo Departamento de Geodésia e Topografia (DEGETOP), do IBGE, cujo referencial é o Chuá Astro Datum.

Para determinar os parâmetros de transformação, foram utilizadas coordenadas geodésicas dos mesmos pontos, estabelecidas pelo IBGE entre os anos de 2004 e 2006, no referencial SIRGAS2000.

No ajustamento dos parâmetros de transformação foram desenvolvidas rotinas utilizando o compilador *Borland C++ v.* 5.2.

3.2 Metodologia

As coordenadas normalmente extraídas de documentos cartográficos são as coordenadas planas UTM (E,N). Conhecendo a altitude geométrica (h), estas coordenadas podem ser transformadas em geodésicas, ou seja, latitude (φ) e longitude (λ).

Para estimar os parâmetros de transformação entre dois diferentes referenciais cartesianos, torna-se necessário transformar estas coordenadas geodésicas em coordenadas cartesianas retangulares (X, Y, Z). Esta transformação é dada por:

$$X = (N + h)\cos(\phi)\cos(\lambda) \quad (1)$$

$$Y = (N + h)\cos(\phi) sen(\lambda) \quad (2)$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h] sen\phi \quad (3)$$

sendo

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (4)$$

e

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\phi}} \quad (5)$$

onde "*e*" representa a excentricidade do elipsóide, "*a*" e "*b*" o semi-eixo maior e menor do modelo Elipsóidico da Terra, respectivamente, e *N* a grande normal.

A altitude a ser representada, juntamente com as coordenadas geodésicas, pode ser a altitude geométrica (*h*) ou a altitude ortométrica (*H*). Sendo a altitude geométrica a distância entre um ponto na superfície terrestre e sua projeção no elipsóide, na direção normal, e a altitude ortométrica é a distância entre um ponto na superfície terrestre e sua projeção no geóide, ao longo da vertical. A diferença entre elas, desprezando o desvio da vertical, é chamada ondulação geoidal ($\overline{N}$), ou seja:

$$\overline{N} \approx h - H \quad (6)$$

As altitudes utilizadas neste trabalho foram estabelecidas entre os anos de 1971 e 1972, bem como as estabelecidas entre os anos de 1994 a 1996 e estão referenciadas ao geóide. Por este fato, foi necessário utilizar a simplificação demonstrada na Equação 6 e tratar as altitudes de duas formas distintas, sendo elas:

I. Foram utilizadas as altitudes ortométricas na determinação de parâmetros de transformação. Esta necessidade se deu pela não disponibilidade de altitudes geométricas para os pontos referenciados ao Chuá Astro Datum.

II. Foram utilizados dados de ondulação geoidal atuais (denominado MAPGEO 2010), fornecidos pelo IBGE, na determinação das altitudes geométricas no referencial SIRGAS2000. Posteriormente foram utilizados os parâmetros fornecidos pelo IBGE e definidos os valores de altitude geométrica para os pontos referenciados ao Chuá Astro Datum.

Na determinação dos parâmetros de transformação, utilizando o modelo estabelecido por Helmert, primeiramente, considera-se dois sistemas de coordenadas cartesianas, que aqui, se traduzem nas coordenadas cartesianas nos sistemas Chuá Astro Datum (*Xt, Yt, Zt*) e SIRGAS2000 (*Xo, Yo, Zo*).

$$\begin{bmatrix} Xt \\ Yt \\ Zt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} + (1+S).(\varepsilon + I).\begin{bmatrix} Xo \\ Yo \\ Zo \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde "*S*" *é* o fator de escala, *TX*, *TY*, *TZ* são as componentes de translação, "*I*"é a matriz identidade e "ε" é a matriz de rotação em torno dos eixos *Xo*, *Yo* e *Zo*, disposta como:

$$\varepsilon = .\begin{bmatrix} 0 & \alpha_Z & -\alpha_Y \\ -\alpha_Z & 0 & \alpha_X \\ \alpha_Y & -\alpha_X & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde α_X, α_Y e α_Z são os ângulos de rotação, em radianos, nos eixos *Xo*, *Yo* e *Zo*, respectivamente.

Desenvolvendo a equação 7, tem-se:

$$\begin{bmatrix} Xt \\ Yt \\ Zt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} + (\varepsilon + I + S.\varepsilon + S.I).\begin{bmatrix} Xo \\ Yo \\ Zo \end{bmatrix} \quad (9)$$

Como o modelo de transformação de Helmert não é linear, há a necessidade de simplificações que possibilitem tratar o problema como linear, necessário para o ajustamento de observações pelo método paramétrico.

Segundo Souza *et al.* (2008), uma vez que *S* é constituído de um valor muito pequeno, o produto $S.\varepsilon$ é insignificante para muitas aplicações. Assim, a equação 7 pode ser simplificada e demonstrada pelo seguinte modelo funcional:

$$\begin{bmatrix} Xt \\ Yt \\ Zt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1+S) & \alpha_Z & -\alpha_Y \\ -\alpha_Z & (1+S) & \alpha_X \\ \alpha_Y & -\alpha_X & (1+S) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Xo \\ Yo \\ Zo \end{bmatrix} \quad (12)$$

ou

$$\begin{aligned} Xt &= TX + (1+S).Xo - \alpha_Y.Zo + \alpha_Z.Yo \\ Yt &= TY + (1+S).Yo + \alpha_X.Zo - \alpha_Z.Xo \\ Zt &= TZ + (1+S).Zo - \alpha_X.Yo + \alpha_Y.Xo \end{aligned} \quad (13)$$

Sendo o vetor dos parâmetros, X_a, dado por:

$$X_a = [TX,\ TY,\ TZ,\ 1+S,\ \alpha_X,\ \alpha_Y,\ \alpha_Z]^T \quad (14)$$

Segundo Sapucci e Monico (2000), a transformada de Helmert utilizando 7 parâmetros é utilizada nos casos em que, entre os referenciais envolvidos, as taxas de variação dos parâmetros não são disponíveis ou podem ser desprezadas por serem pequenas.

Considerando que não há diferença em escala e que os sistemas são paralelos, ou seja, que o fator de escala é unitário e que as rotações são nulas, tem-se como parâmetros somente as três translações e o modelo funcional é o seguinte:

$$\begin{aligned} Xt &= TX + Xo \\ Yt &= TY + Yo \\ Zt &= TZ + Zo \end{aligned} \quad (15)$$

Os parâmetros, X_a, para o modelo funcional apresentado pela Equação 15 é dado por:

$$X_a = [TX, TY, TZ]^T \quad (16)$$

Para estimar os parâmetros de transformação e seus desvios padrão foi utilizado o ajustamento de observações pelo Método dos Mínimos Quadrados – MMQ, método paramétrico.

A principal característica do método paramétrico é que as observações mais os resíduos delas devem ser funções dos parâmetros ajustados, Equação 17.

$$L_b + V = F(X_a) \quad (17)$$

onde "L_b" é o vetor dos valores observados, "V" o vetor dos resíduos dos valores observados e "$F(X_a)$" é o vetor das funções dos parâmetros ajustados.

Foram utilizados 81 pontos, distribuídos em toda porção da área de estudo, totalizando 243 observações de coordenadas em cada sistema de referência envolvido. Esta abundância de observações possibilita o ajuste com maior confiabilidade proporcionado pelo alto grau de liberdade.

Todas as observações de coordenadas utilizadas neste trabalho, em ambos os sistemas de referência (Chuá Astro Datum e SIRGAS 2000), foram extraídas de monografias de pontos confeccionadas pelo Departamento de Geodésia e Topografia (DEGETOP/IBGE), entre os anos de 1971 e 1972, e pelo IBGE, entre os anos de 2004 e 2006. Estas coordenadas são provenientes de vértices da rede planimétrica do Sistema Geodésico Brasileiro, determinadas pelo método de poligonação e triangulação.

Como as variâncias das coordenadas referenciadas ao Chuá Astro Datum não são conhecidas (não documentadas), não foi possível determinar a matriz variância-covariância dos valores observados (C_{Lb}). Como consequência, o modelo estocástico foi estabelecido como vetor unitário disposto na diagonal de uma matriz identidade, ou seja, as variâncias dos valores observados foram arbitradas em uma unidade, ou seja, 1 m^2, (Equação 18), assumindo que todas as observações possuem a mesma precisão.

$$C_{Lb} = \mathrm{diag}[\ \sigma^2_{X_1}\ \sigma^2_{Y_1}\ \sigma^2_{Z_1}..\sigma^2_{X_N}\ \sigma^2_{Y_N}\ \sigma^2_{Z_N}\ ] \quad (18)$$

As variâncias das observações, *a priori*, são utilizadas na determinação dos pesos (Equação 19) das observações.

$$P = \sigma_0^2 . C_{Lb}^{-1} \quad (19)$$

onde σ_0^2 é a variância das observações de peso unitário *a priori*.

Após a definição do modelo matemático e do número de observações, passa-se ao cálculo dos elementos da matriz das derivadas parciais, utilizando a seguinte equação:

$$A = \left. \frac{\partial F(X_a)}{\partial X_a} \right|_{X0} \quad (20)$$

Assim, utilizando o modelo matemático de Helmert e o modelo simplificado, pode-se apresentar as matrizes das derivadas parciais de acordo com as equações 21 e 22, respectivamente:

$$A_{7x243} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & X_n & 0 & -Z_n & Y_n \\ 0 & 1 & 0 & Y_n & Z_n & 0 & -X_n \\ 0 & 0 & 1 & Z_n & -Y_n & X_n & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$A_{3x243} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Como valores aproximados para os parâmetros, elementos do vetor X_0, adotou-se os parâmetros fornecidos pelo IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – Tabela 1.

Assim os parâmetros de translação entre SAD69 e Chuá Astro Datum podem ser determinados. Conhecendo-se os parâmetros de transformação entre SAD69 e SIRGAS2000, conforme Resolução do IBGE (PR – 1/2005), os parâmetros de transformação entre SIRGAS2000 e Chuá Astro Datum também podem ser determinados, Tabela 2.

Os parâmetros de transformação conhecidos representam somente a translação entre os referenciais cartesianos, determinado pelo modelo simplificado (3 parâmetros), como mostrado na Tabela 3.

Na realização do ajustamento das observações, utilizando o modelo de Helmert (7 parâmetros), foram atribuídos os valores iniciais para

Tabela 1 . Parâmetros de translação entre córrego alegre, SAD69 e Chuá Astro Datum.

Parâmetros	SAD69 (IBGE)	Chuá Astro Datum (IBGE)
TX (m)	-138.700	-61.670
TY (m)	164.400	-74.700
TZ (m)	34.400	29.400

Tabela 2. Parâmetros de translação entre SIRGAS2000, SAD69 e Chuá Astro Datum.

Parâmetros	SAD69 (IBGE)	Chuá Astro Datum
TX (m)	67.348	144.378
TY (m)	-3.879	-242.979
TZ (m)	38.223	33.223

as rotações como nulas e a escala igual a uma unidade.

Com os elementos da matriz das derivadas parciais, os valores observados e os pesos das observações, passa-se ao cálculo do vetor das correções aos valores aproximados dos parâmetros (X), dado por:

$$X = (A^t PA)^{-1} A^t PL \quad (23)$$

onde

$$L = L_b - L_0 \quad (24)$$

em que "L" é o vetor da diferença entre os valores observados (L_b) e calculados (L_0).

O critério utilizado para a estimativa dos parâmetros ajustados (X_a) se deu pelo processo iterativo, onde foram atribuídos à X_0, os valores de X_a.

$$X_a = X_0 + X \quad (25)$$

O processo iterativo se deu até o ponto de convergência, onde o vetor X apresentou valores não significativos, com limite de 0,1 mm para as translações e 0.00001" para as rotações.

Após convergência dos cálculos dos parâmetros, passa-se ao cálculo dos resíduos das observações (V) e da variância de referência *a* *posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$), a fim de se verificar possíveis discrepâncias nos valores observados e possível inconsistência no ajustamento realizado.

$$V = A.X - L \tag{26}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^t.P.V}{GL} \tag{27}$$

em que "*GL*" representa o grau de liberdade (diferença entre o número de observações e o de parâmetros).

A estimativa do erro, no processo de transformação entre sistemas, de acordo com os modelos propostos, se deu por meio de análise dos resíduos e das incertezas proporcionadas pelo ajustamento dos parâmetros.

Para avaliação da qualidade das observações e dos parâmetros de transformação estimados, foram analisados os resultados do ajustamento empregando testes estatísticos de precisão e de verificação de incidência de erros grosseiros, por meio dos testes *Qui-Quadrado* - χ^2 e teste *tau*, respectivamente, utilizando para isto a variância do ajustamento *a posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$) e os resíduos (*V*).

Para se verificar a hipótese de que a variância de referência *a posteriori* é estatisticamente igual a 1 (um), emprega-se o teste χ^2 (Equação 28). Compara-se o valor tabelado, ao nível de significância de 0.05, com o valor da variância de referência *a posteriori* dividido pelo número de graus de liberdade. Se o valor calculado se encontrar dentro do intervalo dos valores tabelados, não se rejeita a hipótese de que a variância de referência, ou sigma zero, *a posteriori* seja estatisticamente igual a 1 (um). Caso o valor calculado esteja fora do intervalo dos valores tabelados, torna-se necessário proceder a uma análise mais cuidadosa do ajustamento, verificando possíveis inconsistências na matriz variância-covariância das observações, possíveis erros grosseiros que podem ser verificados no vetor dos resíduos (resíduos excessivamente grandes) e possíveis erros sistemáticos decorrentes da inconsistência do modelo matemático.

$$\frac{\chi^2_{GL,\frac{\alpha}{2}}}{GL} < \hat{\sigma}_0^2 < \frac{\chi^2_{GL,1-\frac{\alpha}{2}}}{GL} \tag{28}$$

Tabela 3. Parâmetros iniciais (Vetor X_0) de Chuá Astro Datum para SIRGAS2000.

Parâmetros	Modelo simpificado (3 Parâmetros)	Modelo de Helmert (7 Parâmetros)
TX (m)	-144.378	-144.378
TY (m)	242.979	242.979
TZ (m)	-33.223	-33.223
1+*S*	-	1
α_X (")	-	0
α_Y (")	-	0
α_Z (")	-	0

O teste *tau* aplica sua distribuição pra verificar se uma observação é ou não *outlier* (Silva,1997). Essa técnica de exclusão tem sido largamente recomendada. Para isso, também pode-se usar o *data snooping* ou Método de *Baarda*, como sugerido em Monico (2003) e Silva (1997).

A detecção e eliminação de observações com erros grosseiros é fácil em situações em que os erros são grandes, ultrapassando 3 vezes o desvio padrão do conjunto de resíduos de uma determinada amostra, porém, Gemael (1994) diz que em muitas vezes, somente um teste estatístico pode justificar ou não a rejeição de uma observação suspeita de abrigar um erro grosseiro.

Segundo Cross (1983), há dois tipos principais de erros grosseiros: os cometidos nas medidas e os causados pelo uso de modelo matemático equivocado.

A Equação 29 demonstra o comportamento dos resíduos das observações em relação a seus respectivos desvios padrão e assim, pode-se detectar presença de erros grosseiros nas observações a partir da comparação entre os Resíduos Padronizados – *RP,* calculados para cada observação, e o valor de *tau* tabelado. Na aplicação do referido teste, adotou-se nível de significância de 0.05.

$$RP = \frac{V_i}{\sigma_{Vi}} \tag{29}$$

O cálculo do desvio padrão dos resíduos das observações foi realizado a partir da Matriz Variância-Covariância dos resíduos que é dada por:

$$C_V = \hat{\sigma}_0^2.\left[C_{Lb} - A.(A^t.P.A)^{-1}.A^t\right] \tag{30}$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ao realizar o ajustamento das observações com três e sete parâmetros incógnitos, utilizando tanto as altitudes ortométricas quanto as altitudes geométricas conforme formas descritas para determinação das altitudes, pode-se apresentar os resultados das variâncias do ajustamento a *posteriori* próximos de uma unidade (Tabelas 4 e 5).

Aplicando o teste de precisão χ^2, Equação 28, sobre a variância encontrada no ajustamento, verificou-se a aceitação da hipótese de que $\hat{\sigma}_0^2$ é estatisticamente igual a 1 tanto para o modelo de 3 parâmetros quanto para o modelo de 7 parâmetros.

Tabela 4. Valores encontrados para $\hat{\sigma}_0^2$ utilizando altitudes ortométricas como referência.

3 Parâmetros	7 Parâmetros
0.086451	0.034912

Tabela 5. Valores encontrados para $\hat{\sigma}_0^2$ utilizando Geométricas.

3 Parâmetros	7 Parâmetros
0.159267	0.028520

Tabela 6. Valores de *RP* calculados utilizando altitudes ortométricas como referência.

3 Parâmetros	7 Parâmetros
2.654	3.299

Tabela 7. Valores de *RP* calculados utilizando altitudes geométricas.

3 Parâmetros	7 Parâmetros
2.709	3.332

A aceitação da hipótese inerente ao teste empregado dá um indicativo de consistência no modelo estocástico. Porém, uma vez que os valores de precisão das observações foram arbitrados, foi realizada a iteração dos pesos.

Na aplicação do teste *tau*, ao valor tabelado de 3.66 para ambos os modelos, não foi indicada a presença de erros grosseiros. Esta constatação pode ser verificada pelo teste aplicado no maior valor de *RP* calculado para os modelos que utilizam 3 e 7 parâmetros respectivamente (Tabelas 6 e 7).

Após a aplicação dos testes apresentados, chegou-se aos valores dos parâmetros ajustados (vetor *Xa*) para os modelos de 3 e 7 parâmetros, apresentados na Tabelas 8 e 9.

Os desvios padrão dos parâmetros ajustados foram calculados e podem ser verificados nas Tabelas 10 e 11.

A grande diferença apresentada entre parâmetros iniciais utilizados e os ajustados era

Tabela 8. Parâmetros ajustados (vetor *Xa*), utilizando altitudes ortométricas como referência.

Parâmetros	3 Parâmetros	7 Parâmetros
TX (m)	**-134.839**	**-156.740**
TY (m)	**233.781**	**172.682**
TZ (m)	**-35.054**	**-16.972**
$1+S$	**-**	**0.9999975959**
α_X **(")**	**-**	**-0.39497**
α_Y **(")**	**-**	**-237.793**
α_Z **(")**	**-**	**-234.612**

Tabela 9. Parâmetros Ajustados (Vetor *Xa*), utilizando altitudes geométricas.

Parâmetros	3 Parâmetros	7 Parâmetros
TX (m)	**-142.827**	**-226.785**
TY (m)	**242.609**	**122.406**
TZ (m)	**-33.223**	**-17.017**
$1+S$	**-**	**0.9999957392**
α_X **(")**	**-**	**-0.00827**
α_Y **(")**	**-**	**-0.01148**
α_Z **(")**	**-**	**-0.08465**

Tabela 10. Desvios padrão dos parâmetros ajustados, utilizando altitudes ortométricas como referência.

Parâmetros	3 Parâmetros	7 Parâmetros
TX (m)	0.0327	5.176
TY (m)	0.0327	5.225
TZ (m)	0.0327	9.905
1+*S*	-	0.00000072
α_X (")	-	0.26477
α_Y (")	-	0.24815
α_Z (")	-	0.16585

esperada, uma vez que o ajuste se concentrou nas coordenadas na Capital Federal, utilizando coordenadas pertencentes a uma determinada região e não a totalidade do país.

Apesar de os parâmetros ajustados utilizando o modelo de 7 parâmetros apresentarem precisões inferiores aos ajustados pelo modelo de 3 parâmetros, pode-se perceber maior precisão nos resíduos (Tabelas 12 e 13) para o primeiro modelo.

Pode-se verificar também, que o ajustamento dos parâmetros utilizando altitudes geométricas como referência (Tabela 13) apresentou resultados inferiores aos que utilizam altitudes ortométricas como referência (Tabela 12), para 3 e 7 parâmetros.

4. CONCLUSÃO

Apesar de o modelo de Helmert apresentar maior número de parâmetros, capazes de absorver variações em translação, escala e rotação, o modelo simplificado demonstrou ser mais consistente na determinação dos parâmetros, pelas precisões alcançadas.

Analisando as variâncias de referência *a posteriori*, Tabelas 4 e 5, os desvios padrão e as amplitudes máximas e mínimas dos resíduos, conclui-se que o modelo de 7 parâmetros se adéqua melhor à transformação dos referidos sistemas.

Apesar da pequena variação entre as precisões avaliadas, o modelo de Helmert utilizando altitude ortométrica no ajustamento se mostrou mais eficiente.

Portanto, para a finalidade do trabalho, que se volta às técnicas antigas de levantamento e onde as coordenadas apresentadas se encontram referenciadas ao geóide, a metodologia empregada é confiável.

Tabela 11. Desvios padrão dos parâmetros ajustados, utilizando altitudes geométricas.

Parâmetros	3 Parâmetros	7 Parâmetros
TX (m)	0.443	4.678
TY (m)	0.443	4.722
TZ (m)	0.443	8.952
1+*S*	-	0.00000065
α_X (")	-	0.23931
α_Y (")	-	0.22429
α_Z (")	-	0.14989

Tabela 12. Desvios padrão e amplitudes dos resíduos, utilizando altitudes ortométricas como referência.

Resíduos	03 Parâmetros			07 Parâmetros		
	V_X (m)	V_Y (m)	V_Z (m)	V_X (m)	V_Y (m)	V_Z (m)
Desvio Padrão	0.388	0.223	0.243	0.214	0.166	0.172
Amplitude máxima	0.776	0.513	0.630	0.402	0.389	0.610
Amplitude mínima	-0.685	-0.530	-0.431	-0.554	-0.368	-0.422

Tabela 13. Desvios padrão e amplitudes dos resíduos, utilizando altitudes geométricas.

Resíduos	03 Parâmetros			07 Parâmetros		
	V_X (m)	V_Y (m)	V_Z (m)	V_X (m)	V_Y (m)	V_Z (m)
Desvio Padrão	0.572	0.388	0.000	0.225	0.169	0.071
Amplitude máxima	1.074	0.855	0.000	0.442	0.404	0.136
Amplitude mínima	-0.728	-0.808	0.000	-0.556	-0.410	-0.164

Por fim, conclui-se que, para fins de utilização de documentação geodésica e cartográfica confeccionada na época em estudo, o modelo de Helmert se apresenta mais adequado.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Geociências da Universidade de Brasília - UnB, à CODEPLAN e ao IBGE, pelo fornecimento dos materiais utilizados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CROSS, P. **Working Paper No. 6, Advanced Least Squares Applied to Position-Fixing.** Series Editor: A S Walker, North East London Polytechnic, Department of Land Surveying, 1983.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba – PR. 1994. 319p.

IBGE. Disponível em < http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/default.shtm>. Acesso em: 10/jan/2010.

MONICO, J. F. G.; SILVA, E. F. Controle de qualidade em levantamentos no contexto da Lei 10267, In: III Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas – CD ROM, Universidade Federal do Paraná, Curitiba – PR. 2003, **Anais**.

SILVA, A. S. **Optimisation of surveying monitoring networks.** PhD Thesis Institute of Surveying and space Geodesy, University of Nottingham UK, 1997.

SAPUCCI, L. F.; MONICO, J. F. G. Transformação de Helmert Generalizada no Posicionamento de Alta Precisão: Fundamentação Teórica e Aplicações. **Revista Brasileira de Geofísica**, Rio de Janeiro - RJ, v. 18, n. 2, p. 161-172, 2000.

SOUZA, E. M.; ALVES, D. B. M.; MONICO, J. F. G. As diferentes versões da Transformada de Helmert e suas aplicações na Transformação entre Sistemas de Referência. **TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 9, p. 481-490, 2008.