

# DETERMINAÇÃO DA DIFERENÇA DE GEOPOTENCIAL DO DATUM VERTICAL BRASILEIRO RELATIVA AO *EARTH GRAVITY MODEL 2008*

*Determination of the Geopotential Difference of the Brazilian Vertical Datum with Respect to the Earth Gravity Model 2008*

Vagner Gonçalves Ferreira<sup>1</sup>  
Silvio Rogério Correia de Freitas<sup>1</sup>  
Bernhard Heck<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná – UFPR  
Departamento de Geomática  
Centro Politécnico, 81531-990, Curitiba, PR, Brasil  
vgf@ufpr.br  
sfreitas@ufpr.br

<sup>2</sup>Universidade de Karlsruhe  
Instituto de Geodésia  
Englerstraße 7, 76131, Karlsruhe, Alemanha  
bernhard.heck@kit.edu

## RESUMO

Neste trabalho são apresentadas a determinação e análise da diferença de geopotencial do *Datum* Vertical Brasileiro em relação ao geóide associado ao *Earth Gravity Model 2008* (EGM2008). Empregou-se o EGM2008 devido à alta resolução do mesmo, para a área de estudos, 8,06 km. Para a região no entorno do *Datum* Vertical Brasileiro o *Earth Gravity Model 96* (EGM96) não apresenta resolução suficiente para refletir as componentes de alta frequência do campo da gravidade. Neste caso, seria necessária uma área suficientemente grande com informações GNSS/Nivelamento para suavizar a alta frequência das componentes da gravidade. O afastamento vertical da origem do sistema de altitudes brasileiras em relação à superfície equipotencial do EGM2008 foi determinado com um método estruturado com base na análise nos resíduos do geopotencial sobre uma rede primária regional de 20 pontos GNSS/Nivelamento associados à gravimetria e um conjunto de estações derivadas. O afastamento vertical das superfícies correspondentes e, conseqüentemente, a diferença de potencial entre as duas superfícies foram determinados respectivamente como de  $-0,31 \pm 0,01\text{m}$  e  $3,04 \pm 0,08 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ . Como destaque do método desenvolvido evidencia-se a possibilidade da determinação do afastamento vertical com vistas à unificação de *data* altimétricos sem o cálculo de modelos geoidais, e como conseqüência, sem a propagação dos erros envolvidos no cálculo destes modelos.

**Palavras chaves:** Datum Vertical Brasileiro, EGM2008, GNSS/Nivelamento, Unificação de *Data* Verticais.

## ABSTRACT

This study shows the determination and analysis of the anomalous geopotential difference of the Brazilian Vertical Datum related to the geoid associated with the Earth Gravity Model 2008 (EGM2008). The offset of the origin of the Brazilian Vertical Network related to the given equipotential surface of EGM2008 was determined based on a structured method for analyzing the geopotential residuals over a regional network formed by 20 primary GNSS/leveling and gravimetry sites, and a set of secondary stations. It was found that the height datum of Brazil is in the mean 0.31m below the EGM2008 reference equipotential surface or  $3.04 \pm 0.08 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  as difference of geopotential. We must emphasize that the proposed methodology allows determining the offset of the BVD related to a Global Height System without computation of local geoids and, in consequence, without error propagation related to those models.

**Keywords:** Brazilian Vertical Datum, EGM2008, GNSS/Leveling, Vertical Datum Unification.

## 1. INTRODUÇÃO

Os vários *data* altimétricos, definidos pelo nível médio do mar em uma dada referência temporal são por definição *data* locais com geopotencial  $W_i$ . Para a unificação de *data* locais a um *datum* global, com geopotencial  $W_0$ , faz-se necessário o conhecimento da influência das massas anômalas na região contígua a estes *data*. A realização e definição de altitudes físicas dependem fortemente das características do campo da gravidade contíguos aos *data*.

O geóide definido como a superfície equipotencial do campo da gravidade melhor ajustada ao Nível Médio do Mar (NMM) difere da superfície média dos oceanos por uma grandeza linear designada por Topografia do Nível Médio do Mar (TNMM) (Do inglês *Sea Surface Topography* SSTop). A esta diferença, deve-se uma das principais causas da discrepância entre o NMM em diferentes marégrafos da costa brasileira relativamente aos zeros propagados pela Rede Vertical Fundamental do Brasil (RVFB). A TNMM é uma das possíveis causas da incompatibilidade entre os dois *data* altimétricos ora em uso no Brasil, a saber, Imbituba, SC e Santana, AP. Este fenômeno pode ser modelado, e a resultante TNMM pode ser usada para relacionar a diferença entre os *data* verticais.

Heck e Rummel (1990) propuseram estratégias para estimar a TNMM em pontos costeiros a partir de algumas alternativas de associação de observações terrestres, oceânicas e oriundas de plataformas orbitais. Segundo De Freitas *et al.* (2002), esta diferença é, geralmente, devida a características anômalas locais do geopotencial que devem ser analisadas do ponto de vista da interação oceano/continente. Com densificação gravimétrica no entorno do *datum* poder-se-á conhecer o campo da gravidade local com o objetivo da determinação da parcela relativa das contribuições locais, devidas às massas continentais anômalas. Já para a parte oceânica deve ser dado outro enfoque, principalmente com base em gravimetria oceânica e altimetria por satélite, fugindo do escopo deste trabalho.

Segundo Dalazoana (2005), erros relativos à estimativa da TNMM são provenientes em sua maioria de erros do modelo geoidal, ou seja, a estimativa para a TNMM está limitada a erros no conhecimento do campo da gravidade. A autora ainda enfatiza algumas melhorias que podem ser dadas em modelos globais do geopotencial, dentre elas a densificação com posicionamento GNSS (*Global Navigation Satellite System*) e gravimetria na região de estudos.

A conexão de *data* verticais, conforme contexto discutido em Burša *et al.* (2002), pode ser realizada com base em um conjunto de pontos, com altitudes elipsoidais conhecidas sobre distintas linhas de nivelamento geométrico convencional convergentes ao *Datum*. Esta linha deve ser associada à gravimetria, de forma a permitir a determinação de desníveis geopotenciais, em uma área suficientemente ampla para que a média dos erros do Modelo Global do

Geopotencial (MGG) seja insignificante. Fotopoulos *et al.* (2005) propuseram uma metodologia para incorporar a TNMM no estabelecimento de redes de controle vertical. Os mesmos autores consideraram que a maior fonte de distorções em redes de controle vertical é causada por negligenciar-se a TNMM para as estações maregráficas.

A unificação de *data* verticais é uma das principais linhas de pesquisa atual no contexto da Geodésia Física. Este tema tem sido estudado por diversos pesquisadores como: Heck e Rummel (1990), Xu e Rummel (1991), Rapp (1995), Grafarend e Ardalán (1997), Featherstone (2000), Jekeli (2000), Rummel (2000), Ardalán e Safari (2005), Amos (2007), Zhang *et al.* (2008), Amos e Featherstone (2009). Segundo Rummel (2000) o principal ponto para a unificação de *data* verticais é determinar a diferença de potencial e por último a diferença de altitudes entre estes.

Em vista da abrangência do problema de vínculo de diferentes redes verticais, esta análise é considerada no contexto de conexões de redes verticais com origem em distintos maregráficos e em diferentes épocas. Em particular, neste estudo é determinada a relação do geóide local ( $W_i$ ) com o geóide global ( $W_0$ ), via uma estratégia de determinação da componente anômala do geopotencial, neste caso relativamente ao EGM2008 usado como referência global na forma:

$$\delta W_i = W_i - W_0. \quad (1)$$

Esta parcela deve conter informações relativas aos médios e curtos comprimentos de ondas do geóide que define a origem do sistema de altitudes locais. Para tanto é estabelecida uma rede regional com base no sistema de altitudes normais.

## 2. GEOPOTENCIAL LOCAL NO DVB

A componente anômala do geopotencial no DVB, em decomposição espectral, é dada pelos coeficientes não contidos nos modelos, considerando os modelos em seu grau e ordem máximos, no qual podem ser melhorados por observações locais (idealmente até o infinito,  $\infty$ ) e a diferença de potencial para o DVB. Por exemplo, o EGM2008 com coeficientes harmônicos esféricos até o grau 2190 e ordem 2159 pode resolver a componente local com uma resolução espacial de cerca de 9 km, no entanto, somente para regiões das quais dados terrestres foram disponibilizados. Para cada representação de uma função harmônica esférica com um limite superior  $\ell_{\max}$  corresponde uma filtragem passa-baixa. Consequentemente está correlacionada com a resolução espacial para o MGG na superfície terrestre.

Segundo Burša *et al.* (1999), o conhecimento do geopotencial local  $W_i$  com dados obtidos por GNSS/Nivelamento, um MGG, a constante gravitacional geocêntrica  $GM$ , a velocidade angular de rotação da Terra  $\omega$ , e o coeficiente harmônico zonal de

grau 2 ( $J_2$ ) são importantes para conectar *Data Verticais Locais* (DVL's) a um *datum* global. De acordo com Jekeli (2000), o geopotencial local ( $W_i$ ) pode ser determinado através da combinação GNSS/Nivelamento, altitude normal e um MGG.

Considere agora a normal ao elipsoide passante em  $P$  (Fig. 1). Esta linha contém um ponto  $Q$ , onde o esferopotencial iguala ao geopotencial em  $P$  (JEKELI, 2000):

$$U_Q - U_0 = W_P - W_0, \quad (2)$$

i.e.,  $C'_Q = C_P$ , o número esferopotencial em  $Q$  é igual ao número geopotencial em  $P$ . Maiores detalhes podem ser encontrados em Molodenskii *et al.* (1962).

Efetivando-se uma expansão do esferopotencial em uma série de Taylor ao longo da normal obtém-se:

$$U_P = U_Q + (h_P - h_Q) \left. \frac{\partial U}{\partial h} \right|_{h=h_Q} + \frac{1}{2!} (h_P - h_Q)^2 \left. \frac{\partial^2 U}{\partial h^2} \right|_{h=h_Q} + \dots \quad (3)$$

e fazendo

$$\gamma_Q = - \left. \frac{\partial U}{\partial h} \right|_{h=h_Q}, \quad (4)$$

sendo  $\gamma_Q$  a gravidade normal para o ponto  $Q$ , e com a relação (2), obtém-se:

$$h_P - h_Q = \frac{1}{\gamma_Q} (W_P - U_P) - \frac{1}{2\gamma_Q} (h_P - h_Q)^2 \left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_{h=h_Q} + \dots \quad (5)$$

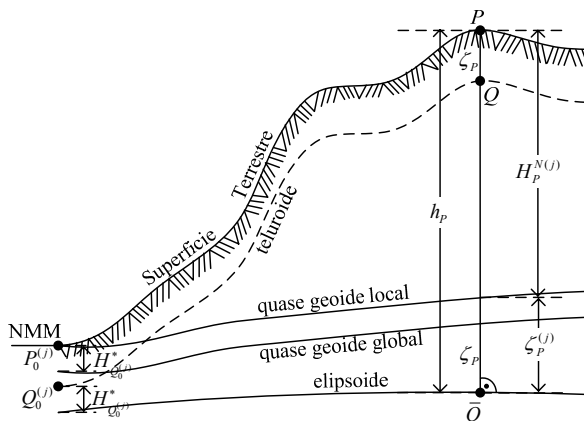


Fig. 1 - Altitude normal, anomalia de altura e o quase geóide. Fonte: Adaptado de Jekeli (2000, p 11).

Na equação (5) o lado esquerdo é a anomalia de altura  $\zeta_P$  (MOLODENSKII *et al.*, 1962). O segundo termo no lado direito pode ser ignorado; desde que

$|h_P - h_Q| < 110$  m, diferença esta praticamente inatingível em regiões como a utilizada no estudo. Sendo o gradiente normal médio da gravidade igual a  $-0,3086$  mGal·m<sup>-1</sup>, para a referida diferença o termo considerado resulta em um valor menor que 2 mm (JEKELI, 2000).

Definindo o *distúrbio do potencial*,  $T_P$  no ponto  $P$ , como a diferença entre o geopotencial ( $W$ ) e o esferopotencial ( $U$ ) tem-se:

$$T_P = W_P - U_P. \quad (6)$$

Obtém-se então a partir da (5) a anomalia de altura em função do distúrbio do potencial:

$$\zeta_P = \frac{T_P}{\gamma_Q}. \quad (7)$$

Da Fig. 1 é possível obter-se a seguinte relação:

$$\zeta_P^{(j)} = \zeta_P + H_{Q_0}^* = \zeta_P + \frac{U_0 - W_0^{(j)}}{\gamma}. \quad (8)$$

A anomalia de altura local pode ser expressa, também, em termos do distúrbio do potencial:

$$\zeta_P^{(j)} = \frac{T_P}{\gamma_Q} + \frac{U_0 - W_0^{(j)}}{\gamma_{Q_0}^{(j)}}. \quad (9)$$

Supondo-se o ponto  $P$  sobre o geóide local ( $P = P_0^{(j)}$ ), pode-se escrever:

$$h_{P_0^{(j)}} - h_{Q^{(j)}} = \frac{T_{P_0^{(j)}}}{\gamma_{Q^{(j)}}}, \quad (10)$$

onde  $Q^{(j)}$  é o ponto qual  $U_P^{(j)} = W_{P_0^{(j)}}$ .

Destaque-se primeiro que mais uma vez aplicando à relação (2) ( $P \rightarrow Q^{(j)}$  e  $Q \rightarrow \bar{Q}$ ), tem-se:

$$h_{Q^{(j)}} - h_{\bar{Q}} = \frac{1}{\gamma_{\bar{Q}}} (U_{\bar{Q}} - U_{Q^{(j)}}), \quad (11)$$

ou

$$h_{Q^{(j)}} - h_{\bar{Q}} = \frac{1}{\gamma_{\bar{Q}}} (U_{\bar{Q}} - W_0^{(j)}). \quad (12)$$

Assim, com a anomalia de altura local  $\zeta_P^{(j)} = h_{P_0^{(j)}} - h_{\bar{Q}}$  e  $W_{P_0^{(j)}} = W_0^{(j)}$  obtém-se:

$$\zeta_P^{(j)} = \frac{T_P^{(j)}}{\gamma_{Q_0}^{(j)}} + \frac{1}{\gamma_Q} (U_Q - W_0^{(j)}). \quad (13)$$

As equações (7), (8) e (12) são variações da fórmula de Bruns (HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2006, pp 119-121).

A partir de nivelamento e gravimetria obtém-se a altitude normal  $H_P^{N(j)}$  com relação ao quase geóide local. Com posicionamento GNSS obtém-se a altitude elipsoidal,  $h_p$ , que permite calcular em  $P$  o potencial de um MGG, considerado aqui sem erros. Também se pode calcular em  $P$  o potencial  $T_P$  de acordo com (5). Da Fig. 1, tem-se:

$$h_p = H_P^{N(j)} + \zeta_P^{(j)}. \quad (14)$$

Usando a expressão (8) para a anomalia local de altura, calcula-se o potencial do geóide local como:

$$W_i = U_0 - \gamma_{Q_0}^{(j)} \left( h_p - H_P^{N(j)} - \frac{T_P}{\gamma_Q} \right). \quad (15)$$

Todas as quantidades do lado direito são dadas ou medidas, sendo o lado esquerdo o potencial para o geóide local.

A discrepância local relativamente a um valor de referência global  $W_0$  do geopotencial pode ser dada por:

$$\delta(H_0)_{DVL} = \frac{W_0 - W_i}{\gamma_{Q_0}^{(j)}}. \quad (16)$$

que expressa diretamente os afastamentos verticais  $\delta(H_0)_{DVL}$  do respectivo *datum* vertical local com relação à superfície de referência adotada  $W = W_0$  (e.g. EGM96) conforme Burša *et al.* (1999).

Reescrevendo a (16), em decorrência das grandezas envolvidas associadas às observações, conforme desenvolvimento precedente nesta seção, considerando-se valores locais e globais, tem-se os seguintes modelos:

$$\delta(H_0)_{DVL} = h_p - H_P^{N(j)} - \zeta_P, \quad (17)$$

e

$$\delta(H_0)_{DVL} = \zeta_P^{(j)} - \zeta_P. \quad (18)$$

Para a estimativa do valor do geopotencial local para o DVB conforme trabalhos semelhantes de determinações do potencial para *data* verticais apresentados em Rapp (1994), Grafarend e Ardalán (1997), Burša *et al.* (1999), Ardalán e Safari (2005) faz-se necessário o conhecimento do geopotencial global. Para o geopotencial global ( $W_0$ ) pode-se utilizar os

valores publicados por Burša *et al.* (1999), Burša *et al.* (2001), Burša *et al.* (2002), Burša *et al.* (2004), Burša *et al.* (2007) e Sánchez (2005). Maiores informações visando à definição do geopotencial global podem ser encontradas em Sánchez (2005) e Sánchez (2006).

Os DVL's são realizados via altitudes niveladas relativas ao marégrafo, sendo esta a razão pela qual os valores do geopotencial local ( $W_i$ ) correspondentes aos maregráfos devem ser determinados. Assim, a diferença:

$$(W_i)_{DVL} - W_0 = \delta(W_0)_{DVL}, \quad (19)$$

define diretamente os afastamentos verticais  $\delta(H_0)_{DVL}$  do respectivo *datum* vertical local com relação à superfície de referência adotada  $W = W_0$ , i.e., o *datum* do Sistema Global de Altitudes (SGA) adotado,

$$\delta(H_0)_{DVL} = -\frac{\delta(W_0)_{DVL}}{\gamma_{DVL}}, \quad (20)$$

onde  $\gamma_{DVL}$  corresponde ao valor da gravidade normal no marégrafo do DVL dado por:

$$\gamma_{DVL} = \gamma \left[ 1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \text{sen}^2 \varphi) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right] \quad (21)$$

sendo  $\gamma$  calculado, por exemplo, pela fórmula de Somigliana (TORGE, 2001, p. 106):

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \text{sen}^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 \varphi}}, \quad k = \frac{b \gamma_p}{a \gamma_e} - 1, \quad (22)$$

onde,  $\gamma_e$  é a gravidade normal no equador;  $\gamma_p$  a gravidade normal no polo;  $a$  o semi-eixo maior do elipsoide de referência;  $b$  o semi-eixo menor; e  $f$  é o achatamento do elipsoide de referência,  $h$  a altitude elipsoidal e  $m$  é a relação entre a força centrífuga por unidade de massa e a gravidade normal no equador. Para o *Geodetic Reference System* 1980 (GRS80), têm-se os valores apresentados na Tabela 1 de acordo com Moritz (2000).

Empregou-se o GRS80 neste estudo pelo fato do mesmo ser a base do SIRGAS2000, atual Sistema Geodésico de Referência (SGR), realizado para a época 2000,4, do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB), vinculado ao Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas (SIRGAS).

Segundo Ihde e Sánchez (2005) a definição para um SGA é baseada na superfície média dos oceanos, parâmetros do campo da gravidade, e da realização de um sistema de referência tridimensional terrestre.

A solução prática para a equação (20) é utilizar a anomalia de altura para o DVB a partir de posicionamento GNSS/Nivelamento ( $\zeta_{DVB}$ ) e a partir de

um MGG ( $\zeta_{MGG}$ ) determinando-se o afastamento vertical entre as duas referências por:

$$(\delta(H_0)_{DVL})_i = (\zeta_{DVB})_i - (\zeta_{MGG})_i, \quad (23)$$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . A relação (23) está em conformidade com as equações (17) e (18) apresentadas anteriormente.

TABELA 1 – CONSTANTES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS PARA O GRS80.

| Constantes  | Valores    |  |
|-------------|------------|--|
| físicas     | $\gamma_e$ | 9,7803267715 ms <sup>-2</sup>                                |
|             | $\gamma_p$ | 9,8321863685 ms <sup>-2</sup>                                |
|             | $m$        | 0,00344978600308   |
|             | $U_0$      | 62636860,85 m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>                   |
|             | $GM_0$     | 39868600,5000 10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup> |
| geométricas | $a$        | 6.378.137,000 m  |
|             | $b$        | 6.356.752,3141 m   |
|             | $f$        | 0,00335281068118   |

No caso em que se têm vários pontos observados no entorno do *datum*, poder-se-á empregar o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para determinar a estimativa pontual, ou seja, a melhor aproximação em  $n$  observações. A média ponderada do parâmetro desconhecido (afastamentos verticais)  $\delta(H_0)_{DVL}$  bem como sua respectiva variância é calculada conforme as equações a seguir:

$$\delta(H_0)_{DVL} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot (\delta(H_0)_{DVL})_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad (24)$$

$$p_i = \frac{1}{(\sigma_{\delta(H_0)})_i^2}. \quad (25)$$

Isto é, a melhor aproximação para  $\delta(H_0)_{DVL}$  é a média ponderada dos resultados das medições  $(\delta(H_0)_{DVL})_i$ , com pesos  $p_i$  (*peso estatístico* da medição) e  $(\sigma_{\delta(H_0)})_i^2$  é a variância das observações.

A incerteza na melhor aproximação  $\delta(H_0)_{DVL}$  pode ser obtida aplicando-se a lei especial de propagação das incertezas, uma vez que  $\delta(H_0)_{DVL}$  é um valor que é calculado em função das quantidades  $(\delta(H_0)_{DVL})_1, (\delta(H_0)_{DVL})_2, \dots, (\delta(H_0)_{DVL})_n$ . Assim,

$$\sigma_{\delta(H_0)_{DVL}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}. \quad (26)$$

Na equação (26), os elementos  $(\sigma_{\delta(H_0)})_i^2$  são calculados por:

$$\sigma_{\delta(H_0)}^2 = \sigma_h^2 + \sigma_H^2 + \sigma_\zeta^2, \quad (27)$$

onde  $\sigma_h^2$  é a variância da altitude elipsoidal,  $\sigma_H^2$  é a variância da altitude normal e  $\sigma_\zeta^2$  é a variância da anomalia de altura advinda do MGG adotado.

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) ao definir e implantar a RVFB não forneceu a precisão com que foram determinadas as altitudes. Segundo Luz *et al.* (2007), testes recentes sobre a RVFB evidenciam que as estratégias de ajustamento até então empregadas, introduzem distorções devidas ao tratamento em separado pelas divisões da rede em blocos menores. É possível que com um reajustamento global de toda a rede estes valores serão mais consistentes. Mas para fins de aplicação deste trabalho, no entanto, a variância será estimada com o modelo padrão de propagação dos erros:

$$\sigma_H = \pm 4\text{mm}\sqrt{k}. \quad (28)$$

### 3. DOS DADOS UTILIZADOS E RESULTADOS

#### 3.1 Rede Vertical Fundamental Brasileira

A Fig. 2 mostra as RN's que foram encontradas ao redor do DVB em uma área de 1° x 1°, com centro no DVB, compreendida entre as longitudes 49,16°W e 48,16°W e latitudes 28,74°S e 27,74°S.

Para que sejam obtidos os números geopotenciais relativos ao DVB, deve-se partir da origem das altitudes transportando os desníveis do número geopotencial para cada estação de interesse. Uma vez conhecidos os desníveis em metros e valores médios da gravidade, fica simples a sua realização.

Nesta região, 76% das RN's estão destruídas. As RN's encontradas, 21 RN's, tiveram suas posições geocêntrica bem determinadas com o GNSS bem como a leitura do valor da gravidade. No processamento dos dados, aplicou-se a mesma correção de maré terrestre (*zero-tide*) para as observações GNSS e valores da gravidade. Mais pormenores deste procedimento são encontrados em Ekman (1989), Vatrt (1999), de Freitas *et al.* (2007) e Mäkinen e Ihde (2007). Todas as constantes geodésicas e o elipsoide de referência são consistentes em todo o processamento dos dados. Por outro lado, estas diferenças podem introduzir erros significantes na unificação de *data* verticais.

Para a aplicação da metodologia descrita no item 2, determinou-se os números geopotencial para as RN's, tornando possível o cálculo das altitudes normais.

Em campanhas realizadas na área de estudos, o valor da gravidade foi mensurado para a RN 4X, sendo seu valor  $g_{4X} = 979.166,780$  mGal relativo à estação de referência do Observatório Nacional. A altitude bruta para a RN4X fornecida em Dalazoana (2005) é de  $8,64204 \text{ m} \pm 1,39 \text{ mm}$  e aqui adotado, diferente do valor fornecido pelo IBGE que é de  $8,6362 \text{ m}$ . Com estes valores foi possível a determinação dos números geopotenciais, relativos ao DVB, para as estações ora em questão.

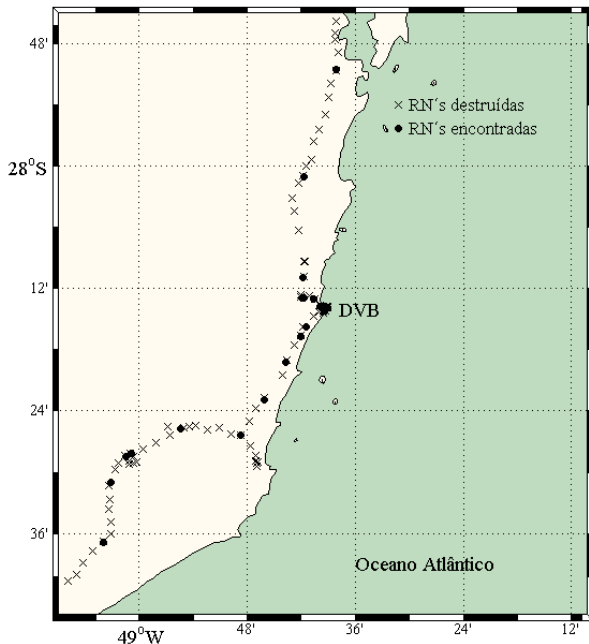


Fig. 2 - Distribuição das referências de nível em torno do Datum Vertical Brasileiro.

A altitude elipsoidal da RN 4X foi definida a partir de ocupação excêntrica, isso devido a obstruções em seu entorno, inviabilizando o posicionamento GNSS, sendo seu valor de  $h_{4X} = 9,984 \text{ m} \pm 0,002 \text{ m}$ . O número geopotencial para a RN 4X é  $C_{4X} = 84,62 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ .

### 3.2 Modelo Global do Geopotencial

Um MGG compreende um conjunto completo dos coeficientes harmônicos normalizados com o comprimento de onda que expressam características do campo da gravidade externo da Terra. A anomalia de altura  $\zeta$  é calculada a partir do MGG usando a equação (29) na forma (TORGE, 2001):

$$\zeta'_{n_{\max}}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r\gamma_Q} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{n_{\max}} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left( \frac{\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda}{\Delta\bar{S}_{nm}} \right) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \right\}, \quad (29)$$

Onde,  $GM$  é a constante gravitacional geocêntrica;  $\gamma_Q$  é a gravidade normal para  $Q$  (Fig. 1);  $(r, \theta, \lambda)$  são,

respectivamente, o raio vetor geocêntrico, a colatitude, e a longitude para um ponto ( $P$ ) sobre a superfície terrestre (Fig. 1);  $a$  o semieixo maior para o elipsoide de referência;  $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$  são as funções associadas de Legendre para um grau  $n$  e ordem  $m$ ;  $\Delta\bar{C}_{nm}$  e  $\Delta\bar{S}_{nm}$  são os coeficientes harmônicos esféricos normalizados para o MGG, devidamente subtraídos dos coeficientes harmônicos zonais pares para o elipsoide de referência.

Para o EGM2008 tem-se os seguintes valores numéricos (PAVLIS *et al.*, 2008):

$$GM = 3986004,415 \times 10^8 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$$

$$a = 6378136,58 \text{ m}.$$

Note que o semieixo maior para o elipsoide do EGM2008 difere do semieixo do elipsoide GRS80 (Tabela 1). Devem-se escalonar os coeficientes relativos ao potencial normal da gravidade ou ainda aplicar o termo de ordem zero.

A determinação da anomalia de altura com o uso do MGG é dada pela fórmula geral (RAPP, 1997):

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta', \quad (30)$$

onde  $\zeta'$  e  $\zeta_0$  são respectivamente a anomalia de altura calculada até um dado grau máximo ( $n_{\max}$ ) e o termo  $\zeta_0$  representa a contribuição do harmônico de grau zero, calculado por (HEISKANEN e MORITZ, 1967; RAPP, 1997):

$$\zeta_0 = \frac{GM - GM_0}{r\gamma_Q} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma}, \quad (31)$$

onde os parâmetros  $GM_0$  e  $U_0$  correspondentes ao GRS80 (MORITZ, 2000) estão transcritos na Tabela 1.

A mais alta resolução atingível de um MGG na superfície da Terra é determinada pelo seu grau máximo,  $n_{\max}$ . O comprimento de onda máximo é dado aproximadamente por (AMOS, 2007):

$$\lambda_{\max} \approx \frac{2\pi R}{n_{\max}} \cos\varphi. \quad (32)$$

A resolução máxima dos modelos globais do geopotencial é igual à metade do comprimento máximo de onda

$$\rho_{\max} = \frac{\pi R}{n_{\max}} \cos\varphi. \quad (33)$$

Portanto, assumindo um raio terrestre médio  $R = 6.371 \text{ km}$ , a resolução máxima atingível para o grau 360 (*e.g.* EGM96; LEMOINE *et al.*, 1998) é de aproximadamente  $55 \text{ km}$  no equador. Para o DVB, latitude aproximada de  $-28,24^\circ$  a resolução máxima é de aproximadamente  $49 \text{ km}$ .

O EGM2008 da *US National Geospatial-Intelligence Agency* (PAVLIS *et al.*, 2008) está completo até o grau e ordem 2159 dos coeficientes harmônicos elipsoidais e resolve assim os curtos comprimentos de ondas do geóide e da anomalia da gravidade. O EGM2008 contém coeficientes adicionais até o grau 2190 e ordem 2159 quando da conversão para harmônicos esféricos. Mais pormenores são apresentados em Holmes e Pavlis (2007). O EGM2008 incorpora dados de gravidade das mais recentes soluções via missões dos satélites GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*). Incorpora também dados altimétricos derivados utilizando o *Preliminary Gravitational Model B* (PGM2007B), uma variante do PGM2007A, e o modelo *Dynamic Ocean Topografic* (DOT) como referência. Foi utilizado o ITG-GRACE03S (MAYER-GÜRR, 2007), juntamente com o seu erro complementar da matriz covariância para  $n_{max} = 180$  e ajustamento por mínimos quadrados em termos de coeficientes harmônicos, a fim de combinar informações somente da missão GRACE com os coeficientes implícitos exclusivamente por dados terrestres (JAMUR, 2007).

O EGM2008 está disponível para o potencial externo da Terra, levando a um nível sem precedentes da amostragem da resolução espacial (~9 km) para o campo da gravidade em todo o globo. Esse passo revolucionário contribui para a continuação dos esforços da comunidade geodésica nos últimos anos (e após o lançamento dos satélites das missões CHAMP, *Challenging Minisatellite Payload*, e GRACE) para uma alta resolução e alta precisão do modelo do campo da gravidade da Terra. Considerado este como uma referência estática. Além disso, fornece uma ferramenta indispensável para apoiar novos estudos do campo da gravidade e outras investigações, especialmente tendo em conta a missão GOCE (*Gravity Field and Steady-state Ocean Circulation Explorer*, lançado em 17 de março de 2009) e os desenvolvimentos contínuos do *Global Geodetic Observing System* (GGOS).

Os MGG's são importantes nas determinações locais do geóide (ou do quase geóide), pois permitem a definição e realização de um sistema de altitude mundial especificado pelo geopotencial global (BURŠA *et al.* 2007). O geóide correspondente (ou quase geóide) é dependente do conhecimento do geopotencial via um modelo global que expressa as componentes anômalas locais com determinada resolução, no entanto insuficiente para a definição do nível de referência local. Os MGG's de grau baixo são determinados, principalmente, a partir da análise de órbitas de satélites até o grau e ordem 70. Combinando-se estes dados com observações terrestres da gravidade (aéreos, marinhos e continentais) e dados de altimetria por satélites (anomalias da gravidade ou alturas geoidais) permitem a obtenção de modelos com maior resolução, na atualidade com grau 2190 e ordem 2159 conforme já referido. A principal desvantagem da inclusão de valores de anomalias da gravidade com base em gravimetria terrestre, é que as mesmas refletem

inconsistências dos *data* verticais locais, pois são as referências para a redução da gravidade medida na superfície física da Terra.

As análises aqui realizadas são efetivadas em termos de comparações entre valores observados das anomalias de altura advinda de modelos locais (*e.g.* GNSS/Nivelamento), confrontando-os com os valores advindos dos modelos globais. O cálculo das anomalias de altura para o EGM2008 a partir da equação (29) foi realizado nos sistema de maré *zero-tide* com respeito ao GRS80, conforme destacado na seção 3.1.

A Fig. 3 mostra um recorte, para a área do DVB, do quase geóide global proveniente do MGG EGM2008.

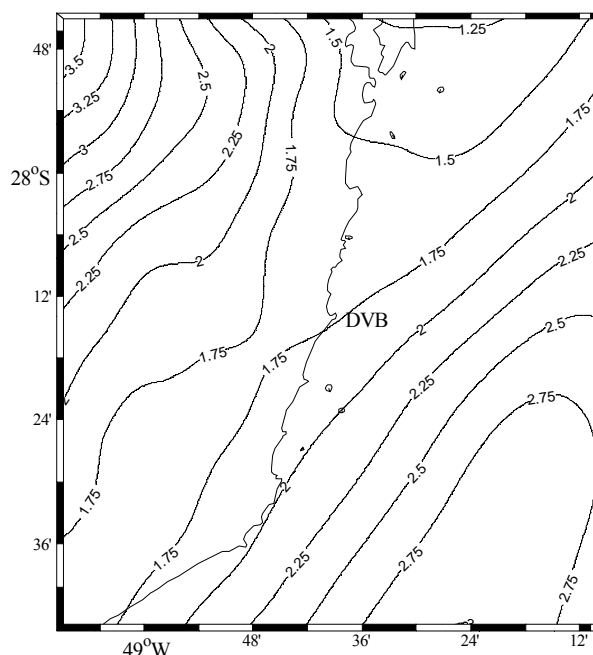


Fig. 3 - Quase geóide para a região do DVB com base no EGM2008.

Os afastamentos verticais entre o DVB e o EGM2008 podem ser visualizados de forma gráfica na Fig. 5. Ressalte-se que para as 21 RN's existentes mostradas na Fig. 2, uma apresentou forte indicio de abalo e outras duas também ficaram sob suspeição.

Na Fig. 4 nota-se que as separações entre o EGM2008 e o DVB têm uma tendência sistemática, no entanto, duas RN's não apresentaram este mesmo comportamento e por isto suspeita-se terem sofrido abalos. Optou-se por excluí-las dos cálculos.

Supõe-se aqui que a maneira mais confiável para se estimar o verdadeiro potencial de um modelo geoidal (ou quase-geoidal) é comparar seus resultados com as alturas geoidais (anomalias de altura) derivadas de observações GNSS/Nivelamento, com base nas altitudes ortométricas (ou normais) obtidas.

A estatística usada para estas comparações consiste em diferenças máxima, mínima e média entre MGG e os dados GNSS/Nivelamento, bem como o desvio padrão e o erro médio quadrático das diferenças. A mais informativa destas estatísticas, neste caso, é o



desvio padrão, porque a média e o erro médio quadrático das diferenças são distorcidos pelo termo de ordem zero.

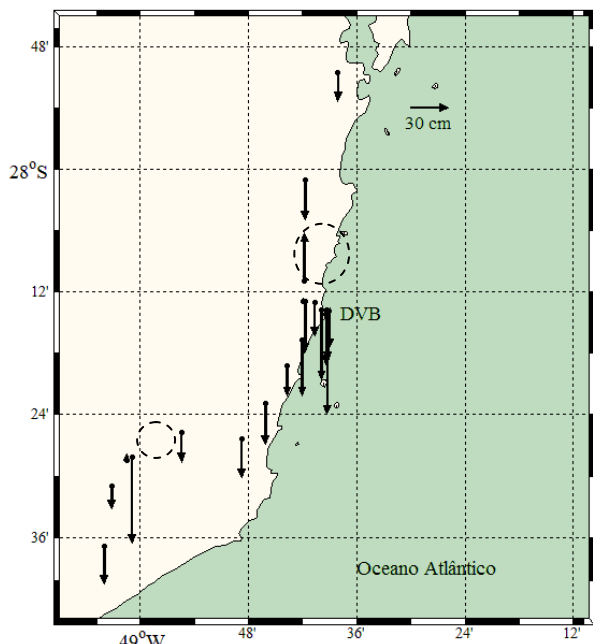


Fig. 4 - Afastamento vertical entre o DVB e o EGM2008.

A avaliação estatística do EGM2008 para DVB é mostrada nas Tabelas 2, 3 e 4.

TABELA 2 - ESTATÍSTICAS DO AFASTAMENTO DO DVB EM RELAÇÃO AO EGM2008.

| Identificação         | Valores (m) |
|-----------------------|-------------|
| máximo                | 0,3798      |
| mínimo                | -0,8263     |
| média                 | -0,2981     |
| desvio padrão         | 0,2571      |
| erro médio quadrático | 0,3936      |

Analisando os valores da Tabela 2 percebe-se que o *datum* altimétrico local não corresponde ao valor de referência, neste caso, o EGM2008 em seu grau máximo de expansão.

Para a região de estudos, o modelo EGM2008 apresenta uma resolução espacial de 8,06 km. Ressalta-se que esta resolução é possível devido à inclusão de informações topográficas a partir do grau e ordem 720. Neste caso, foram criadas anomalias gravimétricas sintéticas, usando uma combinação do espectro para preencher áreas ocupadas por dados de propriedade privada. Em regiões como o Polo Sul foram empregados somente dados provenientes da Missão GRACE. Com a distribuição das RN's encontradas (Fig. 4) é possível analisar aproximadamente sete comprimentos de ondas inteiros do EGM2008. Considerando uma frequência aproximada de uma RN a cada 4 km e usando o conceito de frequência de Nyquist (SCHWARZ, 1985) é possível avaliar um máximo de 3,5 e um mínimo de 0,5 comprimentos de onda do EGM2008 em seu grau

máximo de expansão.

Visando melhorar a distribuição de dados na região de estudos foi implantada uma rede regional derivada conforme discutido em Ferreira (2008). A Fig. 5 mostra a distribuição dos pontos relativos à rede regional derivada.

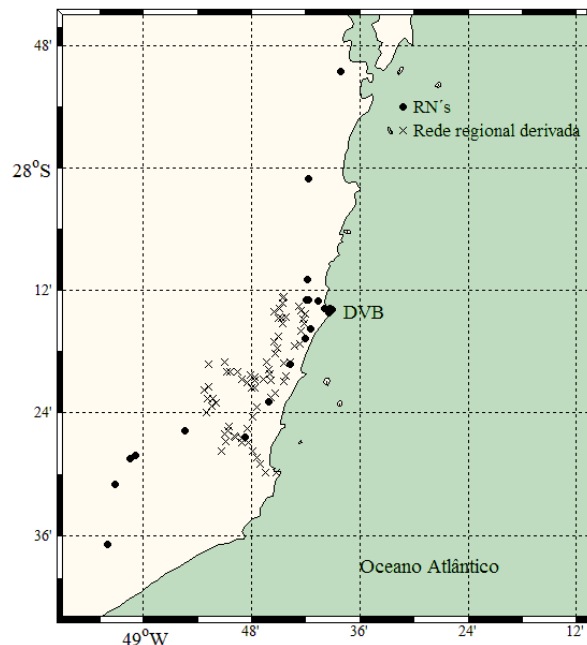


Fig. 5 - Rede regional derivada e a rede altimétrica brasileira para a região de estudos.

Na Tabela 3 podem-se observar as estatísticas da avaliação do EGM2008 em relação à rede regional derivada. É possível observar que a rede regional derivada adéqua-se melhor ao EGM2008 em relação às RN's da RVFB (Tabela 2).

TABELA 3 - ESTATÍSTICAS DO AFASTAMENTO DA REDE REGIONAL DERIVADA EM RELAÇÃO AO EGM2008.

| Identificação         | Valores (m) |
|-----------------------|-------------|
| máximo                | -0,2100     |
| mínimo                | -0,4866     |
| média                 | -0,2758     |
| desvio padrão         | 0,0492      |
| erro médio quadrático | 0,2802      |

Na Tabela 4 encontram-se as estatísticas de todos os pontos para a região de estudos, a saber, RN's e a rede regional derivada.

TABELA 4 - ESTATÍSTICAS DO AFASTAMENTO DE TODOS OS PONTOS EM RELAÇÃO AO EGM2008.

| Identificação         | Valores (m) |
|-----------------------|-------------|
| máximo                | 0,3798      |
| mínimo                | -0,8263     |
| média                 | -0,2806     |
| desvio padrão         | 0,1245      |
| erro médio quadrático | 0,3069      |



Analisando as Tabelas 2 e 4, conclui-se que a inclusão da rede regional derivada na avaliação do EGM2008 para o DVB contribui de forma significativa. Esta contribuição pode ser quantificada em aproximadamente 52% em termos de desvio padrão.

### 3.3 Estimativa do Geopotencial Local para o DVB

Com os dados levantados foi possível estimar o afastamento vertical e a diferença de potencial para o DVB com relação ao EGM2008.

Nas condições apresentada na Fig. 5 e Tabela 4, o afastamento vertical do DVB em relação ao EGM2008, considerado aqui sem erros, é de  $-0,31 \pm 0,01$  m. Este valor foi calculado empregando-se as equações (24), (25) e (26), por tanto se trata de uma média ponderada dos afastamentos entre as duas superfícies para os pontos mostrados na Fig. 5. O quase geoide (ou geoide) que define a origem das altitudes do DVB encontra-se a 31 cm abaixo do quase geoide do EGM2008.

A componente anômala do EGM2008 em relação ao DVB, em função do afastamento vertical e do valor da gravidade normal para a o marégrafo de Imbituba, SC é de  $3,04 \pm 0,08$  m<sup>2</sup>s<sup>-2</sup>.

O geopotencial para o DVB é dado por:

$$W_{DVB} = W_0 - \gamma_{DVB} \cdot \delta(H_0)_{DVB}. \quad (34)$$

Porém, note a necessidade de um valor de referência para o geopotencial global  $W_0$ . Para estimar o valor  $W_{DVB}$ , faz-se necessário à adoção de um valor para o geopotencial global ( $W_0$ ). Segundo Dalazoana (2005), o estabelecimento de um consenso visando à fixação de um valor para  $W_0$  não é uma das tarefas mais triviais.

Em Burša *et al.* (2004) é dado um valor para o geopotencial local em Imbituba igual a  $W_{IMB} = 62.636.855,68 \pm 0,83$  m<sup>2</sup>s<sup>-2</sup>, implicando em um valor de  $\delta H_{IMB} = +(0,03 \pm 0,07)$  m acima do geoide global  $W_0 = 62.636.856,0 \pm 0,5$  m<sup>2</sup>s<sup>-2</sup>. Em Sánchez (2005) é fornecido um valor de  $\delta H_{IMB} = -0,20$  m abaixo do geoide global  $W_0 = 62.636.853,11$  m<sup>2</sup>s<sup>-2</sup>.

## 4. ANÁLISES, DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

A região contígua ao Datum Vertical Brasileiro carece de observações e informações necessárias ao estudo e de execução da conexão de redes verticais. Boa parte das referências de nível foram destruídas e/ou movimentadas (Fig. 2). Além das 18 RN's em condições de uso, empregaram-se no cálculo da componente anômala 74 pontos da rede regional derivada conforme Fig. 6, totalizando 92 pontos.

A metodologia adotada neste trabalho permite avaliar a componente anômala do geopotencial no DVB, suprimindo a carência de informações necessárias para a

sua quantificação e posterior análise. Essa grandeza é ideal para quantificar a influência das massas anômalas que distanciam a origem das altitudes brasileiras do modelo EGM2008. Empregou-se o EGM2008 neste estudo pelo fato da alta resolução do mesmo em comparação a modelos geoidais locais e a outros MGG's. No entanto, esta alta resolução do EGM2008 para a área de estudos não é originada na inclusão de novas observações na área de estudos. Para o emprego de outros MGG's com resolução menor que o EGM2008 faz-se necessário a ampliação da área com informações GNSS/Nivelamento. Portanto, os dados de GNSS/Nivelamento para uma área suficientemente grande é necessário para suavizar a alta frequência das componentes da gravidade.

O valor para o geopotencial do DVB depende do valor do geopotencial global  $W_0$  tomado como referência para o SGA. No entanto, de forma independente de qual o valor adotado para o geopotencial global  $W_0$ , o importante é uma referência unívoca deste valor, com a qual poder-se-á conectar *data* verticais.

Considerando o mesmo modelo global do geopotencial, neste caso, o EGM2008, procedimento semelhante pode ser realizado por qualquer país da América Latina para a unificação de *data*. Entretanto, ressalta-se a importância da compatibilização do sistema de maré adotado para as medições GNSS, valores da gravidade bem como para o MGG adotado.

Quando considerada a análise do campo da gravidade na região em estudo, esta metodologia contribuirá para a estimativa futura da TNMM via alternativa para a determinação da componente anômala do geopotencial.

Para uma implementação do método proposto, considerando a necessária interação oceano-contidente na região de estudos, faz-se necessário calcular um geoide ou quase geoide gravimétrico de alta resolução, integrando dados continentais e oceânicos visando suprir a deficiência de RN's, principalmente devido ao alto grau de destruição das mesmas na região considerada. Porém, os procedimentos usuais de cálculo são possíveis fontes de erros que podem se propagar à determinação da TNMM.

## AGRADECIMENTOS

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo fomento e apoio financeiro ao desenvolvimento deste trabalho (Processos 134943/2006-6, 550830/2002-2 e 140084/2004-5). Ao PROBRAL (CAPES/DAAD) processo 228/06.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMOS, M. J. **Quasigeoid modelling in New Zealand to unify multiple local vertical datums**. 2007. 238 f. Tese – Department of Spatial Sciences. Curtin University Technology, Curtin, 2007.

- AMOS, M. J.; FEATHERSTONE, W. E. Unification of **New Zealand's local vertical datums**: iterative gravimetric quasigeoid computation. **Journal of Geodesy**, v. 83, n. 1, p. 57-68, 2009.
- ARDALAN, A. A.; SAFARI, A. Global height datum unification: a new approach in gravity potential space. **Journal of Geodesy**, v. 79, n. 9, p. 512-523, dez. 2005.
- BURŠA, M.; KOUBA, J.; KUMAR, M.; MÜLLER, A.; RADĚJ, K.; TRUE, S.A.; VATRT, V.; VOJTÍŠKOVÁ, M. Geoidal geopotential and world height system. **Studia Geophysica et Geodaetica**, Praga, v. 43, n. 4, p. 327-337, 1999.
- BURŠA, M.; KOUBA, J.; MÜLLER, A.; RADĚJ, K.; TRUE, S.A.; VATRT, V.; VOJTÍŠKOVÁ, M. Determination of geopotential differences between local vertical datums and realization of a world height system. **Studia Geophysica et Geodaetica**, Praga, v. 45, n. 2, p. 127-132, 2001.
- BURŠA, M.; KENYON, S.; KOUBA, J.; RADĚJ, K.; VATRT, V.; VOJTÍŠKOVÁ, M.; ŠIMEK, J. World height system specified by geopotential at tide gauge stations. In: DREWES, H.; DOODSON, A. H.; FORTES, L. P. S.; SÁNCHEZ, L.; SANDOVAL, P. (Ed.) **Vertical Reference Systems**. IAG Symposium, Cartagena, Colombia. Springer, 2002. p. 291-296.
- BURŠA, M.; KOUBA, J.; KUMAR, M.; MÜLLER, A.; RADĚJ, K.; TRUE, S.A.; VATRT, V.; VOJTÍŠKOVÁ, M. A global vertical reference frame based on four regional vertical datums. **Studia Geophysica et Geodaetica**. Praga, v. 48, n. 4, p. 493-502, 2004.
- BURŠA, M.; KENION S.; KOUBA, J.; ŠÍMA, Z.; VATRT, V.; VÍTEK, V.; VOJTÍŠKOVÁ, M. The geopotential value  $W_0$  for specifying the relativistic atomic time scale and global vertical reference system. **Journal of Geodesy**, v. 81, n. 2, p. 103-110, 2007.
- DALAZOANA, R. **Estudos dirigidos à análise temporal do datum vertical brasileiro**. 2005. 188 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.
- DE FREITAS, S. R. C.; SCHWAB, S. H. S.; MARONE, E.; PIRES, A. O.; DALAZOANA, R. Local effects in the brazilian vertical datum. In: *Vistas for Geodesy in the New Milennium*. IAG Series. Berlin: Springer, 2002. p. 102-107.
- DE FREITAS, S. R. C.; FERREIRA, V. G.; PALMEIRO, A. S.; DALAZOANA, R.; LUZ, R. T.; FAGGION, P. L. Modelagem do potencial anômalo no datum vertical brasileiro visando sua nova definição. **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, v. 13. n. 2, p. 395-419, jun./dez. 2007.
- EKMAN, M. Impacts of geodynamic phenomena on systems for height and gravity. **Journal of Geodesy**, v. 63, n. 3, p. 281-296, 1989.
- FEATHERSTONE W. Towards unification of the Australian height datum between the Australian mainland and Tasmania using GPS and the AUSGeoid98 geoid model. **Geomatics Research Australasia**, n. 73, p. 33-54, dez, 2000.
- FERREIRA, V. G. **Análise da componente anômala do geopotencial no datum vertical brasileiro com base no sistema lagunar de Imarui, SC**. 2008. 115 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2008.
- FOTOPOULOS, G.; TZIAVOS, I. N.; SIDERIS, M. G. On the incorporation of sea surface topography in establishing vertical control. In: M. G. SIDERIS. **Gravity, Geoid and Space Missions**. IAG Symposia, Volume 129, Springer, pp. 185-190. 2005.
- GRAFAREND, E. W.; ARDALAN, A. A.  $W_0$ : an estimate in the Finnish height datum n60, epoch 1993.4, from twenty-five GPS points of the Baltic Sea level project. **Journal of Geodesy**, v. 71, n. 11, p. 673-679, 1997.
- HECK, B.; RUMMEL, R. Strategies for solving the vertical datum problem using terrestrial and satellite data. *Sea Surface Topography and the Geoid*. Springer, 1990. p. 116-128.
- HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. San Francisco: W. H. Freeman, 1967.
- HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. Austria: Reprint Institute of Physical Geodesy, Technical University, 2006.
- HOLMES, S. A.; PAVLIS, N. K. **Some aspects of harmonic analysis of data gridded on the ellipsoid**. Paper presented at the Society of Exploration Geophysicists 77th Annual Meeting 2007 SEG 2007 San Antonio, Texas, USA September 23 - 28, 2007.
- IHDE, J.; SÁNCHEZ, L. A unified global height reference system as a basis for IGGOS. **Journal Geodynamic**: v. 40, p. 400-413, 2005.
- JAMUR, K. P. **Estimativa da resolução de modelos geoidais globais obtidos de missões satelitais e gravimétricos regionais para o estado do Paraná com base em observações gravimétricas**. 2007. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2007.

- JEKELI, C. **Heights, the geopotential, and vertical data**. Ohio, 2000. 34 p.
- LEMOINE, F. G.; KENYON, S. C.; FACTOR, R. G.; TRIMMER, R. G.; PAVLIS, N. K.; CHINN, D. S.; COX, C. M.; KLOSKO, S. M.; LUTHCKE, S. R.; TORRENCE, M. M.; WANG, Y. M.; WILLIAMSON, R. G.; PAVLIS, E. C.; RAPP, R. H.; OLSON, T. R. **The development of the joint NASA – GSFC and the NIMA geopotential model EGM96**. NASA/TP – 206861. Goddard Space Flight Center, Greenbelt, 1998.
- LUZ, R. T.; De FREITAS, S. R. C.; PINHEIRO, R. R.; GOLDANI, D.; SANTOS, C. C. C.; DIMAIO PEREIRA, N. R.; SUBIZA PIÑA, W. H. Avaliação das realizações da componente vertical do Sistema Geodésico Brasileiro. In: V Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, 2007, Presidente Prudente. p. 31-37. 1 CD - ROM.
- MÄKINEN, J.; IHDE, J. The permanent tide in height systems. In: SIDERIS, M. G. (Ed), **Observing our Changing Earth**. IAG Series. Springer, 2007. p. 81-87.
- MAYER-GÜRR, T. **ITG-GRACE03S**: The latest GRACE gravity field solution computed in Bonn. Joint International GSTM and DFG SPP Symposium. Outubro 2007, Potsdam 2007.
- MOLODENSKIĬ, M. S.; EREMEEV, V. F.; YURKINA, M. I. **Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth**. Traduzido por Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem, 1962.
- MORITZ, H. Geodetic Reference System 1980. **Journal of geodesy**, v. 74, n. 1, p. 128-133, 2000.
- PAVLIS, N. K.; HOLMES, S. A.; KENYON, S. C.; FACTOR, J. K. **An earth gravitational model to degree 2160: EGM2008**, presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13-18, 2008.
- RAPP, R. H. Separation between reference surfaces of selected vertical datums. **Bulletin Géodésique**, v. 69, p. 26-31, 1994.
- RAPP, R. Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference. **Journal of Geodesy**, v. 71, n. 5, p. 282-289, 1997.
- RAPP, R. A world vertical datum proposal. **Allg Verm Nachr**, v. 102, p. 297–304, 1995.
- RUMMEL, R. Global unification of height systems and GOCE. In: SIDERIS, M. G. (Ed), **Gravity, geoid and geodynamics**. International Association of Geodesy Symposia, v. 123. Springer, 2000. p 15–20.
- SÁNCHEZ, L. Definition and realisation of the SIRGAS vertical reference systems within a globally unified height system. (Ed.) Vertical Reference Systems. IAG Symposium, Cairns, Australia. Springer, 2005, p. 638-652.
- SCHWARZ, K. P. Data types and their spectral properties. In: K.P. Schwarz, Local Gravity Field Approximation. Beijing International Summer School, University of Calgary Editions, 1985.
- TORGE, W. **Geodesy**. 3. ed. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2001.
- VATRT, V. Methodology of testing geopotential models specified in different tide systems. **Studia geoph. et geod.** 43, (1999).
- XU, P.; RUMMEL, R. **A quality investigation of global vertical datum connection**. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Number 34, 1991.
- ZHANG, L.; LI, F.; CHEN, W.; ZHANG, C. Height datum unification between Shenzhen and Hong Kong using the solution of the linearized fixed-gravimetric boundary value problem. **Journal of Geodesy**, v. 83, n. 5, p. 411-417, 2008.