

# ALGORITMO PARA INTERPOLAÇÃO DE CENTROS DE FASE PARA VÔO APOIADO ATRAVÉS DO FILTRO DE KALMAN

*Phase Center Interpolation Algorithm for Airborne GPS through the Kalman Filter*

**Juilson J. Jubanski**  
**Edson A. Mitishita**

**Universidade Federal do Paraná**  
**Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas**  
Centro Politécnico, Setor de Ciências da Terra s/n  
juilson@ufpr.br - mitishita@ufpr.br

## RESUMO

A aerotriangulação é um processo fundamental em qualquer projeto fotogramétrico. O levantamento de tradicionais pontos de apoio, dependendo da região a ser mapeada, continua apresentado custos elevados. A distribuição de pontos de apoio no bloco e sua qualidade posicional influenciam diretamente nas precisões resultantes do processamento da aerotriangulação. A técnica de vôo apoiado tem por objetivos principais a redução do custo e a melhoria da qualidade do apoio nos projetos fotogramétricos modernos. Atualmente no Brasil, as grandes empresas de mapeamento aerofotogramétrico vêm adquirindo sistemas importados para vôo apoiado, mas esses sistemas, geralmente apresentam dificuldades na operação, tendo em vista uma maior necessidade de recursos humanos para a operação, dada a alta tecnologia envolvida. Dentro da técnica de vôo apoiado, uma das etapas fundamentais é a interpolação da posição do centro de fase da antena GPS no momento da tomada da aerofoto. Tradicionalmente, polinômios de baixo grau são utilizados, mas estudos recentes mostram que esses polinômios perdem o desempenho em vôos mais turbulentos, os quais são bastante comuns, principalmente em vôos em escalas grandes. Este trabalho tem por objetivo apresentar uma solução para esse problema, através de um algoritmo baseado no filtro de Kalman, que leva em conta o aspecto dinâmico do problema em questão. Ao final, os resultados da comparação entre experimentos realizados com a metodologia proposta e um interpolador linear simples são apresentados. Esses resultados mostram um significativo ganho na acurácia no procedimento de interpolação linear, quando o filtro de Kalman é usado.

**Palavras chaves:** Vôo Apoiado, GPS, filtro de Kalman, Aerotriangulação.

## ABSTRACT

The aerial triangulation is a fundamental step in any photogrammetric project. The surveying of the traditional control points, depending on region to be mapped, still has a high cost. The distribution of control points at the block, and its positional quality, influence directly in the resulting precisions of the aero triangulation processing. The airborne GPS technique has as key objectives cost reduction and quality improvement of the ground control in the modern photogrammetric projects. Nowadays, in Brazil, the greatest photogrammetric companies are acquiring airborne GPS systems, but those systems are usually presenting difficulties in the operation, due to the need of human resources for the operation, because of the high technology involved. Inside the airborne GPS technique, one of the fundamental steps is the interpolation of the position of the phase center of the GPS antenna, in the photo shot instant. Traditionally, low degree polynomials are used, but recent studies show that those polynomials is reduced in turbulent flights, which are quite common, mainly in great scales flights. This paper has as objective to present a solution for that problem, through an algorithm based on the Kalman Filter, which takes into account the dynamic aspect of the problem. At the end of the paper, the results of a comparison between experiments done with the proposed methodology and a common linear interpolator are shown. These results show a significant accuracy gain at the procedure of linear interpolation, when the Kalman filter is used.

**Keywords:** Airborne GPS, GPS, Kalman Filter, Aerial Triangulation.

## 1. INTRODUÇÃO

A instalação de um receptor GPS em uma aeronave utilizada para aerolevantamentos serve a dois objetivos: navegação e controle para aerotriangulação. Um receptor GPS ligado à câmera pode ser usado para determinar a posição da estação de exposição no momento da tomada de uma aerofoto. As posições espaciais (X,Y,Z) das estações de exposição podem ser determinadas com uma precisão aproximada de 10cm utilizando-se o modo GPS cinemático. Tal precisão na determinação da estação de exposição é suficiente para o uso dessas coordenadas como controle de aerotriangulação em muitas aplicações, de maneira que pode ser reduzido a um mínimo o número de pontos de controle tradicional (Curry,1993).

Vários pesquisadores contribuíram muito neste campo durante a década de 90 (Ackermann, 1992; Lapine, 1991, Magro e Andrade, 1992). Com o avanço da tecnologia GPS (em termos de equipamentos e algoritmos de processamento), as aplicações fotogramétricas que se utilizam desta técnica vêm aumentando.

Um aspecto crítico no vôo apoiado, quando este visa a determinação de apoio para aerotriangulação, é a estimação da posição do centro de fase da antena GPS no instante exato da exposição fotográfica. As observações GPS são coletadas a uma taxa constante, normalmente entre 1Hz e 10Hz. No entanto, como mostrado na figura (1), os instantes de exposição não coincidem com as épocas do GPS. Desta forma, as coordenadas da estação de exposição devem ser calculadas a partir de pontos adjacentes (Lichti, 2000, 2002).

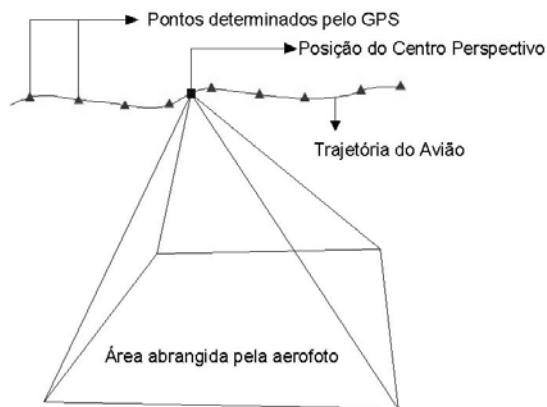


Fig. 1 - A trajetória e a aerofoto.

As posições das estações de exposição são normalmente interpoladas com uma função linear ou um polinômio de baixo-grau, em função do tempo, para cada dimensão (X,Y,Z). Lapine (1991) e Jacobsen (1993) empregam polinômios de segundo grau, utilizando-se de três a cinco épocas na interpolação. Esse é o método empregado na maioria dos softwares comerciais. Lapine (1996) demonstra que as perturbações atmosféricas podem tornar uma interpolação polinomial não-funcional. Oscilações de alta frequência não são modeladas por tais interpoladores. Em trabalhos com

escalas grandes, tais erros podem ser consideráveis (Curry,1993).

Lichti (2000, 2002), trata a trajetória como uma série de funções senoidais no tempo. Nesses trabalhos são demonstrados que os métodos lineares convencionais e polinomiais são equivalentes entre si. Estes trabalhos também provam que ocorrem ganhos reais em qualidade quando aumentada a taxa do receptor GPS. Cock (1991) propõe uma metodologia que leva em consideração a dinâmica do avião. Neste trabalho apresenta-se a metodologia de interpolação com base na utilização do filtro de Kalman, onde são considerados os efeitos temporais do movimento da aeronave.

Os resultados obtidos com a metodologia desenvolvida, com base nos experimentos realizados, mostram um significativo ganho de acurácia. Neste trabalho mostra-se como um interpolador linear via filtro de Kalman pode ser viabilizado, bem como é realizada uma comparação com um interpolador linear convencional. Assim, espera-se que o presente trabalho possa disseminar a técnica proposta e mostrar que ela pode ser aplicada em diversos projetos aerofotogramétricos.

## 2. ALGORITMO DE INTERPOLAÇÃO

Um dos problemas clássicos resolvidos via filtro de Kalman (Kalman, 1960) é a estimação da posição de um objeto em movimento em uma dada época  $t_k$ , sendo conhecidas as suas coordenadas em épocas anteriores e posteriores a essa época (Gelb, 1974). No entanto, os "softwares" mais comuns para interpolação em sistemas de vôo apoiado não utilizam dessa técnica, sendo preferidos interpoladores baseados em polinômios, que apesar de apresentarem bons resultados, não têm um modelo físico que represente a dinâmica de uma aeronave na faixa de vôo.

Ao se observar o comportamento dinâmico de um avião na faixa de vôo, é facilmente notado que o movimento do mesmo se aproxima muito do movimento retilíneo uniforme. O avião sofre pequenas variações de velocidade, devido à turbulência e algum tipo de aceleração durante o movimento. Assim, será necessário interpolar independentemente a posição para cada tomada de aerofoto. Para tanto, um intervalo de 5 observações antes e 5 depois da aerofoto será utilizado. Desta maneira, uma taxa de 1Hz no GPS corresponde a um período de interpolação de 10 segundos. Se a taxa for de 5Hz, haverá uma janela de 2 segundos. Em intervalos curtos de tempo, a aceleração pode ser considerada como parte dos erros randômicos da interpolação, juntamente com a turbulência. Essa simplificação deve ser aceita para que se tenha um modelo linear de ajustamento, e assim o filtro de Kalman possa ser implementado.

Um dos fundamentos básicos do movimento retilíneo uniforme no espaço tridimensional é a independência do movimento para cada um dos eixos cartesianos. Desta forma, a interpolação tridimensional é realizada de duas maneiras diferentes. Num primeiro estágio, as três coordenadas (X,Y,Z) são interpoladas de

forma independente: primeira para o eixo X, depois para o eixo Y e por fim para o eixo Z. Para este último eixo, o interpolador sempre apresenta um desempenho reduzido, pois a aeronave tende a subir e descer abruptamente nas turbulências. Assim, em vôos mais turbulentos, o interpolador pode errar vários centímetros. Numa segunda etapa, as correlações entre as coordenadas X, Y e Z, advindas do processamento GPS cinemático (Monico, 2000), serão levadas em conta.

## 2.1 Valores Iniciais

Conhecidas as coordenadas de pontos GPS da trajetória da aeronave no referencial geodésico local (X,Y,Z) de um recobrimento aerofotogramétrico, determinadas através de um processamento "On-The-Flight" (OTF), e suas respectivas épocas  $t_{ki}$ , medidas com um cronômetro independente do relógio do receptor GPS, pode-se ajustar, para cada eixo coordenado, uma reta que representa o MRU do avião:

$$\begin{cases} X_{ki} = v_x \cdot t_{ki} + X_0 \\ Y_{ki} = v_y \cdot t_{ki} + Y_0 \\ Z_{ki} = v_z \cdot t_{ki} + Z_0 \end{cases} \quad (1)$$

Onde:

$X_{ki}, Y_{ki}, Z_{ki}$ : são as coordenadas para a época  $t_{ki}$ ;

$v_x, v_y, v_z$ : são as velocidades para o intervalo;

$X_0, Y_0, Z_0$ : coordenadas do ponto inicial do trecho.

Na prática, reduz-se o valor de  $t_{ki}$  ao valor da primeira observação, assim cada ponto interpolado terá um referencial de tempo próprio, referido à primeira observação. No ajustamento, consideram-se as coordenadas como observações e as épocas (tempos) como constantes, e assim, determinam-se os valores  $X_{ki}, Y_{ki}, Z_{ki}, v_x, v_y, v_z$ , os quais formam o vetor de parâmetros iniciais  $\hat{X}_{0/0}$  do filtro de Kalman.

## 2.2 Ciclos de Predição e Filtragem

Como demonstrado no item anterior, a modelagem matemática envolve coordenadas, tempos e velocidades.

O modelo de predição, ou modelo dinâmico, é o que relaciona a época  $t_k$  com a época  $t_{k-1}$ . As equações para o modelo dinâmico são:

$$\begin{cases} X_k = X_{k-1} + v_{x_{k-1}} \cdot (t_k - t_{k-1}) \\ v_{x_k} = v_{x_{k-1}} + w_{v_k} \end{cases} \quad (2)$$

A primeira equação do sistema acima (2) representa a variação das coordenadas no tempo, e vem das equações do MRU. A segunda equação é a que

modela as variações ( $w_{v_k}$ ) da velocidade entre as épocas. Essa variação é considerada independente de  $\hat{X}_{0/0}$ . Para cada intervalo, admite-se, a partir de conhecimento prévio do problema, que  $w_{v_k}$  não influencia a média da velocidade, e que obedece a distribuição normal, com variância correspondente a 1% da velocidade média. Desta forma, para uma velocidade média de 20m/s, tem-se um  $w_{v_k}$  com média zero, e um desvio padrão de 0,2m/s (Camargo, 1992).

Em notação matricial, tem-se para o modelo dinâmico:

$$\begin{bmatrix} X_k \\ v_{x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (t_k - t_{k-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{k-1} \\ v_{x_{k-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_{v_k} \end{bmatrix} \quad (3)$$

O termo mais importante dessa equação é a matriz T, ou matriz de transição do modelo dinâmico, definida por:

$$T_{k/k-1} = \begin{bmatrix} 1 & (t_k - t_{k-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

A predição ou estimação do vetor estado na época  $t_k$ , baseado em dados de  $t_{k-1}$  se dá da seguinte maneira (Camargo,1992):

$$\hat{X}_{k/k-1} = T_{k/k-1} \cdot \hat{X}_{k-1} \quad (5)$$

$$\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} = T_{k/k-1} \cdot \Sigma_{\hat{X}_{k-1}} \cdot T_{k/k-1}^T + \Sigma_{\hat{W}_k} \quad (6)$$

Onde, segundo o determinado no item 2.1, com  $v_x$  dos valores iniciais:

$$\Sigma_{\hat{W}_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [(v_x) \cdot 0,01]^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

O segundo ciclo, ou ciclo de filtragem ocorre nos pontos onde há coordenadas determinadas pelo GPS. No presente trabalho, são 5 antes e 5 depois da época  $t_k$ . Neste ciclo, os valores preditos anteriormente (neste caso  $X_k$  e  $v_{x_k}$ ), bem como seus desvios padrões, são recalculados, com base na predição e no valor real observado para o ponto em questão. Da mesma maneira mostrada acima, o sistema a ser resolvido, ou modelo de medida, é o que se segue:

$$X_k^b = X_k + \varepsilon_{X_k} \quad (8)$$

Onde:  $X_k^b$  - Coordenada X do processamento GPS;

$X_k$  - Coordenada X correta;

$\varepsilon_{X_k}$  - Resíduo em X.

Matricialmente, o sistema a ser resolvido é:

$$\begin{bmatrix} x_k^b \\ v_{x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ v_{x_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_k} \end{bmatrix} \quad (9)$$

O termo mais importante acima é a matriz A:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

A partir das equações de filtragem (Camargo, 1992); tem-se K, que é a matriz de ganho de Kalman:

$$K_k = \Sigma_{\hat{x}_{k/k-1}} \cdot A_k^T \cdot \left( A_k \cdot \Sigma_{\hat{x}_{k/k-1}} \cdot A_k^T + \Sigma_{x_k^p} \right)^{-1} \quad (11)$$

Onde  $\Sigma_{x_k^b}$  é a variância da coordenada determinada no processamento dos dados GPS. Na seqüência:

$$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k \cdot \left( x_k^b - A_k \cdot \hat{X}_{k/k-1} \right) \quad (12)$$

$$\Sigma_{\hat{x}_{k/k}} = (I - K_k \cdot A_k) \cdot \Sigma_{\hat{x}_{k/k-1}} \quad (13)$$

O processo acima se repete desde a primeira época do intervalo até o momento da tomada da aerofoto, no filtro de ida. De maneira idêntica, o procedimento se realiza desde a última época do intervalo até o momento da tomada da aerofoto, no filtro de volta. No final dos dois processos têm-se os dados necessários para o procedimento de suavização, conforme a figura (2), na qual, para simplificar a visualização, são mostradas apenas três épocas antes e três depois do ponto a ser interpolado:

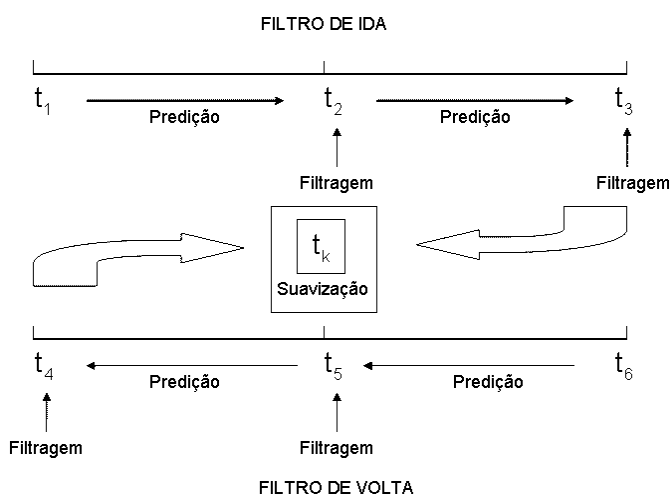


Fig. 2 - Suavização pelo filtro de Kalman.

### 2.3 Suavização dos Dados

O processo de suavização é simples. Após os vários ciclos de predição e filtragem, chega-se ao último

ciclo de predição, onde ocorre a determinação do vetor estado para o tempo de interesse,  $t_k$ . Na verdade, essa determinação ocorre por duas vias: o filtro de ida (que gera  $\hat{X}_{ki}$  - vetor estado predito da ida e  $\Sigma_{ki}$ , sua MVC), e o filtro de volta (o qual gera  $\hat{X}_{kv}$  - vetor estado da volta e  $\Sigma_{kv}$ , sua MVC). Desta forma, têm-se dois vetores estado estimados, e naturalmente suas MVC's Gelb (1974) e Koch (1983):

$$\hat{X}_{ki} = \begin{bmatrix} x_{ki} \\ v_{x_{ki}} \end{bmatrix} \text{ do filtro de ida, e sua MVC } \Sigma_{ki} \text{ e;}$$

$$\hat{X}_{kv} = \begin{bmatrix} x_{kv} \\ v_{x_{kv}} \end{bmatrix} \text{ do filtro de volta, e sua MVC } \Sigma_{kv}.$$

Assim, a suavização é a aplicação das expressões de suavização do filtro de Kalman (Gelb, 1974). Para o cálculo da MVC:

$$\Sigma_{ks}^{-1} = \Sigma_{ki}^{-1} + \Sigma_{kv}^{-1} \quad (14)$$

Para o cálculo do vetor estado suavizado:

$$\hat{X}_{ks} = \Sigma_{ks} \cdot \left( \Sigma_{ki}^{-1} \cdot \hat{X}_{ki} + \Sigma_{kv}^{-1} \cdot \hat{X}_{kv} \right) \quad (15)$$

Os resultados obtidos pelas equações (14) e (15) podem ser utilizados numa aerotriangulação. O mesmo procedimento, aqui mostrado para o eixo X, é empregado nos eixos Y e Z. É importante ressaltar, que além das coordenadas, também serão estimadas as velocidades (em X, Y e Z), da aeronave no instante da tomada da aerofoto, as quais poderão ser inseridas na aerotriangulação.

### 2.4 Algoritmo com Solução Simultânea

O algoritmo apresentado nos itens (3.1) a (3.3) assume que as coordenadas X, Y e Z são independentes. Em muitas aplicações práticas essa simplificação é válida, mas numa análise mais profunda do algoritmo, as correlações entre as coordenadas X, Y e Z de cada um dos pontos utilizados deve ser considerada, pois esses valores podem ser bastante relevantes. Desta forma, devem ser modificadas as matrizes envolvidas nos cálculos, afim de que a solução seja simultânea para as três coordenadas.

A seqüência de cálculo continua igual, mas os modelos matemáticos de predição e filtragem sofrem pequenas modificações. O algoritmo continua sendo o mesmo, mas com matrizes modificadas. Os modelos matemáticos e matrizes envolvidas no cálculo tomam as seguintes formas:

O modelo dinâmico passa a ter a seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_{x_{k-1}} \cdot (t_k - t_{k-1}) \\ \mathbf{v}_{x_k} = \mathbf{v}_{x_{k-1}} + \mathbf{W}_{v_{x_k}} \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{v}_{y_{k-1}} \cdot (t_k - t_{k-1}) \\ \mathbf{v}_{y_k} = \mathbf{v}_{y_{k-1}} + \mathbf{W}_{v_{y_k}} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_{k-1} + \mathbf{v}_{z_{k-1}} \cdot (t_k - t_{k-1}) \\ \mathbf{v}_{z_k} = \mathbf{v}_{z_{k-1}} + \mathbf{W}_{v_{z_k}} \end{cases} \quad (16)$$

Assim, a matriz de transição T, torna-se:

$$T_{k/k-1} = \begin{bmatrix} 1 & (t_k - t_{k-1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (t_k - t_{k-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (t_k - t_{k-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A solução da predição se dá com a utilização das equações (5) e (6). Para tanto, a matriz  $\Sigma_{\hat{v}_k}$  deve possuir a seguinte configuração:

$$\Sigma_{\hat{v}_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [(v_x) \cdot 0,01]^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [(v_y) \cdot 0,01]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [(v_z) \cdot 0,01]^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Para o ciclo de filtragem, o modelo matemático tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k^b = \mathbf{x}_k + \varepsilon_{x_k} \\ \mathbf{y}_k^b = \mathbf{y}_k + \varepsilon_{y_k} \\ \mathbf{z}_k^b = \mathbf{z}_k + \varepsilon_{z_k} \end{cases} \quad (19)$$

A matriz A toma, então, a seguinte configuração:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Na equação 11,  $\Sigma_{L_k^b}$  passa a ser a matriz variância-covariância dos pontos onde ocorre a filtragem dos dados, determinada pelo processamento do GPS cine-

mático, ao invés de ser simplesmente a variância da coordenada a ser calculada, como ocorria anteriormente. O restante do ciclo de filtragem continua sendo o mesmo, bem como o processo de suavização, que é a aplicação das equações (14) e (15).

### 3. RESULTADOS OBTIDOS

#### 3.1 Testes do Interpolador

Os resultados abaixo são advindos de um vôo realizado do dia 16/02/2004 sobre a cidade de Chapecó em Santa Catarina. A taxa de recepção dos receptores GPS foi de 1Hz, e os dados foram pós-processados com o software Leica GeoOffice 1.0. Aqui serão consideradas as correlações entre as coordenadas X, Y e Z obtidas pelo processamento GPS.

O procedimento consiste em interpolar cada ponto GPS processado em relação aos seus 5 vizinhos anteriores e 5 posteriores, conforme o algoritmo mostrado no item 2. A diferença entre o valor determinado pelo processamento GPS e o valor interpolado demonstra o comportamento do interpolador, pois, no sistema utilizado neste trabalho, as épocas das observações GPS são cronometradas por um Laptop. Desta forma será simulado que a cada época GPS houve uma tomada de aerofoto, ignorando-se a coordenada da época que está sendo testada durante a interpolação, e utilizando-se somente do tempo cronometrado. Esse tipo de análise é comum em testes de interpoladores, como mostrado em Lichti (2000,2002) e Kusevic (1997). Para este trabalho foram escolhidos aleatoriamente 2 trechos com cerca de 60 épocas cada. A interpolação é feita no referencial geodésico local, e as diferenças apresentadas estão no referencial UTM SAD-69, Fuso 22 (-51°).

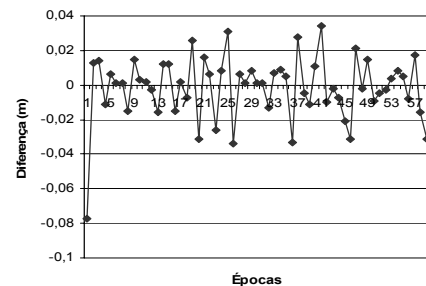


Fig. 3 - Diferenças em E - Trecho 1 (Kalman).

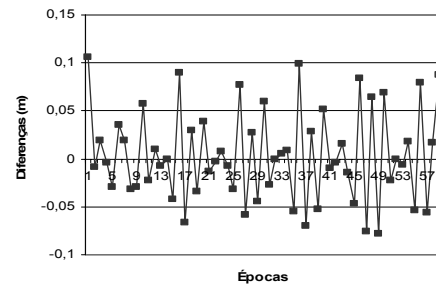


Fig. 4 - Diferenças em N - Trecho 1 (Kalman).

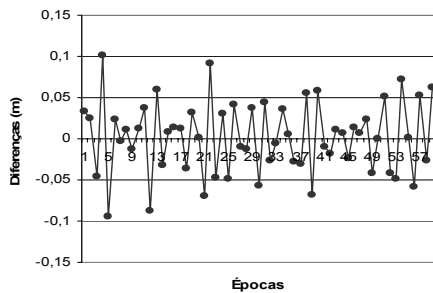


Fig. 5 - Diferenças em H - Trecho 1 (Kalman).

Como se pode observar nas figuras (3), (4) e (5), os erros planimétricos máximos estão abaixo de 15 cm, o que é compatível com a precisão nominal do levantamento GPS (cerca de 10 cm), e com a precisão da cronometragem utilizada (cerca de 2 ms). As maiores diferenças, obtidas em H, são esperadas dadas às condições atmosféricas que a aeronave encontra em voo (turbulência), por se tratar de um voo baixo (em torno de 5.000 pés ou 1.700m).

Nas figuras (6), (7) e (8) são apresentados os resultados para o segundo trecho:

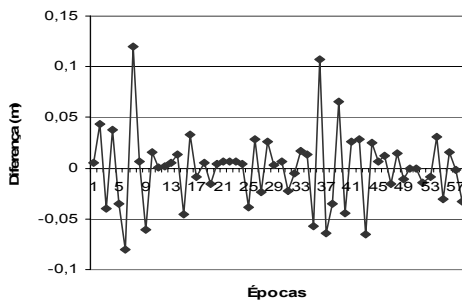


Fig. 6 - Diferenças em E - Trecho 2 (Kalman).

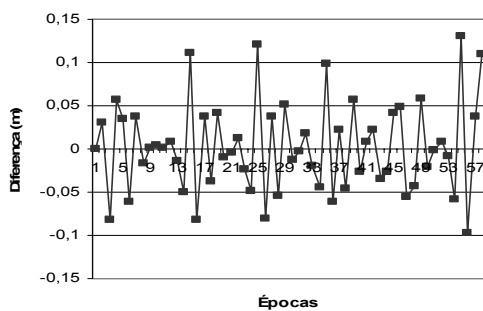


Fig. 7 - Diferenças em N - Trecho 2 (Kalman).

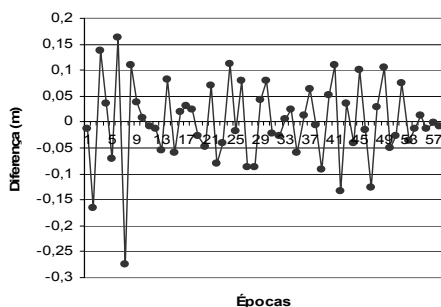


Fig. 8 - Diferenças em H - Trecho 2 (Kalman).

Assim como ocorreu no trecho 1, as diferenças comportaram-se de maneira muito parecida com o que se esperava para os dados utilizados.

Nas figuras (9) e (10) são representadas graficamente as resultantes planimétricas das diferenças obtidas, a fim de se visualizar o comportamento das diferenças, e também serão calculadas as médias e desvios-padrão dos erros determinados para cada um dos trechos analisados, apresentados nas tabelas (3) e (4).

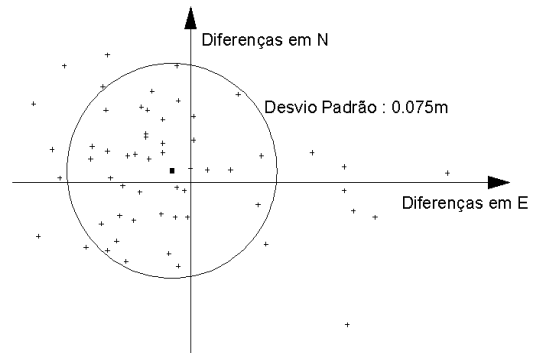


Fig. 9 - Diferenças Planimétricas - Trecho 1.

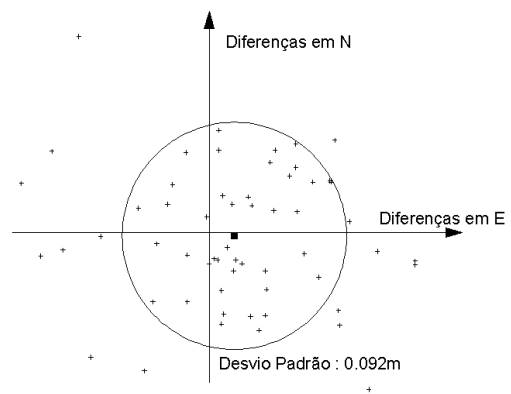


Fig. 10 - Diferenças Planimétricas - Trecho 2.

Abaixo são apresentadas as estatísticas de ambos os trechos analisados, com a média das diferenças e respectivos desvios-padrão:

TABELA 1 – ESTATÍSTICAS DO TRECHO 1 (INTERPOLADOR COM FILTRO DE KALMAN)

Coordenada	E (m)	N (m)	H (m)
Média	-0.012	0.007	0.000
$\sigma$	0.057	0.036	0.067

TABELA 2 – ESTATÍSTICAS DO TRECHO 2 (INTERPOLADOR COM FILTRO DE KALMAN)

Coordenada	E (m)	N (m)	H (m)
Média	0.020	-0.002	0.000
$\sigma$	0.074	0.055	0.085

Os resultados apresentados nas tabelas (1) e (2) mostram que a média das diferenças é próxima de zero, se considerada a precisão do levantamento. Isso indica a ausência de erros sistemáticos afetando o sistema. Os gráficos apresentados nas figuras (9) e (10) mostram

claramente que, para ambos os trechos analisados, cerca de 70% dos erros estão dentro do desvio-padrão determinado, indicando que a distribuição é normal com média zero, fato que também indica a ausência de erros sistemáticos.

### 3.2 Resultados obtidos com o Interpolador Linear Comum

Os resultados obtidos com o interpolador linear no qual se aplica o filtro de Kalman comprovam a viabilidade da metodologia proposta. No entanto, para comprovar o ganho na qualidade geométrica que este interpolador proporciona sobre um interpolador linear simples, apresentam-se neste trabalho os resultados obtidos com um interpolador destes. É importante ressaltar que a metodologia proposta neste trabalho também utiliza um interpolador linear, mas com a inclusão das variações temporais do movimento da aeronave durante a faixa de vôo. Num interpolador linear simples, essas variações são ignoradas, e este fato pode gerar discrepâncias significativas nos resultados finais. Os resultados apresentados a seguir são provenientes do emprego de um interpolador linear, onde foi utilizado o modelo matemático apresentado no item 2.1. Este modelo foi escolhido por ser o mesmo utilizado durante o algoritmo do filtro de Kalman, e assim as diferenças entre os dois métodos (interpolação linear convencional e com a utilização do filtro de Kalman), puderam ser melhor comparadas.

Utilizando-se dos mesmos trechos analisados no item 3.1, obtém-se os seguintes gráficos para o interpolador linear convencional:

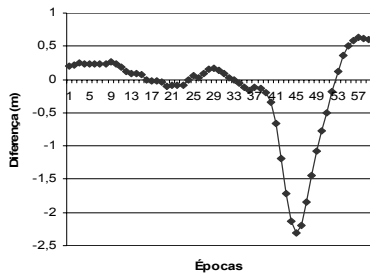


Fig. 11 - Diferenças em E - Trecho 1 (Linear)

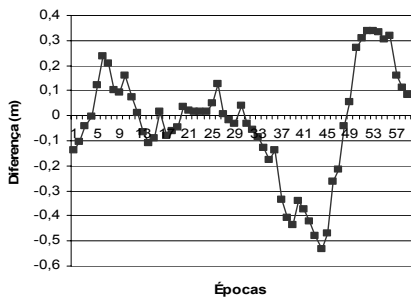


Fig. 12 - Diferenças em N - Trecho 1 (Linear)

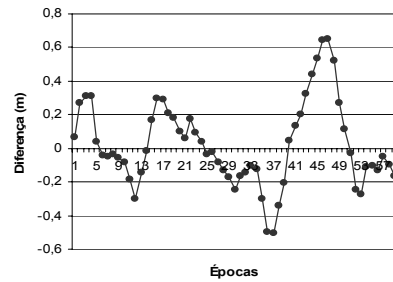


Fig. 13 - Diferenças em H - Trecho 1 (Linear)

Os resultados obtidos para o segundo trecho:

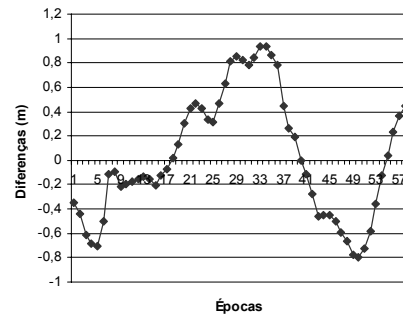


Fig. 14 - Diferenças em E - Trecho 2 (Linear)

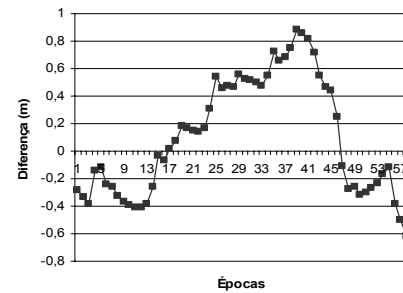


Fig. 15 - Diferenças em N - Trecho 2 (Linear)

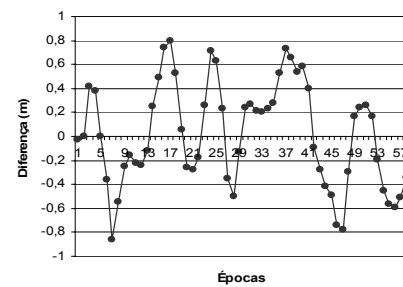


Fig. 16 - Diferenças em H - Trecho 2 (Linear)

Da mesma forma do que foi realizado para o interpolador com filtro de Kalman, as estatísticas obtidas para os dois trechos, com a utilização do interpolador linear são:

TABELA 3 – ESTATÍSTICAS DO TRECHO 2 (INTERPOLADOR LINEAR)

Coordenada	E (m)	N (m)	H (m)
Média	-0.178	-0.030	0.022
$\sigma$	0.695	0.219	0.253

TABELA 4 – ESTATÍSTICAS DO TRECHO 2 (INTERPOLADOR LINEAR)

Coordenada	E (m)	N (m)	H (m)
Média	0.022	0.105	0.017
$\sigma$	0.510	0.426	0.432

Os resultados apresentados nas figuras (12) a (16) e nas tabelas (3) e (4), demonstram o pior desempenho do interpolador comum em relação à metodologia proposta, na qual há a inclusão do filtro de Kalman.

#### 4. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Com base dos resultados obtidos nos experimentos realizados, conclui-se que a metodologia desenvolvida para interpolação de centros de fase de antena GPS com finalidades para voo apoiado, utilizando-se do filtro de Kalman, mostra-se eficaz e dentro da precisão requerida. As diferenças entre valores determinados pelo processamento GPS e valores interpolados encontram-se em sua maioria abaixo dos 15cm. Considerando-se uma taxa de 1Hz para os receptores, o intervalo de interpolação para os testes realizados (ou seja, onde não há coordenadas determinadas), é de 2s, o qual pode ser considerado um intervalo grande. As aerofotos são tomadas sempre entre duas épocas, com um intervalo “real” de interpolação geralmente inferior a 1s, e por isso a metodologia proposta neste trabalho pode alcançar um desempenho ainda melhor nas aplicações reais de interpolação aplicadas à aerotriangulação com voo apoiado. A comparação com um interpolador linear comum demonstra que, enquanto neste tipo de interpolador as discrepâncias ultrapassam facilmente os 50cm, com a introdução do filtro de Kalman essas diferenças passam a ser de cerca de 10cm, que é a precisão aproximada de um processamento GPS cinemático.

Recomendam-se novos testes com taxas de recepção do GPS de 2Hz e 5Hz, a fim de se verificar uma possível melhoria nos resultados. Uma cronometragem mais precisa dos eventos envolvidos (medidas do GPS e tomadas de aerofotos), também é recomendada, visando uma otimização geral do sistema.

Uma vantagem observada na aplicação deste algoritmo é a boa velocidade do processamento de uma quantidade de dados relativamente alta. Isso ocorre dado ao pequeno volume de dados utilizado a cada interpolação. Esta é, na verdade, uma forte característica de algoritmos implementados com o filtro de Kalman.

Desta maneira, conclui-se que o algoritmo é funcional e pode ser implementado em aplicações de voo apoiado por GPS, com a vantagem de determinar a velocidade da aeronave no momento da tomada da aerofoto, a qual pode ajudar na determinação de parâmetros físicos dos erros comuns em voo apoiado, como atrasos de sinal, e o “linear drift” dos relógios utilizados na cronometragem, evitando possível superparametrização no processo de aerotriangulação.

#### AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Aerosat Arquitetura Engenharia e Aerolevantamento pelos dados gentilmente fornecidos, e pelo apoio à realização deste trabalho. Da mesma maneira agradecemos a Francisco Mauro, da Elima Eletrônica Ltda, por sua contribuição fundamental na montagem do hardware necessário. Agradecemos também a CAPES, pela bolsa de mestrado que permite o seguimento da pesquisa.

#### REFERÊNCIAS

ACKERMANN, F. Operational Rules and Accuracy Models for GPS Aerotriangulation. In: ISPRS, 1992, Commission III Invited Paper, Washington, D.C. **Proceedings of the ...**

CAMARGO, P. **Controle de Qualidade Aplicado ao Filtro de Kalman**. Curitiba, 1992. Dissertação de Mestrado - Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná.

COCK, D.; HANNIGAN, B.; KUBIK, K. Global Positioning System camera station coordinates for aerial photogrammetry: Is linear interpolation enough? **Australian Journal of Geodesy, Photogrammetry and Surveying**, n. 54 p.53-65, 1991.

CURRY, S.; SCHUCKMANN K. Practical Considerations for the Use of Airborne GPS for Photogrammetry. **Photogrammetric Engineering and Remote Sensing**. v.59, n.11, pp. 1611-1617, 1993.

GELB, A. 1974. **Applied Optimal Estimation**. Cambridge: MIT press M. 374p.

JACOBSEN, K; SCHMITZ, M. A New Approach of Combined Block Adjustment Using GPS-Satellite Constellation. **Commission III, WG 1**. 1993.

KALMAN, R. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Trans. ASME, Series D, J. Basic Eng.** v. 82, March, 1960; p. 35 – 45.

KOCH, K. Kalman Filter and Optimal Smoothing Derived by the Regression Model. **Manuscripta Geodaetica**. vol.7, 1983.

KUSEVIC, K.; MRSTIK, P. The Effect of Varying Epoch Intervals on Nonlinear Interpolation Solutions for Airborne GPS Trajectories. In: KIS97, 1997, Banf, Canada. The University of Calgary, p. 329-336. **Proceedings of ...**

LAPINE, L. **Analytical Calibration of the Airborne Photogrammetric System Using a Priori Knowledge of the Exposure Station Obtained from Kinematic GPS Techniques**. Columbus, Ohio, 1991. Ph.D. Dissertation. The Ohio State University.



LAPINE, L. Airborne Kinematic GPS Positioning for Photogrammetry: The Determination of the Camera Exposure Station. In: C. Greve (Ed.), **Digital Photogrammetry: An addendum to the manual of photogrammetry**. Falls Church, VA: ASPRS. 1996.

LICHTI, D. Analysis of Interpolation Methods for Kinematic DGPS Control in Aerial Photogrammetry. **GPS Solutions**, v. 4, n.2, pp 54-62, 2000.

LICHTI, D. The Interpolation Problem in GPS-Supported Aerial Triangulation. **The Photogrammetric Record**, v.17, n.99, p.481-492, April 2002.

MAGRO, F.; ANDRADE, J. B. GPS & Aerotriangulation. In: Congress International of Photogrammetry and

Remote Sensing. Washington, D.C.. **International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing**. Washington, D.C.: Society International of Photogrammetry and Remote Sensing, 1992. v. 29 B. p. 132-136.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS. Descrição, fundamentos e aplicações**. São Paulo: Editora UNESP, 2000.

Recebido em 16 de junho de 2005 – Aceito para publicação em 16 de setembro de 2005.