

O DETECTOR DE CANNY-EDP: UMA COMBINAÇÃO ENTRE AS TEORIAS DE CANNY E DE DIFUSÃO ANISOTRÓPICA NÃO LINEAR

Canny-EDP detector: a combination between Canny and non-linear anisotropic diffusion theories

Giovane Maia do Vale¹
Edinéia Aparecida dos Santos Galvanin¹
Aluir Porfírio Dal Poz²

¹Universidade Estadual Paulista
Programa de Pós Graduação em Ciências Cartográficas
Rua Roberto Simonsen, 305
CEP 19060-900 - Presidente Prudente - SP
(18) 229-5388 - FAX: (18) 223-2227
gmvale@pos.prudente.unesp.br - edineia@pos.prudente.unesp.br

²Universidade Estadual Paulista
Departamento de Cartografia
Rua Roberto Simonsen, 305
CEP 19060-900 - Presidente Prudente - SP
(18) 229-5388 - FAX: (18) 223-2227
aluir@prudente.unesp.br

RESUMO

Este artigo propõe uma metodologia para a detecção de bordas em imagens digitais usando o detector de Canny, associado à focalização prévia da estrutura de borda por difusão anisotrópica não linear via Equações Diferenciais Parciais (EDP). Esta estratégia visa minimizar o efeito da conhecida dualidade do detector de Canny, pela qual não se pode realçar simultaneamente a insensibilidade aos ruídos da imagem e a precisão de localização das bordas detectadas. O processo de difusão anisotrópica via EDP é utilizado para focalizar previamente a estrutura de borda devido sua característica notável em suavizar seletivamente a imagem, deixando as regiões homogêneas fortemente suavizadas e preservando principalmente as bordas físicas, isto é, aquelas que realmente estão associadas com objetos presentes na imagem. A solução para a dualidade mencionada consiste em aplicar o detector de Canny em escala gaussiana fina, mas somente ao longo das regiões de bordas focalizadas pelo processo de difusão anisotrópica via EDP. Os resultados mostraram que o método é apropriado para aplicações envolvendo extração automática de feições, pois possibilitou a localização de bordas afinadas com alta precisão, as quais estão geralmente relacionadas com objetos presentes na imagem.

Palavras chaves: Difusão anisotrópica, Detecção de bordas, Detector de Canny.

ABSTRACT

This paper proposes a methodology for edge detection in digital images using the Canny detector, but associated to a previous edge structure focusing by a non-linear anisotropic diffusion via Partial Differential Equation (PDE). This strategy aims at minimizing the effect of the well-know duality of Canny detector, by which is not possible to simultaneously enhance the insensitiveness to image noises and the localization precision of detected edges. The process of anisotropic diffusion via PDE is used to previously focus the edge structure due to its notable characteristic in selectively smoothing the image, leaving the homogeneous regions strongly smoothed and mainly preserving the physical edges, i.e., those that are really related to objects presented on the image. The solution for the mentioned duality consists in applying the Canny detector in fine gaussian scale but only along the edge regions focused by the process of anisotropic diffusion via PDE. The obtained results showed that the method is appropriated for application involving automatic feature extraction, as it allowed the high-precision localization of thinned edges, which are usually related to objects presented on the image.

Keywords: Anisotropic diffusion, Edges detection, Canny detector.

1. INTRODUÇÃO

As propriedades dos objetos, tais como as características geométricas e físicas, são passadas à imagem, pois ocasionam variações nos tons de cinza da imagem. Dessa forma, para se detectar e extrair informações dos objetos, várias técnicas de análise de imagem são utilizadas, dentre elas a detecção de bordas. Dependendo do fim a que se destina, a detecção de bordas pode ser tida como um fim ou como um pré-processamento para passos subseqüentes de análise de imagem. De qualquer forma, para que sejam obtidos os resultados desejados, é necessário que a estratégia de detecção de bordas seja eficiente e confiável.

Nas metodologias existentes para a detecção de bordas uma das operações comuns é a diferenciação da imagem, resultando na detecção tanto de bordas físicas quanto de bordas espúrias. Para minimizar este efeito indesejado, suaviza-se a imagem antes da diferenciação, dando origem à dualidade entre detecção e precisão de localização das bordas (SHEN e CASTAN, 1992, VALE e DAL POZ, 2002a, 2002b). Isto é, quanto mais se privilegia a precisão de localização, menor é a razão sinal/ruído e, conseqüentemente, a detecção se torna cada vez mais sensível aos detalhes espúrios da imagem, e vice-versa. Um trabalho pioneiro que visava à detecção de bordas com boa localização foi desenvolvido por Marr e Hildreth (1980), onde a teoria descrita por esses autores leva em consideração a detecção de bordas utilizando a convolução da imagem original com o Laplaciano da função Gaussiana. Esta dualidade está presente no detector de Canny que, quando utilizado, influencia diretamente na eficiência e na autonomia das metodologias automáticas de análise de imagem. Por exemplo, metodologias para a extração automática de feições, tidas como automáticas e que utilizam o detector de bordas de Canny, são dependentes da escolha do parâmetro de escala adequado para uma imagem particular, implicando numa indesejada interação do operador com o sistema de extração (DAL POZ et al., 2004). Logo, o estudo da dualidade, detecção *versus* localização, é muito relevante no contexto de metodologias automáticas para a extração de feições.

Uma metodologia de detecção de borda que, a princípio, é promissora para resolver o problema da dualidade é baseada na difusão anisotrópica não linear via Equações Diferenciais Parciais (EDP), cuja idéia principal é realizar, numa etapa prévia, uma suavização seletiva da imagem (BARCELOS et al., 2002; GALVANIN e SILVA, 2003). O processo suaviza mais intensamente as regiões homogêneas da imagem, retirando as informações de menor contraste, geralmente relacionadas com ruído e elementos de textura. Conseqüentemente, o detector via EDP preserva, em termos de completeza e localização, as bordas de contraste melhor definido, possibilitando detectar principalmente os contornos dos objetos (rodovias, edifícios, limite de culturas etc.). Esta propriedade é fundamental para as estratégias de

extração automática de feições em imagens digitais (DAL POZ et al., 2004). Uma desvantagem do detector de bordas via EDP é a possibilidade de detectar regiões de bordas (que são estreitas e alongadas), cujas respostas do gradiente da imagem não variam significativamente. Dessa forma, o afinamento de bordas via supressão não máxima pode ser um processo impreciso, constituindo assim numa possível causa de problemas para as etapas posteriores de extração automática de feições.

A proposta de combinação entre ambos os detectores veio da constatação de que é possível aproveitar: 1- a característica notável do detector via EDP em gerar resultados com razão sinal/ruído bastante favorável, compreendendo regiões de bordas sem deslocamento e com um mínimo de fragmentação; 2- a característica do detector de Canny em detectar em escala fina (isto é, um pequeno fator de escala gaussiano) bordas afinadas com alta precisão. Assim, em função dos problemas apresentados nos parágrafos anteriores, este artigo propõe uma solução para o problema da dualidade do detector de Canny baseada na aplicação do mesmo em escala fina, mas somente ao longo das regiões de bordas focalizadas a priori pelo detector via EDP. Ressaltando, todavia que a idéia de focalização de bordas ao longo do espaço escala foi explorada anteriormente por Bergholm (1987).

Este artigo está organizado em 7 seções principais. A Seção 2 apresenta a fundamentação teórica inerente aos detectores envolvidos na metodologia proposta. Esta metodologia é descrita na Seção 3. Na Seção 4 são apresentados e analisados os resultados experimentais obtidos. Na Seção 5 são apresentadas as principais conclusões.

2. DETECTORES DE BORDA

Como este artigo propõe a combinação entre os detectores de Canny e de difusão anisotrópica via EDP, esta seção apresenta tanto a fundamentação teórica quanto a realização algorítmica de ambos os detectores. Referente ao detector de Canny, é relativamente comum encontrar detalhes algorítmicos na literatura específica, como por exemplo em Parker (1997) e Jain et al. (1995). Por outro lado, provavelmente sua complexidade matemática tem inibido descrições teóricas mais compreensivas da metodologia de Canny. Infelizmente as complexas explicações teóricas presentes no artigo original de Canny (1986) estão ao alcance de poucos, limitando-se àqueles com sólida formação matemática. Tendo então em vista a boa documentação do algoritmo de Canny, apresenta-se somente uma noção básica do mesmo, ficando um espaço bem maior à fundamentação teórica do método de Canny. Quanto ao detector de difusão anisotrópica via EDP (GALVANIN e SILVA, 2003) são apresentados, com algum detalhamento, tanto os aspectos teóricos quanto algorítmicos deste detector.

2.1 Detector de Canny

2.1.1 Critérios para um detector de bordas genérico

Conforme Canny (1986), qualquer filtro para a detecção de bordas deve atender a três critérios básicos. O primeiro deles é denominado Taxa de Erro ou Detecção, consistindo na maximização da razão sinal/ruído (RSR). Quanto maior for o RSR, maior é a probabilidade de se detectar as bordas verdadeiras (ou físicas) da imagem. O segundo critério especifica que pontos de borda devem estar bem localizados, isto é, as distâncias entre os pontos extraídos pelo detector e as respectivas posições verdadeiras devem ser minimizadas. Tem-se então o critério de Localização (L), definido como sendo o inverso da distância entre um ponto detectado e a respectiva posição verdadeira. Portanto, quanto maior for L, mais próximos das posições verdadeiras estarão os pontos detectados pelo filtro. Pelo exposto, o projeto de um filtro para a detecção de bordas arbitrárias envolve a maximização de ambos os critérios, o que é equivalente à maximização do produto entre ambos (RSR e L), ficando (CANNY, 1986):

$$\left(\frac{\left| \int_{-w}^w G(-x)f(x) dx \right|}{n_0 \sqrt{\int_{-w}^w f^2(x) dx}} \right) \left(\frac{\left| \int_{-w}^w G'(-x)f'(x) dx \right|}{n_0 \sqrt{\int_{-w}^w f'^2(x) dx}} \right), \quad (1)$$

onde $f(x)$ é a resposta de impulso do filtro definido no intervalo $[-w; w]$, $G(x)$ é uma borda unidimensional e n_0 a quantificação do ruído da imagem. Assume-se que a borda está centrada em $x = 0$. Na equação 1, a primeira quantidade entre parêntesis corresponde ao RSR e a segunda à L.

A condição de filtro ótimo (equação 1) deve ainda atender a um terceiro critério, denominado critério de resposta múltipla. A idéia básica é que deve haver um único ponto de borda onde existe uma única borda verdadeira. Seja (CANNY, 1986):

$$x_{\max} = 2\pi \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

a expressão matemática para a distância (x_{\max}) entre máximos adjacentes na resposta do filtro $f(x)$ devido à presença de ruído. Assim, ao maximizar a condição dada pela equação 1, deve-se também garantir que x_{\max} seja maior possível, aumentando a possibilidade de separação de máximos verdadeiros dos falsos na saída do filtro $f(x)$.

2.1.2 Detector de Canny para bordas degrau (step edges)

Uma borda ideal do tipo degrau pode ser matematicamente definida como $G(x) = A \cdot u_{-1}(x)$, onde A é a amplitude da borda e $u_{-1}(x)$ é dada por:

$$u_{-1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ 1, & \text{para } x \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Substituindo $G(x)$ na condição dada pela equação 1, pode-se escrever a seguinte condição, que é independente da amplitude de borda A e do ruído n_0 :

$$\Sigma(f) \cdot \Lambda(f') = \left(\frac{\left| \int_{-w}^0 f(x) dx \right|}{\sqrt{\int_{-w}^{+w} f^2(x) dx}} \right) \left(\frac{|f'(0)|}{\sqrt{\int_{-w}^{+w} f'^2(x) dx}} \right), \quad (4)$$

onde $\Sigma(f)$ e $\Lambda(f')$ (as respectivas quantidades entre parêntesis) são duas medidas de desempenho, as quais dependem somente do filtro $f(x)$. Estas quantidades estão relacionadas, respectivamente, com a detecção e a localização. Demonstra-se que $\Sigma(f)$ e $\Lambda(f')$ variam inversamente ao longo do espaço-escala, significando que quando se privilegia a detecção perde-se em localização e vice-versa. Dada a complexidade do tratamento matemático envolvido, limita-se a apresentação da solução geral para a equação 4 no semi-intervalo de suporte $[-w; 0]$ (CANNY, 1986):

$$f(x) = a_1 e^{\alpha x} \sin \omega x + a_2 e^{\alpha x} \cos \omega x + a_3 e^{-\alpha x} \sin \omega x + a_4 e^{-\alpha x} \cos \omega x + c, \quad (5)$$

onde $a_1, a_2, a_3, a_4, \alpha, \omega$ e c são as incógnitas a determinar.

A função 5 está sujeita às seguintes condições de contorno:

$$f(0) = 0; \quad f(-w) = 0; \quad f'(0) = s; \quad f'(-w) = 0, \quad (6)$$

onde s é uma incógnita correspondente à declividade da função $f(x)$ na origem. Visto que $f(x)$ é assimétrica, pode-se estender a equação 5 para todo o intervalo de suporte $[-w, w]$ usando o fato de que $f(-x) = -f(x)$. As quatro condições de contorno possibilitam encontrar as quantidades de a_1, a_2, a_3 e a_4 em função das incógnitas α, ω, c e s . Como c é uma constante de integração gerada na obtenção da equação 5, pode-se arbitrá-la ($c=1$), ficando os parâmetros incógnitos reduzidos a 3 (α, ω e $\beta = s/c$). Infelizmente isso não reduz a complexidade do problema, pois ainda é necessário determinar os valores destes parâmetros que maximizam a condição de filtro ótimo (equação 4). Se isso não bastasse, falta impor o critério de resposta

múltipla, fazendo com que a forma do filtro $f(x)$ dependa também deste critério. O ideal é que os máximos adjacentes de $f(x)$ fiquem bastante afastados, facilitando a separação do pico verdadeiro dos falsos. Quanto menor o espaçamento entre as respostas adjacentes, mais íngreme é a função $f(x)$ na origem. Assim, um filtro muito íngreme, em relação à origem (maior s , equação 6), beneficia o critério de localização, mas não é favorável aos outros critérios. Por outro lado, um filtro menos íngreme, em relação à origem (menor s), é desfavorável ao critério de localização, mas os critérios de detecção e de respostas múltiplas são beneficiados. Canny (1986) apresenta a seguinte expressão matemática para o critério de resposta múltipla:

$$\frac{|f'(0)|}{\sigma_s} = r \Sigma(f), \quad (7)$$

onde σ_s é o desvio-padrão do ruído e r é o fator de desempenho de resposta múltipla. O fator r varia no intervalo $[0, 1]$ e, quanto mais próximo estiver de 1, mais afastadas estarão as respostas múltiplas. A equação 7 mostra que r depende diretamente de $s = f(0)$ e, como pode ser intuído, inversamente do montante de ruídos da imagem.

Como uma solução analítica para este problema é inviável, Canny (1986) utilizou um processo de otimização numérica, obtendo um conjunto de valores ($\alpha = 2,05$; $w = 1,57$; $r = 0,58$; $\Sigma(f)\Lambda(f') = 1,12$; $\beta = 2,92$) que balanceiam otimamente os três critérios do filtro.

Uma importante descoberta de Canny foi a possibilidade de aproximar eficientemente o filtro ótimo $f(x)$ através da primeira derivada da função gaussiana. Esta função é, na prática, bastante atrativa, haja vista sua forma analítica bastante simples. Outra vantagem desta função vem de sua conhecida propriedade de separabilidade, tornando a extensão bidimensional do filtro bastante simples, implicando inclusive em vantagens significativas em sua realização computacional.

O filtro $f(x)$ fica então aproximado por:

$$G'(x) = -\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

onde, $G'(x)$ é a primeira derivada de uma gaussiana unidimensional com parâmetro de escala σ .

Uma justificativa objetiva para o uso da aproximação $G'(x)$ é dada a seguir. Os índices de desempenho para este operador são (Canny, 1986):

$$\Sigma(f) \cdot \Lambda(f') = 0,92 \quad \text{e} \quad r = 0,51. \quad (9)$$

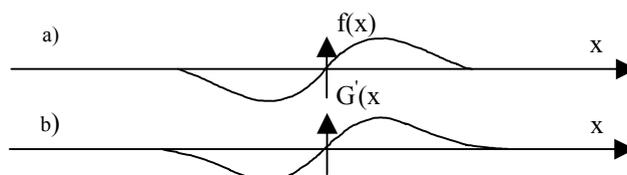


Fig. 1 - Detectores ótimo e Gaussiano. (a) Detector ótimo de bordas; e (b) Primeira derivada da função Gaussiana.

Os valores dos critérios ($\Sigma(f)\Lambda(f')$ e r) para o detector ótimo e a aproximação gaussiana são bastante semelhantes, ocorrendo o mesmo com a resposta de impulso de ambos (figura 1). Notar que as respostas de impulso de ambos os filtros são bastante semelhantes, o que intuitivamente sugere um desempenho semelhante.

2.1.3 Realização computacional

Pelas razões já colocadas, este artigo apresenta apenas um breve resumo do algoritmo de Canny. Detalhes podem ser encontrados em livros bastante difundidos (como em JAIN et al., 1995 e PARKER, 1997) e na publicação onde a metodologia foi originalmente vinculada (CANNY, 1986). Vale e Dal Poz (2002a, 2002b) também apresentaram uma descrição detalhada do algoritmo de Canny, que pode ser brevemente sumariado segundo os seguintes passos:

- 1) Ler a imagem I a ser processada;
- 2) Criar uma máscara Gaussiana bidimensional G para convoluir com I , dando origem a I_s . O desvio-padrão desta Gaussiana é um parâmetro do detector de bordas;
- 3) Criar duas máscaras unidimensionais para a diferenciação da imagem suavizada, nas direções x (linha) e y (coluna), denominando-as de G_x e G_y ;
- 4) Convoluir a imagem I_s com G_x ao longo das linhas, gerando a imagem I_x e, analogamente, ao longo das colunas para gerar I_y ;
- 5) A magnitude é calculada em cada pixel (x,y) na forma que segue:

$$M(x,y) = \sqrt{I_x(x,y)^2 + I_y(x,y)^2}. \quad (10)$$

Para completar o algoritmo desenvolvido por Canny, pode-se acrescentar ainda dois passos fundamentais:

- 6) Supressão não Máxima, que é o anulamento dos pixels cujos valores não sejam máximos locais na direção perpendicular à borda, sendo que este processo produz um afinamento das bordas, atendendo assim o terceiro critério de desempenho de Canny.
- 7) Limiarização adaptativa (histerese), que consiste em uma limiarização baseada em dois limiares τ_1 e τ_2 , onde $\tau_1 \cong 2\tau_2$ ou $\tau_1 \cong 3\tau_2$. Aplicando a limiarização duas vezes, uma para τ_1 e outra para τ_2 , o algoritmo efetua um processo de complementação

das descontinuidades da primeira limiarização aproveitando o resultado da segunda.

2.2 Detector de Difusão Anisotrópica via EDP

O processo de detecção de bordas é altamente dependente do tipo de suavização aplicado a priori. Dessa forma, inúmeras pesquisas foram realizadas com intuito de solucionar os problemas relacionados à suavização da imagem. Perona e Malik (1990), desenvolveram um modelo cuja idéia central consistia em realizar uma suavização seletiva na imagem. O modelo realiza a difusão não linear, consistindo de um algoritmo para detecção de bordas e realce de imagem. Alguns autores, a partir do modelo de Perona e Malik, desenvolveram modelos que buscavam a suavização seletiva da imagem.

Nordström (1990), desenvolveu um modelo resultante da unificação do modelo de difusão não linear com um termo de regularização, no qual o termo regularizador tem como função manter as imagens geradas na evolução temporal próximas à imagem original.

Diante dos resultados obtidos com vários modelos anteriormente desenvolvidos, Barcelos et al. (2002), desenvolveram um modelo que consiste em aplicar seletivamente a equação, permitindo suavizar adequadamente uma imagem sem perder as bordas e outros detalhes contidos na imagem.

2.2.1 Fundamentação teórica

O modelo matemático que se baseia o detector de difusão anisotrópica proposto por Barcelos et al. (2002) é uma equação de difusão não linear. Tal equação segue a corrente teórica formulada a partir de Perona e Malik (1990), sendo expresso matematicamente por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \bar{g} |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda (1 - \bar{g})(u - I), \quad (11)$$

$$u(x, y, 0) = I(x, y), \quad (x, y) \in \mathfrak{R}^2,$$

onde: $\bar{g} = \frac{1}{1 + k |\nabla(G_T * u)|^2}$, com $0 \leq \bar{g} \leq 1$; ∇ é o

operador gradiente; div representa o operador divergente; λ é um parâmetro que atua como peso para o termo $(1 - \bar{g})$; k é a constante presente na função \bar{g} ; I representa a imagem original; u é a imagem suavizada a partir de I no instante t ; T representa o nível ótimo de suavização necessário para se atingir um grau de suavização adequado e G_T é uma função Gaussiana.

O termo $|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ na equação 11 realiza a difusão da imagem u na direção ortogonal ao seu gradiente ∇u . Permitindo, dessa forma que as bordas

contidas na imagem u sejam suavizadas em ambos os lados com suavização mínima nas próprias bordas.

O modelo matemático dado pela equação 11 tem como objetivo suavizar seletivamente a imagem. A função \bar{g} na equação 11 controla a velocidade da difusão, ou seja, a suavização seletiva atuará de forma incisiva nas regiões homogêneas da imagem, onde o termo $|\nabla(G_T * u)|$ é pequeno, fazendo com que o segundo termo do denominador da função \bar{g} seja muito pequeno. Nestas condições $\bar{g} \sim 1$, fazendo com que o termo $(1 - \bar{g}) \sim 0$ na equação 11. Assim o termo $(u - I)$ que mantém as bordas inalteradas não atuará no modelo. Conseqüentemente o processo de difusão efetuado pelo primeiro termo da equação 11 fará com que a região homogênea sofra maior suavização. O efeito contrário ocorrerá se o termo $|\nabla(G_T * u)|$ for grande, ou seja, se houver variações bruscas nos níveis de cinza da imagem. Se isso ocorrer, o segundo termo do denominador da função \bar{g} será muito grande, logo $\bar{g} \sim 0$, implicando em $(1 - \bar{g}) \sim 1$ na equação 11. Nesse caso, o termo $(u - I)$ atuará significativamente na imagem, mantendo as características originais das bordas. Isso faz com que o processo de difusão efetuado pelo primeiro termo da equação 11 não atue nessas regiões.

A função Gaussiana utilizada na equação 11, sofreu uma substituição de parâmetros dada por $aT = \sigma^2$. Essa relação sugerida por Teixeira (2001) indica que o nível ótimo de suavização (T) depende do parâmetro σ , o qual controla a intensidade de suavização do filtro Gaussiano. Assim, a função Gaussiana é dada por

$$G_T(x, y) = \frac{1}{2a\pi T} e^{-(x^2 + y^2)/2aT}, \quad (x, y) \in \mathfrak{R}^2. \quad (12)$$

O conceito de nível ótimo de suavização introduzido por Barcelos et al. (2002) é definido pela expressão

$$T = \frac{\sigma^2}{a}, \quad (13)$$

onde a é o parâmetro constante presente no núcleo de suavização Gaussiana e σ é o desvio padrão da função Gaussiana.

Segundo Galvanin e Silva (2003) a evolução temporal (t) existente no modelo está diretamente relacionada com o nível ótimo de suavização (T),

$$t = \frac{T}{\Delta t}, \quad (14)$$

onde Δt representa o tamanho do passo da evolução temporal.

O modelo consiste de um processo iterativo, controlado pela evolução temporal definida na equação 14. Assim, o processo evolui até um nível adequado de suavização (T), cabendo ressaltar que a estimativa do nível de informação irrelevante σ é empírica. Logo, a escolha de um limiar correto é difícil e envolve tentativa e erro.

2.2.2 Realização computacional

Para que a metodologia acima possa ser implementada computacionalmente a equação 11 necessita ser discretizada. Cabe ressaltar que, os resultados aqui apresentados foram gerados utilizando os elementos descritos abaixo. Na discretização foi utilizado o método de diferenças finitas para discretizar as derivadas parciais da equação diferencial. Essas derivadas são aproximadas por diferenças entre valores da solução discretizada. A série de Taylor é a ferramenta matemática utilizada na definição de aproximações das derivadas na região dos pontos de interesse.

A função \bar{g} (equação 11) tem na sua formulação o produto de convolução. Para calcular tal produto foi utilizada neste trabalho a regra de Simpson (SANTOS, 2002). É importante destacar que o produto de convolução é utilizado para encontrar uma média ponderada de valores na vizinhança de um determinado pixel.

Para calcular o gradiente do produto de convolução $|\nabla(G_T * u)|$, foi utilizado o operador de diferenças centradas no cálculo das derivadas de primeira ordem. Neste caso, foi utilizado a expressão $conv(i, j) = (G_T * u)(i, j)$, onde “conv” denota o produto de convolução. Logo, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial conv(i, j)}{\partial x} &\cong \frac{conv(i+1, j) - conv(i-1, j)}{2} = c_1, \\ \frac{\partial conv(i, j)}{\partial y} &\cong \frac{conv(i, j+1) - conv(i, j-1)}{2} = c_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Dessa forma, é obtida a expressão

$$\nabla(G_T * u) = \left(\frac{\partial conv}{\partial x}, \frac{\partial conv}{\partial y} \right).$$

Logo

$$|\nabla(G_T * u)| = \left[\left(\frac{\partial G_T * u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G_T * u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad (16)$$

$$|\nabla(G_T * u)|^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

O resultado obtido em na equação 16 é utilizado na função \bar{g} , dada por

$$\bar{g} = \frac{1}{1 + k(c_1^2 + c_2^2)}, \quad k \text{ constante.} \quad (17)$$

O termo de difusão $|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ foi discretizado a partir dos operadores de diferenças centradas dados por

$$u_x \cong \frac{u_{i+1, j} - u_{i-1, j}}{2} \text{ e } u_y \cong \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j-1}}{2}. \quad (18)$$

Pela derivada parcial mista

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{(u_x)_{j+1} - (u_x)_{j-1}}{2} \cong \frac{\frac{u_{i+1, j+1} - u_{i-1, j+1}}{2} - \frac{u_{i+1, j-1} - u_{i-1, j-1}}{2}}{2} \\ &= \frac{u_{i+1, j+1} - u_{i-1, j+1} - u_{i+1, j-1} + u_{i-1, j-1}}{4} \\ &= \frac{u_{i+1, j+1} + u_{i-1, j-1} - u_{i-1, j+1} - u_{i+1, j-1}}{4}, \end{aligned} \quad (19)$$

e pelas derivadas de segunda ordem em relação a x e y , dadas por:

$$\begin{aligned} u_{xx} &\cong u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j} \\ u_{yy} &\cong u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Após o desenvolvimento dos termos presentes no termo de difusão, tem-se:

$$|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{u_x^2 + u_y^2} \quad (21)$$

É importante salientar que foram utilizadas condições de contorno de Neumann $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \right)$, nos pontos de fronteira da imagem, ressaltando que nessas regiões não há pontos suficientes para a utilização da fórmula de diferenças centradas. Logo, foram utilizados os operadores de diferenças avançadas e atrasadas para os pontos existentes nessas regiões, sendo dados pelas fórmulas avançada e atrasada, respectivamente

$$u_x \cong u_{i+1, j} - u_{i, j} \quad \text{e} \quad u_y \cong u_{i, j+1} - u_{i, j}, \quad (22)$$

$$u_x \cong u_{i, j} - u_{i-1, j} \quad \text{e} \quad u_y \cong u_{i, j} - u_{i, j-1}.$$

Para discretizar a derivada com relação ao tempo foi utilizado o operador de diferenças avançadas, conforme segue

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_{i, j}^{t+1} - u_{i, j}^t}{\Delta t}, \quad (23)$$

onde: $u_{i,j}^{t+1}$ representa a imagem no estágio de tempo

$t+1$, $t = 1, 2, \dots, N$; $u_{i,j}^t$ representa a imagem no estágio de tempo t .

Cabe salientar que o método de discretização da derivada com relação ao tempo, dado pela equação 23, está associado com o esquema numérico correspondente ao método explícito. Assim, a equação geral do método explícito é obtida usando diferenças avançadas no tempo (equação 23) e a equação 11 discretizada. Dessa forma, denotando a equação 11 já discretizada, para fins de facilidade de notação, por $L(u_{i,j}^t)$, tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{t+1} - u_{i,j}^t}{\Delta t} \Rightarrow L(u_{i,j}^t) = \frac{u_{i,j}^{t+1} - u_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (24)$$

$$\Rightarrow u_{i,j}^{t+1} = \Delta t L(u_{i,j}^t) + u_{i,j}^t.$$

Cabe ressaltar que a equação 11 envolve funções de mais de uma variável e as taxas de variação do modelo são representadas por suas derivadas parciais.

Após a aplicação do modelo de EDP na imagem, o modelo fornece uma imagem suavizada. A partir desta, é realizada a segunda etapa do processo que consiste na segmentação da imagem. A função utilizada para a segmentação é dada por:

$$g(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + k_1 |\nabla u|^2}, \quad (25)$$

onde: k_1 é a constante presente na função g , com $0 \leq g \leq 1$.

Na seqüência a imagem suavizada u , os pixels cujos valores de g são próximos do valor unitário são mudados para o valor de cinza zero e, analogamente, os pixels com valor de g próximos do valor nulo são mudados para o valor de cinza um. O resultado é uma imagem binária onde os pixels de borda são brancos e os de fundo são pretos.

Na função (25), ∇u é discretizado a partir dos mesmos operadores de diferenças finitas utilizados no modelo de EDP (equação 11).

3. DETECTOR DE CANNY COM FOCALIZAÇÃO DE ESTRUTURA DE BORDA

Os processos de extração automática e semi-automática de feição em Fotogrametria Digital comumente dependem de pré-processamentos envolvendo algum processo de detecção e extração de bordas de objetos presentes na imagem. Nesse contexto, o objetivo básico dos processos de extração de feições é a extração

de polígonos (por exemplo, representando o contorno de uma quadra urbana ou o contorno de um telhado de uma edificação) ou de linhas poligonais (por exemplo, representando o eixo central de uma rodovia). Como estes polígonos ou linhas poligonais devem representar precisamente o contorno dos respectivos objetos de interesse, o resultado do processo de detecção e extração de bordas deve ser cadeias lineares (isto é, bordas afinadas) de pixels precisamente localizadas. Assim, bordas detectadas com deslocamento são altamente indesejadas mas, como poderá ser visto mais adiante, estruturas de bordas sem deslocamento não são garantia de extração precisa de cadeias lineares de pixels. Outra característica altamente desejável de um detector de bordas, no contexto de extração de feições, é que o mesmo responda somente as bordas físicas, evitando as espúrias, provenientes de ruído e textura da imagem.

Em resumo, pelo que foi exposto acima, um detector ideal de bordas deveria permitir:

- Apenas a detecção de bordas físicas, evitando as bordas espúrias relacionadas com ruído e textura da imagem;
- A detecção de bordas sem fragmentação e deslocamento; e
- A localização precisa da seqüência de pontos que melhor representa o contorno do objeto de interesse, o que é eficientemente realizado pelo conhecido processo de supressão não-máxima, podendo ser implementada tanto ao nível do pixel quanto do sub-pixel.

Se existisse um detector com as características acima, as etapas posteriores dos processos de extração de feições, que visam atribuir o significado aos objetos presentes na imagem, ficariam bastante facilitadas. Como esse detector ideal de borda não existe, resta fazer uso de estratégias que permitam obter resultados mais próximos possíveis do ideal. Um caminho que vai nessa direção é o que está sendo proposto neste artigo, consistindo na aplicação do detector de Canny após a focalização da estrutura de bordas através de difusão anisotrópica não linear via EDP. Para uma melhor compreensão da lógica dessa estratégia são discutidas a seguir características fundamentais de ambos os detectores envolvidos. A tabela 1 apresenta estas características.

TABELA 1 - PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DOS DETECTORES DE CANNY E DE DIFUSÃO ANISOTRÓPICA VIA EDP.

CARACTERÍSTICA	DETECTOR	
	CANNY	EDP
Deslocamento de borda	Sim, sendo desprezível em escala fina e maior quanto mais grosseira a escala.	Não.
Razão Sinal/Ruído (RSR)	RSR é menor em escalas mais finas e maior em escalas mais grosseiras.	RSR é menor em escalas mais finas e maior em escalas mais grosseiras.
Precisão de localização da borda afinada	Alta precisão é obtida em escalas finas.	Alta precisão não é garantida, podendo gerar ambigüidades.

No detector de Canny podem ser identificadas 4 etapas básicas: suavização, diferenciação, supressão não máxima e limiarização adaptativa ou histerese. As duas primeiras etapas geram uma superfície onde, para cada localização correspondente a um pixel da imagem original, associa-se uma cota dada pela magnitude do gradiente. Nessa superfície, as cumeeiras corresponderão às bordas da imagem. Se essa superfície for transformada numa imagem, a qual é geralmente denominada 'imagem de magnitude do gradiente', as bordas serão visualizadas como traços com vários pixels de espessura. O afinamento das cumeeiras é realizado pelo processo de supressão não máxima. O processo de histerese é o último passo a ser aplicado, consistindo basicamente em complementar as bordas afinadas obtidas previamente e eliminar pelo menos parte das bordas espúrias. O detector baseado em difusão anisotrópica não linear via EDP possui duas etapas básicas. A primeira consiste em realizar, através da equação 11, o processo de difusão anisotrópica gerando uma imagem suavizada sem, no entanto deslocar as estruturas proeminentes da imagem. Na segunda etapa é empregada uma estratégia simples de limiarização da imagem de magnitude do gradiente, tendo por base a equação 25. Salienta-se que, o detector de Canny é um processo completo, visto que a saída já é uma imagem de bordas afinadas, pronta para ser vetorizada e dar início ao processo de reconhecimento dos objetos de interesse. Já o detector descrito na Seção 2.2 permite obter apenas resultados semelhantes aos obtidos até a segunda etapa do detector de Canny. Num primeiro momento, bastaria aplicar os processos de supressão não máxima e histerese para obter resultados semelhantes aos obtidos pelo detector de Canny. No entanto, esta estratégia tem problemas teóricos para a aplicação da supressão não máxima, o que pode ser facilmente demonstrado na prática.

Voltando à tabela 1, a primeira característica refere-se ao deslocamento de bordas obtidas pelas duas primeiras etapas do detector de Canny ou pelo detector de difusão anisotrópica. Portanto, o deslocamento se refere às cumeeiras na superfície de magnitude do gradiente ou às bordas espessas na imagem de magnitude do gradiente. Vale ressaltar que embora bordas deslocadas impliquem necessariamente em imprecisão na localização das correspondentes bordas afinadas

(terceira característica, conforme a tabela 1), bordas não desloca das não implicam necessariamente em bordas afinadas precisamente. Assim, a primeira e a terceira características devem ser discutidas em separado. Quanto à primeira característica, a estrutura de bordas obtidas pelas duas primeiras etapas do detector de Canny é preservada apenas em escala fina ($\sigma = 1$, figura 2(a)). A aplicação de Canny numa escala grosseira ($\sigma = 8$, figura 2(b)) pode levar a um deslocamento de bordas de alguns pixels. Como mostram as figuras 2(c) e 2(d), o detector baseado em difusão anisotrópica não é afetado pelo deslocamento de borda ao longo do processo de difusão, característica que já tinha sido discutida sob o ponto de vista teórico na Seção 2.2. Referente ao RSR (segunda característica) de ambos os detectores, o comportamento é semelhante para os dois detectores (ver figuras 2(a,b,c,d)). Quanto maior o RSR, menos sensível é o detector aos ruídos e textura da imagem, possibilitando detectar principalmente as bordas físicas presentes na imagem. Assim, a aplicação de ambos os detectores em escala mais grosseira produziria, a princípio, um resultado satisfatório, visto que prevaleceriam as bordas físicas. Entretanto, pela primeira característica o detector de Canny apresenta desempenho desfavorável devido ao deslocamento da estrutura de borda. A aplicação dos detectores em escala fina seria desvantajoso para ambos devido ao baixo RSR, com a conseqüente alta sensibilidade aos ruídos e textura da imagem. Quanto à terceira característica, a precisão da localização das bordas afinadas depende basicamente de três fatores. Um primeiro está diretamente relacionado com a existência ou não de deslocamento da estrutura de borda, conforme a primeira característica discutida anteriormente. O segundo fator está relacionado com a forma das cumeeiras presentes na superfície de magnitude do gradiente. As cumeeiras presentes na superfície de magnitude do gradiente, gerada pelo detector de Canny, principalmente em escala fina, possuem elevadas curvaturas ao longo de suas seções transversais. Dessa forma, o processo de supressão não máxima possui alto poder de discriminação dos pontos de máximo ao longo das seções transversais das cumeeiras, garantindo alta precisão no afinamento das bordas (figura 2(e)). O mesmo não ocorre com o

detector de difusão anisotrópica pois, devido à sua capacidade de homogeneizar regiões com características semelhantes, como inclusive as estreitas e alongadas regiões de borda, pode gerar cumeeiras com baixa curvatura e até mesmo com curvatura bastante achatada. Consequentemente, a supressão não máxima deixa de ser um processo preciso e pode até ser incapaz de encontrar a localização da borda afinada. Um exemplo onde o processo de supressão não máxima não consegue afinar as bordas é mostrado na figura 2(f). Assim, a aplicação de um processo de vetorização geraria múltiplos resultados para um mesmo segmento de bordas, como para a área em destaque na figura 2(f).

Da análise realizada acima se depreende que o detector de difusão anisotrópica via EDP não é apropriado para aplicação em problemas de extração de feição em Fotogrametria Digital. Esta conclusão decorre da terceira característica do método (tabela 1), pela qual as bordas afinadas podem não ser localizadas com precisão esperada ou, até mesmo, não ser localizadas de forma única. Entretanto, as duas primeiras características credenciam o método como um excelente localizador (ou focalizador) de bordas físicas da imagem. O detector de Canny cumpre os requisitos para o problema de extração de feições em Fotogrametria Digital, desde que seja aplicado em escala fina para

garantir alta precisão no afinamento das bordas. O inconveniente nesse

caso provém da dualidade do detector que, nesse caso, implica em alta sensibilidade aos ruídos e textura da imagem devido ao baixo RSR em escalas finas. Assim, detecta-se além das bordas físicas também as indesejáveis bordas espúrias que, em alguns casos, podem trazer enormes dificuldades ou até inviabilizar as etapas posteriores, responsáveis pelo reconhecimento do objeto de interesse.

A solução aqui consiste em aplicar o detector de Canny em escala fina, mas apenas sobre a estrutura de bordas focalizadas pelo detector de difusão anisotrópica via EDP. Este procedimento permite minimizar as desvantagens de cada detector, visto que principalmente bordas físicas afinadas são detectadas com alta precisão. Portanto, além de permitir a precisão desejada para aplicações fotogramétricas, inclusive ao nível de sub-pixel, o RSR dos resultados finais é drasticamente aumentado devido ao isolamento prévio de regiões de ruído e textura da imagem. Dessa forma, ambos métodos se complementam, sem contudo sofrerem qualquer modificação teórica ou algorítmica.

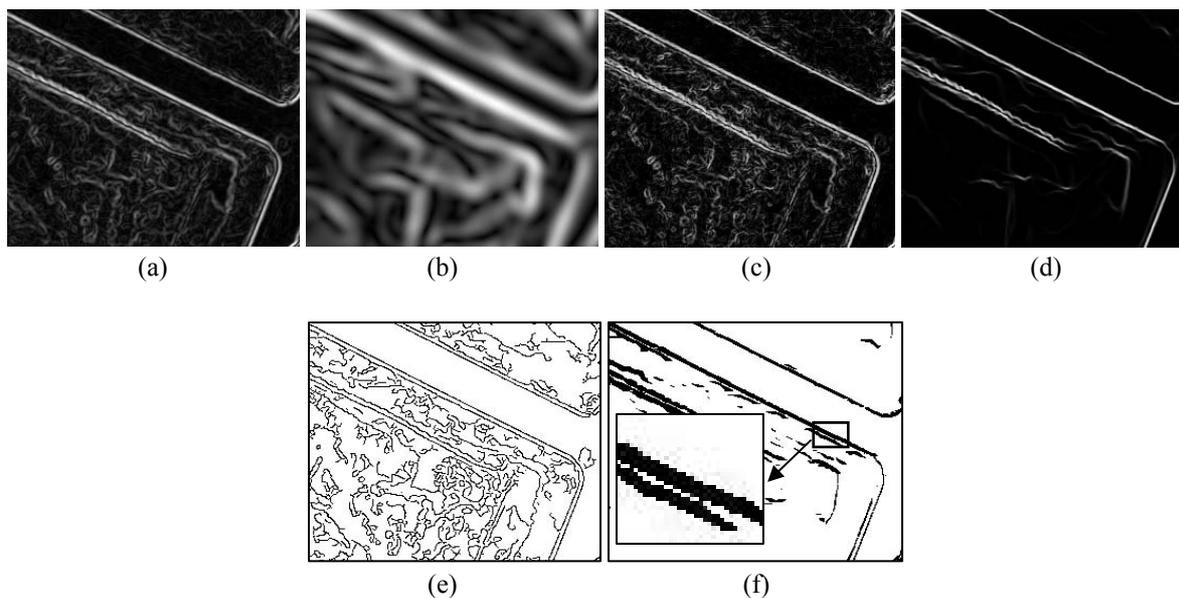


Fig. 2 - Visualização das características principais dos detectores de Canny e de difusão anisotrópica via EDP. (a) Bordas não afinadas, detectadas por Canny em escala fina ($\sigma = 1$); (b) Como em (a), só que em escala grosseira ($\sigma = 8$); (c) Bordas não afinadas, detectadas via EDP no início do processo de difusão; (d) Como em (c), só que no final do processo de difusão; (e) Bordas afinadas com alta precisão pelo detector de Canny com $\sigma = 1$; (f) Problemas no afinamento de bordas detectadas via EDP.

A figura 3(c) mostra o resultado obtido pela aplicação do detector de Canny com $\sigma=1$ (figura 3(b)) somente na estrutura de borda detectada pelo detector de difusão anisotrópica via EDP (figura 3(a)).

Comparando-se o resultado mostrado na figura 3(c) com o obtido usando somente Canny com mesma escala (figura 3(b)), verifica-se que restaram principalmente bordas físicas precisamente localizadas.

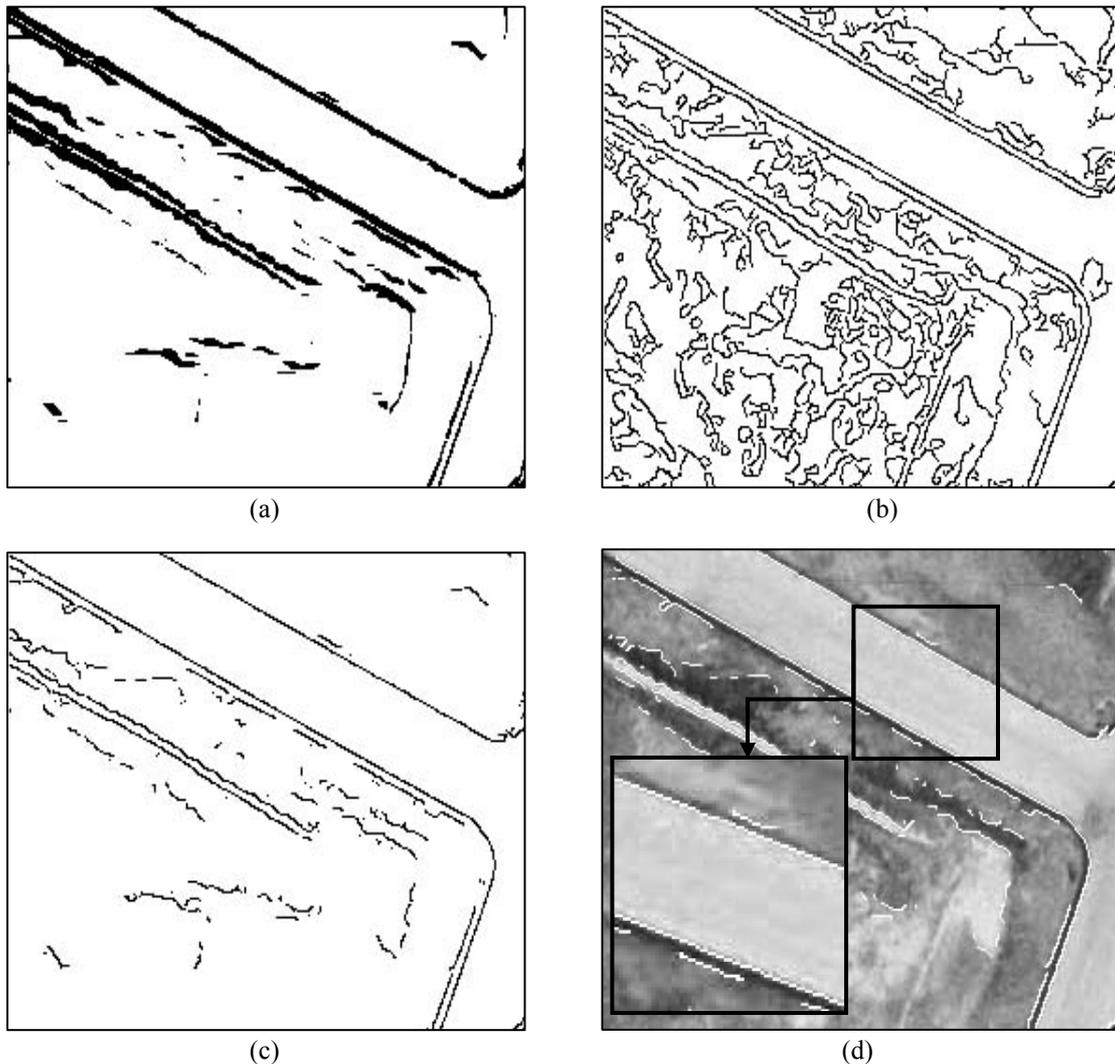


Fig. 3 - Exemplo de aplicação do detector de Canny com focalização prévia de bordas. (a) Bordas afinadas, detectadas via EDP no final do processo de difusão; (b) Bordas afinadas com alta precisão pelo detector de Canny com $\sigma = 1$; (c) Bordas detectadas a partir do método de Canny com focalização de regiões de bordas; (d) Imagem com bordas focalizadas sobrepostas.

Observando-se o trecho em destaque na figura 3(d), a qual é o resultado da sobreposição das bordas da figura 3(c) sobre a imagem original, pode-se verificar o posicionamento acurado das bordas, bem como a não fragmentação das bordas relevantes da imagem.

4. RESULTADOS E ANÁLISE

Nesta seção são apresentados alguns resultados e a avaliação do processo de detecção de bordas de Canny com focalização de regiões de bordas. São usadas duas imagens reais nas quais o processo proposto de detecção de bordas foi aplicado. De acordo com a teoria de Canny, os limiares de histerese foram mantidos fixos, sendo que os limiares, maior (τ_1) e menor (τ_2), correspondem respectivamente a 30% e 80% da escala de valores de magnitude. O desvio-padrão da Gaussiana utilizado para suavização das imagens se manteve também fixo ($\sigma = 1$).

No que se refere ao detector via EDP, o parâmetro de suavização ótimo (T), se manteve fixo no processo de difusão ($\sigma = 70$), sendo este o desvio padrão da Gaussiana utilizado para o detector de EDP.

Para mostrar a eficácia do método, são apresentados e analisados os resultados obtidos com duas imagens com densidades diferentes de ruído. A primeira imagem teste é menos ruidosa que a segunda imagem, característica que não pode ser diretamente observada nas imagens teste apresentadas nas figuras 4(d) e 5(d). Esta diferença de densidade de ruído está ligada à diferença de resolução espacial (além de outros fatores) de ambas as imagens. A primeira imagem teste (figura 4(d)) tem resolução espacial da ordem de 2 m e a segunda imagem (figura 5(d)) da ordem de 0,5 m. Por outro lado, o contraste da primeira imagem teste é melhor que o da segunda. Estas imagens foram selecionadas com o objetivo de verificar o desempenho do método na presença de imagens com características diversas.

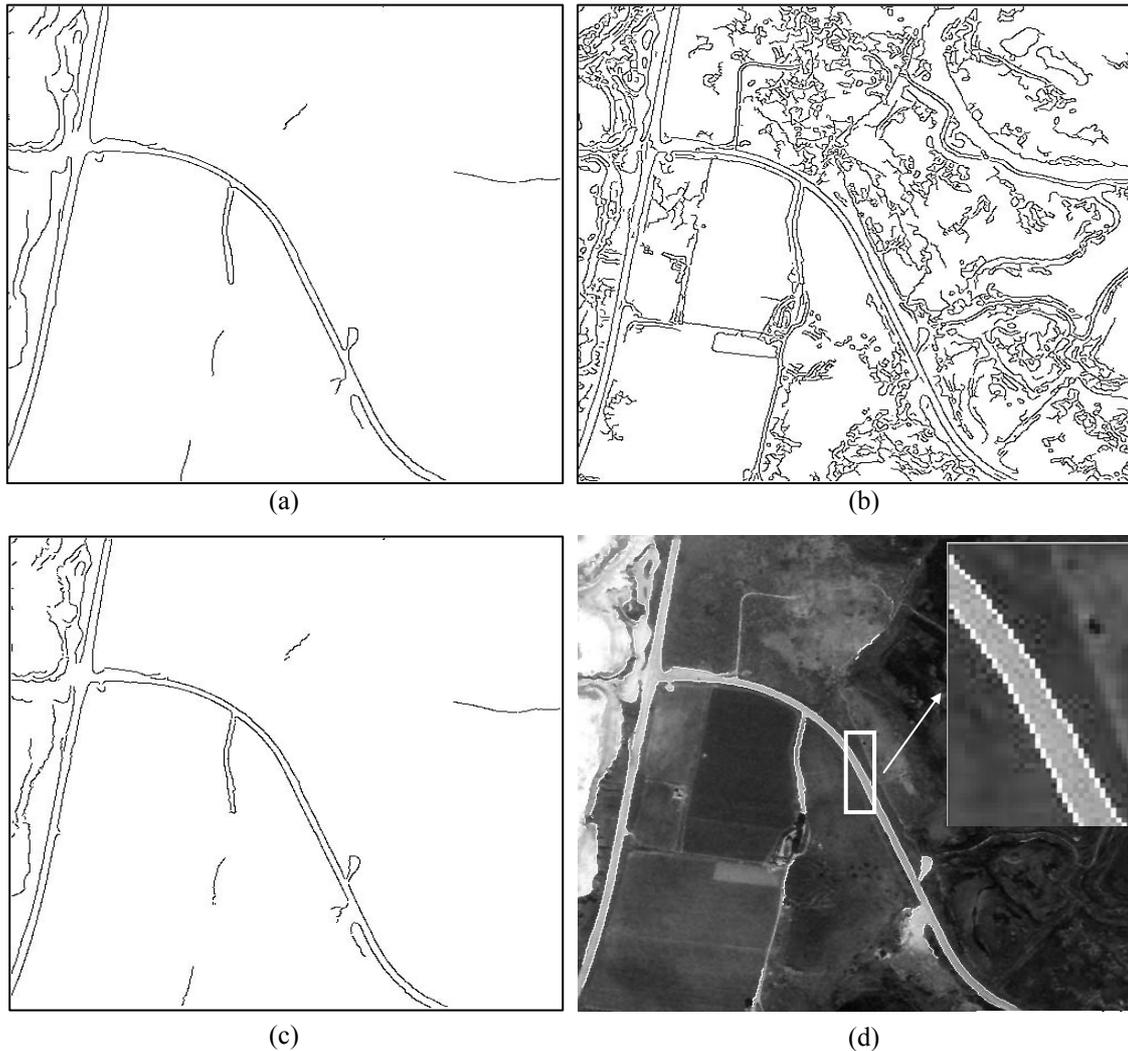


Fig. 4 – Exemplo de aplicação do detector de Canny com focalização prévia de bordas. (a) Bordas afinadas, detectadas via EDP no final do processo de difusão; (b) Bordas afinadas com alta precisão pelo detector de Canny com $\sigma = 1$; (c) Bordas detectadas a partir do método de Canny com focalização de regiões de bordas; (d) Imagem com bordas detectadas e sobrepostas.

A figura 4(a) mostra os resultados obtidos com o detector de EDP, seguido da aplicação da supressão não máxima e histerese. Para este tipo de imagem (baixa resolução e bom contraste), o método baseado em EDP geralmente possibilita a obtenção de bons resultados (bordas afinadas e bem localizadas). A figura 4(b) apresenta os resultados obtidos pelo detector de Canny com $\sigma = 1$. Estes resultados mostraram, além de bordas físicas, também muitas bordas associadas com ruído e textura da imagem.

A figura 4(c) mostra o resultado proveniente da aplicação do detector de Canny às regiões de borda

detectadas pelo detector via EDP. Nota-se que o resultado é praticamente idêntico ao obtido usando apenas o detector via EDP (figura 4(a)). Isso ocorreu devido a dois fatores principais, isto é, a baixa resolução e o bom contraste da imagem. Na figura 4(d) são apresentados os resultados sobrepostos na imagem original. É significativo destacar que os resultados obtidos mostraram predominantemente bordas físicas associadas com as rodovias principais, o que facilitaria a extração automática destes objetos.

A figura 5 apresenta os resultados obtidos com a segunda imagem teste.

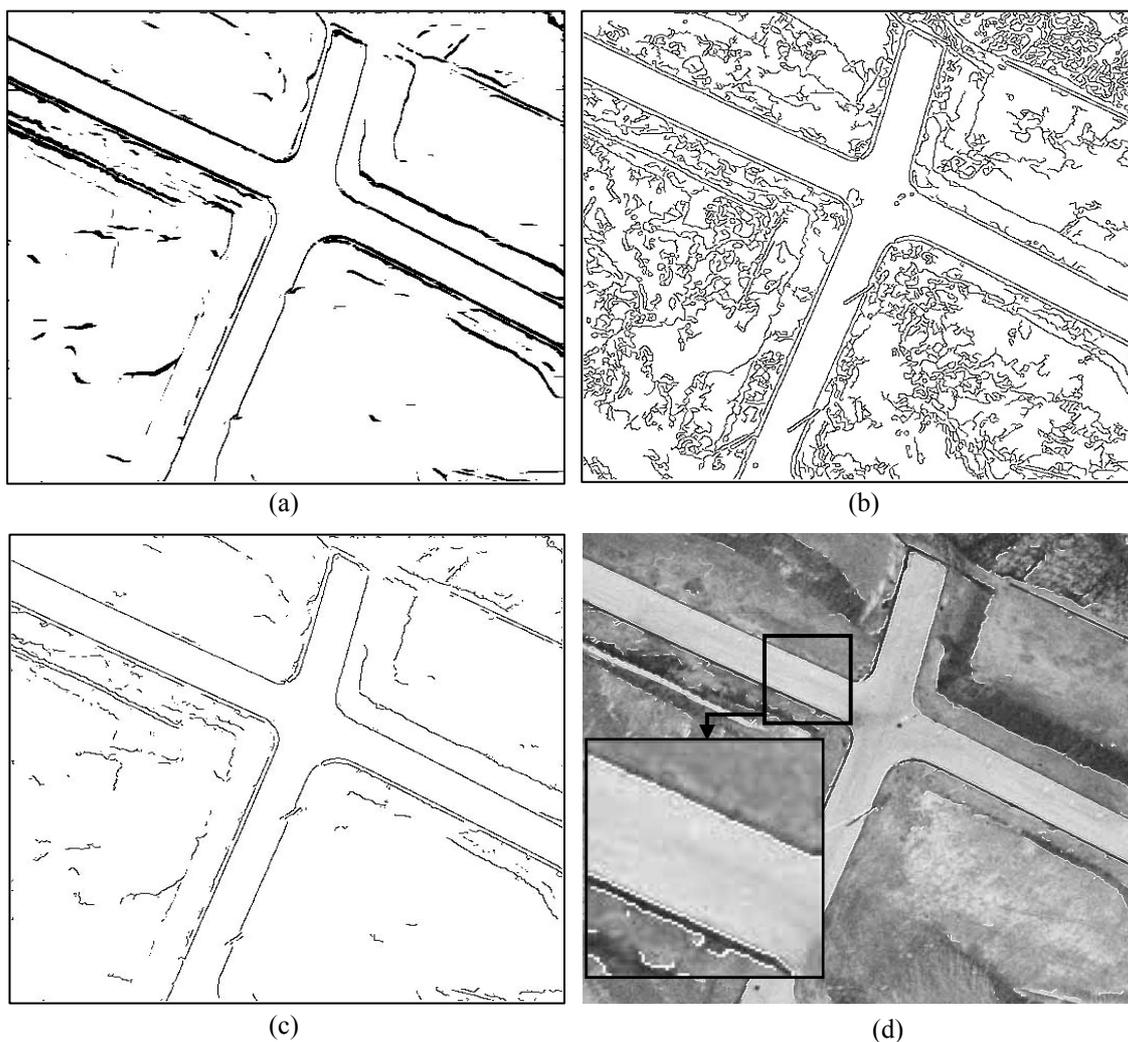


Fig. 5 – Exemplo de aplicação do detector de Canny com focalização prévia de bordas. (a) Bordas afinadas, detectadas via EDP no final do processo de difusão; (b) Bordas afinadas com alta precisão pelo detector de Canny com $\sigma = 1$; (c) Bordas detectadas a partir do método de Canny com focalização de regiões de bordas; (d) Imagem com bordas detectadas sobrepostas.

A figura 5(a) mostra que o detector de EDP com afinamento de bordas foi geralmente ineficiente na obtenção de bordas afinadas. Devido à alta resolução, haverá mais pixels ao longo das seções transversais das regiões de borda. Assim, o detector de EDP gera regiões ‘achatadas’ de bordas, impossibilitando o afinamento das bordas via supressão não máxima. Em outras palavras, o processo de difusão pode gerar, para o caso de imagens de alta resolução, regiões homogêneas correspondentes às próprias regiões de borda. A figura 5(b) mostra o resultado obtido usando somente o detector de Canny. Devido à alta resolução, é grande a quantidade de bordas espúrias resultante de ruído e detalhes de textura da imagem. A figura 5(c) apresenta os resultados obtidos com a metodologia proposta.

Observa-se que as bordas espúrias foram significativamente reduzidas, sendo que as que permaneceram foram adequadamente afinadas. A figura 5(d) mostra os resultados (figura 5(c))

sobrepostos na imagem original. Portanto, o detector de Canny com foca-

lização prévia de bordas usando EDP possibilitou uma melhoria significativa dos resultados que seriam obtidos isoladamente por Canny.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados os fundamentos teóricos, algorítmicos e a avaliação pertinente ao processo de detecção de bordas de Canny com focalização prévia de bordas. Foram detalhados os passos integrantes do processo, bem como, as implicações práticas destas etapas. Foram apresentados experimentos efetuados com imagens reais com diferentes características, dessa forma, as expectativas teóricas puderam ser verificadas na prática.

O processo de detecção de bordas de Canny com focalização prévia de bordas mostrou-se bastante robusto, visto que os parâmetros e limiares foram

mantidos fixos, independentemente da imagem utilizada. Esta é uma característica altamente desejável no contexto de método para a extração automática de feições, o que não era possível com a metodologia original de Canny. Em geral, a metodologia proposta possibilitou a obtenção de informações de contorno com alta qualidade, riqueza de detalhes e boa localização. Possibilitou também a obtenção de resultados com predominância de bordas físicas.

Como esperado, a metodologia mostrou-se bastante vantajosa quando a imagem de entrada for de alta resolução. Isso ocorre porque o detector de EDP geralmente produz regiões de borda com baixa curvatura ao longo de suas seções transversais, tornando ineficaz o processo de supressão não máxima. Em se tratando de imagens de baixa e média resolução, é esperada pouca vantagem da metodologia proposta. Pelas razões expostas, o uso do detector de Canny com focalização previa de bordas é geralmente mais apropriado para aplicações envolvendo processos automáticos ou semi-automáticos de extração de feições em imagens digitais.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES, pelo suporte, sob a forma de bolsa de Demanda Social CAPES, concedida aos doutorandos Edinéia Aparecida dos Santos Galvanin e Giovane Maia do Vale a partir de março de 2003. Este trabalho é também resultado de um projeto financiado pela FAPESP, na categoria de Auxílio à Pesquisa, coordenado pelo terceiro autor. Este artigo conta também com apoio do CNPQ, através de bolsa de produtividade em Pesquisa (PQ) do terceiro autor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARCELOS, C. A. Z.; BOAVENTURA, M.; SILVA Jr., E. C. Well-balanced flow equation for noise removal and edge detection, In: **IEEE Trans. Image Processing**, p. 751-763, 2002.
- BERGHOLM, F. Edge focusing. In: **IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.** Washington, D.C. PAMI, ed.9, v.6, p.726-741, 1987.
- CANNY, J. A Computational approach to edge detection. In: **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 8, n. 6, p. 679-698, 1986.
- DAL POZ, A. P.; VALE, G. M.; ZANIN, R. B. Automated road segment extraction by grouping road objects. In: **The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences**, Istanbul, Turquia, v. 34, p. 436-439, 2004.
- GALVANIN, E. A. S; SILVA, E. A. Utilização de um modelo de equação diferencial parcial no tratamento de imagens orbitais. In: XXI Congresso Brasileiro de Cartografia. Belo Horizonte, **Anais**, 2003.
- JAIN, R.; KASTURI, R; SCHUNCK, B. G. **Machine vision**. MIT Press and McGraw-Hill, Inc New York. 1995.
- MARR, D.; HILDRETH, E. **Theory of Edge Detection**. Proc. Roy. Soc, London Ser. B, 207, p. 187-217, 1980.
- NORDSTRÖM, K. N., Biased anisotropic diffusion: a unified regularization and diffusion approach to edge detection. In: **Image and Vision Computing**, p.318-327, 1990.
- PARKER, J. R. **Algorithms for image processing and computer vision**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997. 417p.
- PERONA, P.; MALIK, J., Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. In: **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 12,n. 7, p.629-639, 1990.
- SANTOS, E. A. **Utilização de equações diferenciais parciais no tratamento de imagens orbitais**. 2002. 108 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2002.
- SHEN, J.; CASTAN, S. An optimal linear operator for step edge detection. In: **Graphical models and image processing**, v. 54, n. 2, 1992.
- TEIXEIRA, R., **Introdução aos espaços de escala**, 23º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- VALE, G. M.; DAL POZ, A. P. O Processo de Detecção de Bordas de Canny: Fundamentos, Algoritmos e Avaliação Experimental. In: Simpósio Brasileiro de Geomática, 2002, Presidente Prudente. **Anais do Simpósio Brasileiro de Geomática - Anais em CDROM**, p. 292-303, 2002b.
- VALE, G. M.; DAL POZ, A. P. Processo de detecção de bordas de Canny. In: **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, v.8, n.2, p. 67-78, 2002a.

Recebido em 15 de setembro de 2004 – Aceito em 30 de dezembro de 2004.