

Análise do comportamento dinâmico de um cabo de ponte estaiada com amortecimento intrínseco
Analysis of dynamic behavior of a cable-stayed bridge cable with intrinsic damping

Thiago César Martins¹
Lauren Karoline de Sousa Gonçalves²
Gregório Sandro Vieira²

Resumo

O desenvolvimento computacional no âmbito do cálculo estrutural tem possibilitado análises mais refinadas e, conseqüentemente, estruturas mais esbeltas. Esse avanço trouxe novas reflexões acerca dos parâmetros críticos de dimensionamento, onde a análise das solicitações dinâmicas passou a ter grande importância na qualidade das estruturas e no seu desempenho. As pontes estaiadas possuem, em seus estais, a característica de serem muito sensíveis às vibrações, requerendo quase sempre o uso de amortecedores para controle dinâmico. Este estudo apresenta a diferença entre o comportamento de um cabo sujeito a vibrações sem amortecimento e com amortecimento intrínseco, onde se mostrou que há um aumento da eficiência deste amortecimento conforme a frequência também aumenta.

Palavras-chave: ponte estaiada, amortecimento interno, cabos, análise dinâmica.

Abstract

Computational power for structural analysis has enabled more refined results and consequently more slender structures. This advance has brought a new reflection about the critical design parameters, wherever the dynamic analysis have become of major importance in quality and performance of the structures. The stays of cable-stayed bridges are very sensitive to vibrations, and it requires almost always dampers for dynamic control. This study presents the difference between the behavior of a cable subjected to vibrations without damping and with intrinsic damping, wherever it showed an increase in the damping efficiency according to raise the frequency.

Keywords: cable-stayed bridge; internal damping; cables; dynamic analysis.

¹ Pós-graduando em Engenharia de Civil, Universidade Federal de Uberlândia, thiagomartins@ufu.br.

² Professores da Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, laurenkaroline@ufu.br; gregorio.vieira@ufu.br.

INTRODUÇÃO

As pontes estaiadas são compostas por tabuleiros suspensos por cabos que são apoiados em torres e, em geral, ancorados em pilares; amplamente utilizadas em diversos comprimentos de vãos. Quando comparadas às pontes suspensas, possuem maior versatilidade estética e maior rigidez (GIMSING; GEORGAKIS, 1983), tornando esse modelo estrutural largamente aceito pelos projetistas. Os materiais empregados em sua construção variam conforme a distância do vão a ser vencida, seguindo sempre parâmetros econômicos (SVENSSON, 2012).

Apesar dos benefícios, essas estruturas são expostas às intempéries em toda sua extensão, sendo solicitadas dinamicamente e estaticamente. Haja vista que sua esbelteza é elevada, os efeitos dos carregamentos são potencializados, provocando grandes deflexões e vibrações na estrutura. Estes fenômenos requerem grande atenção por parte dos calculistas, já que têm influência direta na segurança, usabilidade e vida útil da estrutura.

O amortecimento de vibrações em cabos de pontes estaiadas é objeto constante de pesquisas, sempre em busca de métodos e sistemas mais eficientes (GAO et al., 2021; LIN et al., 2020; JAVANBAKHT; CHENG; GHRIB, 2020). Além de provocarem desconforto aos usuários e prejudicarem a segurança, as vibrações diminuem consideravelmente a vida útil da estrutura, aumentando a incidência de falha por fadiga.

As configurações mais comuns do arranjo dos cabos consistem em três sistemas: leque (Figura 1a), harpa (Figura 1b) e intermediário (Figura 1c).

No controle de vibrações, podem-se destacar três principais mecanismos de amortecimento, sendo eles (DE SILVA, 2007): amortecimento interno (histerético), estrutural (atrito seco) e viscoso. Este trabalho tem como objetivo analisar o amortecimento interno, condicionado às propriedades constituintes do material do cabo.

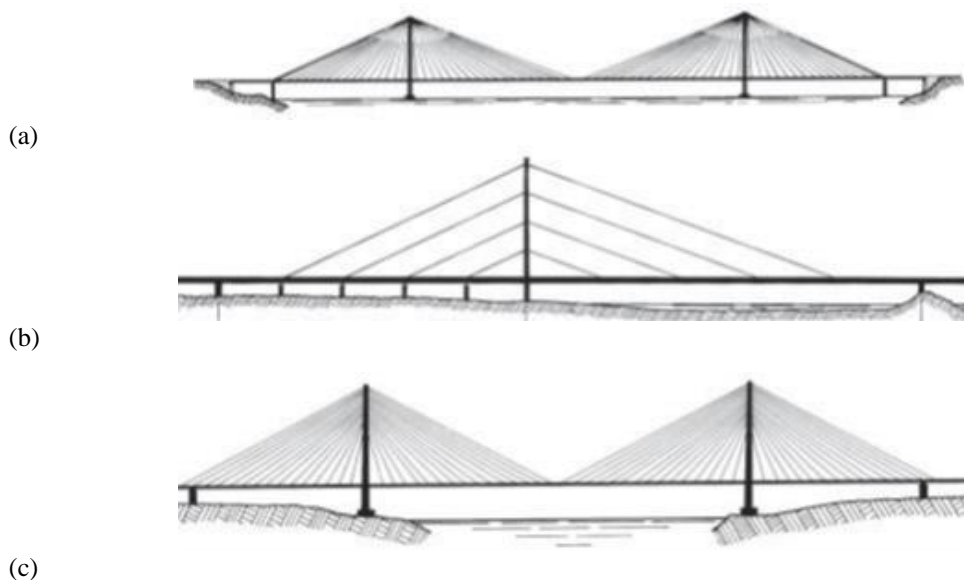


Figura 1 – Arranjo dos cabos de pontes estaiadas: a) leque; b) harpa; c) intermediário

Fonte: Svensson (2012)

FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS PARA CABO

O método dos elementos finitos consiste em discretizar uma estrutura em diversos elementos que são conectados entre si através de nós. Conhecido o comportamento de cada elemento, é possível conhecer o comportamento global da estrutura. Para cada elemento são atribuídos os parâmetros físicos, quantidade de nós e seus graus de liberdade. Como o objetivo

é a análise dinâmica, é necessário formular a matriz de massa [M], a matriz de rigidez [K] e a matriz de amortecimento [C] para cada elemento.

A princípio, foram escolhidos os parâmetros físicos do cabo, como sua geometria e as características do seu material. Utilizando como exemplo os dados (Tabela 1) de um cabo da ponte Sutong Yangtze River Bridge, na China, tem-se (GAO *et al.*, 2021):

Tabela 1 – Propriedades do cabo

Item	Valor
Comprimento do cabo	253,34 m
Massa por unidade de comprimento	62,09 kg/m
Módulo de Elasticidade	1,9972e11 N/m ²
Diâmetro	0,127 m
Ângulo de inclinação	43,1°
Tensão	4227 kN

Fonte: GAO *et al.* (2021)

O módulo de elasticidade (Tabela 1) deve ser ajustado devido à curvatura do cabo. Esta adaptação se dá pela fórmula de Ernst (XU, 2013):

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{(wgL_h)^2 AE}{12T^3}} \quad (1)$$

Onde E_{eq} é o módulo de elasticidade equivalente, w é a massa por unidade de comprimento, g é o valor da gravidade, L_h é o comprimento da projeção horizontal do cabo, A é a área transversal, T é a força de tração no cabo e E é o módulo de elasticidade.

A partir dos dados supracitados, foi iniciada a discretização do cabo para posterior análise pelo método dos elementos finitos através do programa MATLAB, onde serão utilizados elementos de barra com seis graus de liberdade (GDLs). Os GDLs são os deslocamentos nas direções ($u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$), ilustrados na Figura 2.

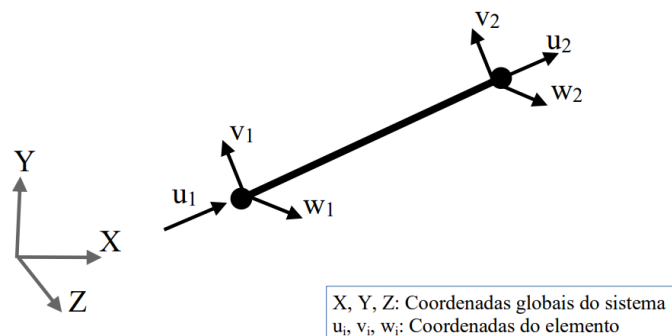


Figura 2 – Elemento de barra com seis graus de liberdade

Matriz de massa elementar

Para o desenvolvimento da matriz de massa, foi utilizado o método denominado “lumped”, que consiste em concentrar a massa nos nós, com distribuição igualitária para ambos (RAO, 2017). O tamanho da matriz de massa se dá pelo número de graus de liberdade do elemento. Como o elemento escolhido tem 6 graus de liberdade, a matriz tem 6 linhas e 6 colunas:

$$[m_e] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Onde ρ é a massa específica do elemento, A é sua área transversal e L é o seu comprimento.

Matriz de rigidez elementar

Na formulação da matriz elementar deve ser considerada a matriz de rigidez elástica somada à matriz de rigidez de tensão (COOK et al., 2007). Isto se dá porque a tensão aplicada tende a linearizar o cabo. Esta alteração geométrica deve ser levada em consideração, tanto que a matriz de rigidez de tensão também é conhecida como matriz de rigidez geométrica.

$$[K_{el}] = E_{eq}A/L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[K_{\sigma}] = T/L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Onde E_{eq} é o módulo de elasticidade corrigido, A é a área transversal do cabo, T é a força de tração e L é o comprimento do elemento.

Como $E_{eq}A$ é muito maior que T , podemos desconsiderar a tração nos pontos que coincidem com a matriz de rigidez elástica:

$$[K_{\sigma}] = T/L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Para a obtenção da matriz de rigidez elementar, realiza-se a soma de (3) com (5):

$$[K_e] = [K_{el}] + [K_\sigma] \quad (6)$$

$$[K_e] = E_{eq}A/L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + T/L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[K_e] = 1/L \begin{bmatrix} E_{eq}A & 0 & 0 & -E_{eq}A & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 & -T & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 & 0 & -T \\ -E_{eq}A & 0 & 0 & E_{eq}A & 0 & 0 \\ 0 & -T & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & -T & 0 & 0 & T \end{bmatrix} \quad (8)$$

Análise Modal

Para encontrar os modos de vibração e suas respectivas frequências naturais, é utilizada a equação do movimento do sistema, como segue:

$$[M]\ddot{x}(t) + [K]x(t) = 0 \quad (9)$$

A Eq. (2) admite uma solução do tipo:

$$x(t) = X e^{i\omega t} \quad (10)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X e^{i\omega t} \quad (11)$$

Onde X é a amplitude e ω é a frequência angular natural. Substituindo as Eqs. (10) e (11) em (9):

$$-[M]\omega^2 X e^{i\omega t} + [K]X e^{i\omega t} = 0 \quad (12)$$

$$([K] - \omega^2[M])X e^{i\omega t} = 0 \quad (13)$$

$$([K] - \omega^2[M])X = 0 \quad (14)$$

Observando a Eq. (14), nota-se que se trata de um problema de autovalor e autovetor. O autovalor " λ " resulta em uma matriz diagonal, onde seus valores são equivalentes ao quadrado das frequências angulares naturais do sistema. Já o autovetor " Φ ", resulta em uma matriz quadrada onde cada coluna desta matriz representa a configuração modal da estrutura. Ambas as matrizes possuem ordem igual ao número de graus de liberdade do sistema (n):

$$\lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Matriz de amortecimento

Para a determinação da matriz de amortecimento, foi utilizado o método de Rayleigh, que considera o amortecimento C proporcional à massa e à rigidez (CHOPRA, 2007):

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (16)$$

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1\omega_n}{2} \quad (18)$$

Sendo ζ o fator de amortecimento que, para os cabos de ponte estaiada, é aproximadamente 0,13% (CAETANO, 2007). A matriz de amortecimento necessita de um par de frequências naturais para poder ser calculada, resultando no sistema:

$$\begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Para $\zeta_i = \zeta_j$ ocorre a simplificação:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\zeta}{\omega_i + \omega_j} \begin{Bmatrix} \omega_i\omega_j \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Por fim, aplicando a Eq. (20) na (17), é montada a matriz clássica de amortecimento proporcional proposta por Rayleigh.

Função resposta em frequência

A função resposta em frequência (chamada a partir de agora por FRF) visa determinar a variação de uma grandeza – ou de uma relação de grandezas – no domínio da frequência. Através desta FRF pode-se observar a variação de X/F de um cabo sem amortecimento (Eq. 22) e o mesmo cabo com o amortecimento intrínseco (Eq. 24).

De modo semelhante ao que foi feito na análise modal, a mesma resposta admissível será usada e, à equação do movimento, será acrescida uma força de excitação como segue:

$$([K] - \omega^2[M])X = F \quad (21)$$

$$X/F = ([K] - \omega^2[M])^{-1} \quad (22)$$

$$([K] + i\omega[C] - \omega^2[M])X = F \quad (23)$$

$$([K] + i\omega[C] - \omega^2[M])X = F \quad (24)$$

$$X/F = ([K] + i\omega[C] - \omega^2[M])^{-1}$$

Teoria das Cordas Vibrantes

Essa teoria permite calcular as frequências naturais e os modos de vibrar de uma corda flexível, fixa em suas extremidades e submetida a uma força de tração. A velocidade de propagação da onda, representada pela letra c , é independente da frequência, com T sendo a força de tração no cabo e m sendo a massa por unidade de comprimento:

$$c = \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (25)$$

O quociente da velocidade de propagação da onda com o comprimento da onda l é igual à frequência natural da corda para cada n modo de vibrar (THOMSON, 1973):

$$l = 2L/n \quad (26)$$

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (27)$$

Onde f_n é a frequência natural, n é o número da frequência natural a ser calculada e L é o comprimento do cabo.

Para validar o programa feito no MATLAB, foi realizada a comparação das cinco primeiras frequências naturais obtidas por ele com as resultantes da teoria das cordas vibrantes.

APLICAÇÃO NUMÉRICA

Primeiro estudo: convergência de malha

Para minimizar a influência da discretização em elementos finitos e garantir a confiabilidade dos resultados, deve-se realizar a análise da malha, isto é, observar o número mínimo de elementos necessários para que o valor requerido convirja para um resultado estável. O resultado dos picos de ressonância na resposta em frequência está condicionado à qualidade da malha, assim como a análise modal. Portanto, deve-se analisar até qual ponto de ressonância a análise precisará ter maior precisão. No presente estudo foi analisado até o quinto pico de ressonância da FRF com boa precisão, ou quinto modo de vibrar da estrutura, como exposto na Figura 3.

Diante dos resultados, optou-se pela escolha de cem elementos para a discretização, já que, a partir disso, a alteração da frequência diminui sensivelmente. Assim, é possível obter uma boa aproximação sem um alto custo computacional.

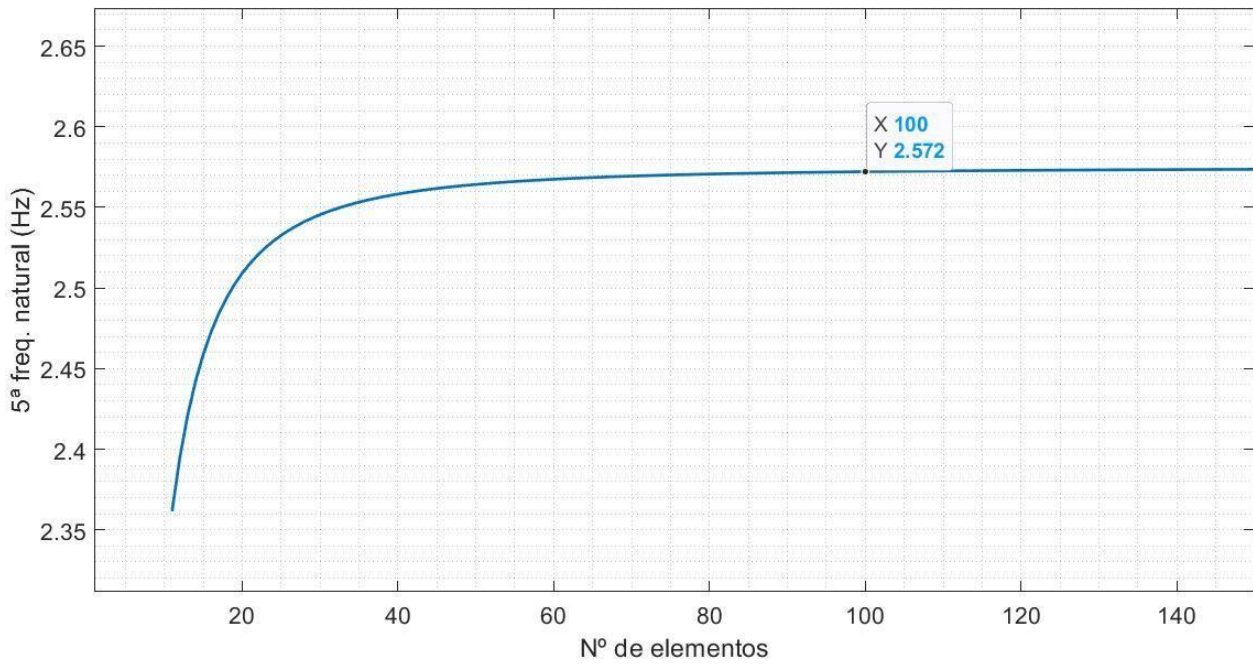


Figura 3 – Análise de convergência de malha

Segundo estudo: análise modal

Após o desenvolvimento das Eqs. (15) e (16), os resultados encontrados para os cinco primeiros modos de vibração, consequentes das cinco primeiras frequências naturais, estão expostos na Figura 4.

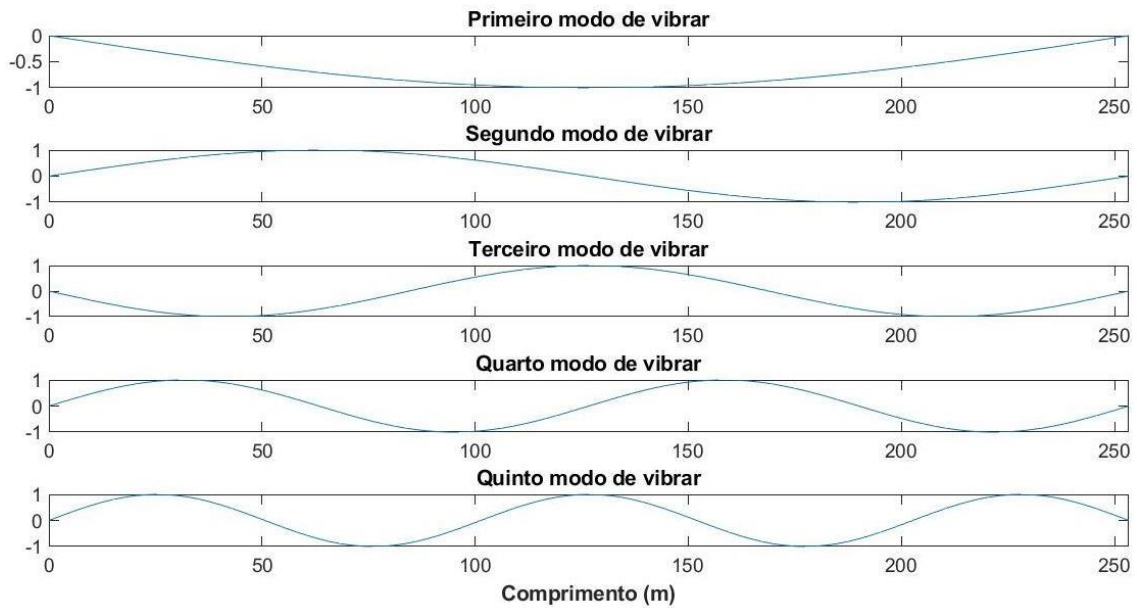


Figura 4 – Modos de vibrar

Terceiro estudo: validação do programa com a teoria das cordas vibrantes

Na validação do programa computacional, os valores obtidos via MEF são aproximadamente iguais aos valores dados pela teoria das cordas vibrantes (Tabela 2). Portanto, o programa utilizado apresenta uma aproximação satisfatória.

Tabela 2 – Comparação dos resultados via MEF e da teoria das cordas vibrantes

	MEF (Hz)	CORDAS VIBRANTES (Hz)
f_1	0,5149	0,5149
f_2	1,0297	1,0298
f_3	1,5443	1,5447
f_4	2,0585	2,0596
f_5	2,5721	2,5745

Quarto estudo: função resposta em frequência

Este estudo consiste em resolver as Eqs. (22) e (24), sendo possível obter as amplitudes da FRF para o sistema sem amortecimento e com amortecimento intrínseco. A faixa de frequências utilizada varia de 0 a 3 Hertz. As amplitudes da FRF obtidas para as cinco primeiras frequências naturais estão apresentadas na Figura 5.

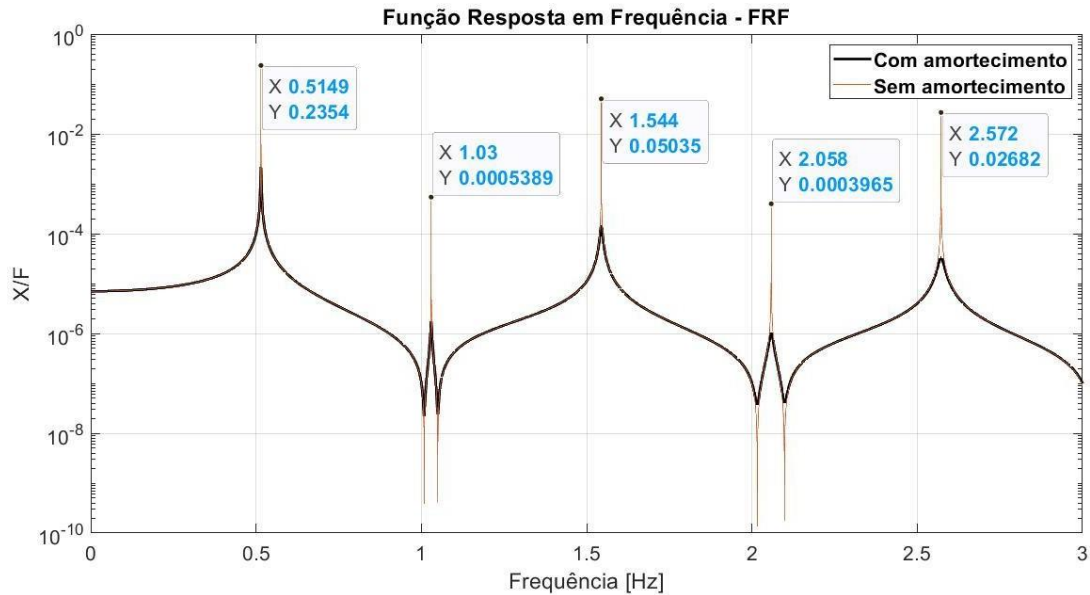


Figura 5 – FRF com e sem amortecimento

As Figuras 6 e 7 apresentam a função resposta em frequência do cabo com e sem amortecimento, com destaque para a primeira e quinta frequência, respectivamente.

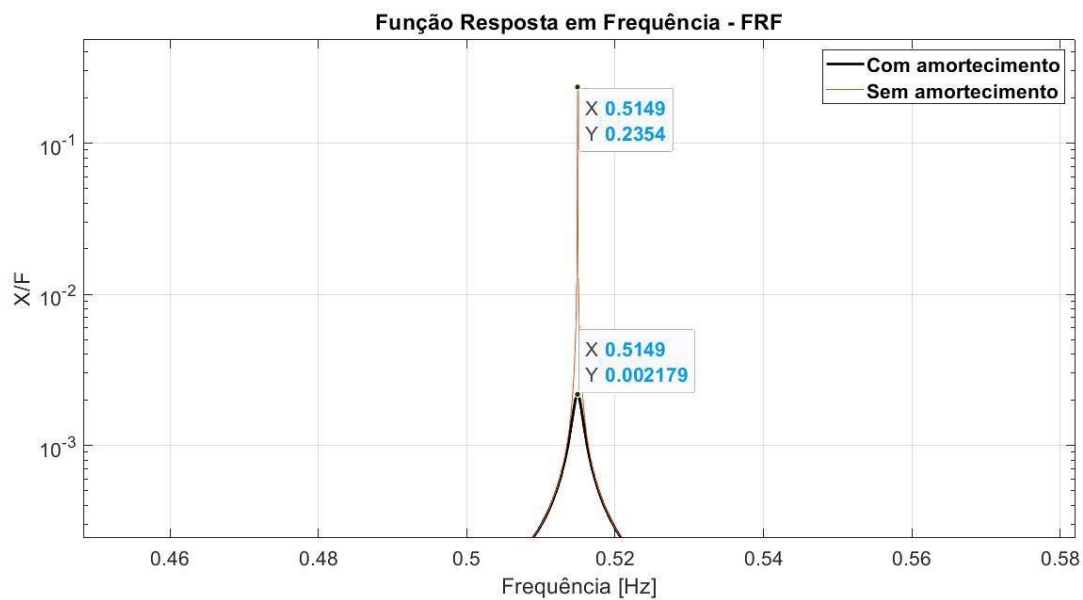


Figura 6 – FRF com e sem amortecimento com destaque para a primeira frequência

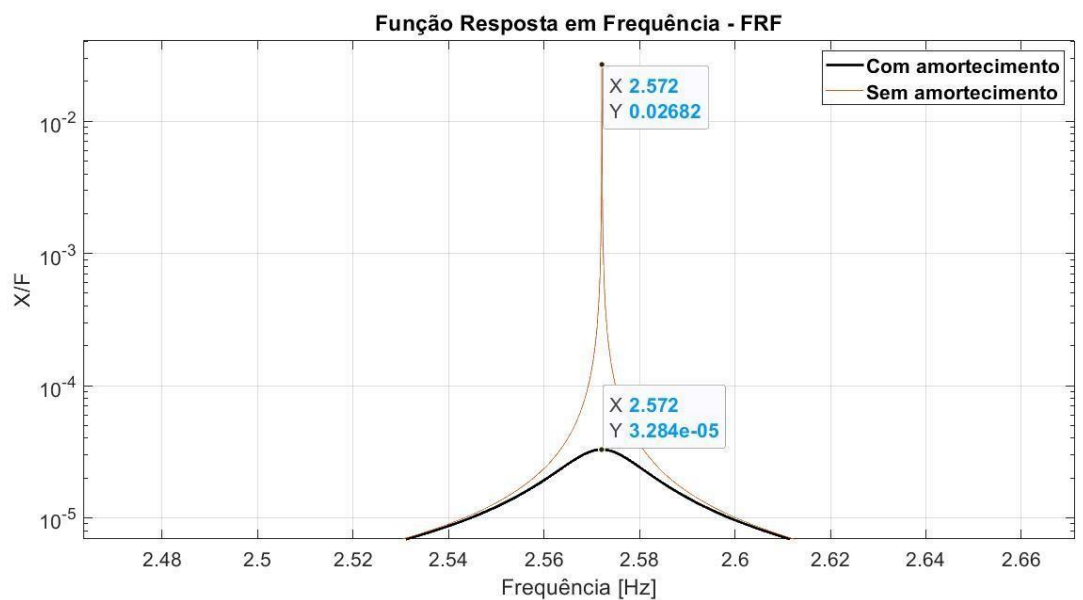


Figura 7 – FRF com e sem amortecimento com destaque para a quinta frequência

É possível observar, na Figura 5, a atenuação nos picos da FRF do sistema com e sem amortecimento. Ao analisar o primeiro modo de vibrar, observa-se uma amplitude da FRF sem amortecimento 108 vezes maior do que a amplitude com amortecimento. Já no quinto modo de vibrar, nota-se que a amplitude da FRF sem amortecimento é aproximadamente 816 vezes maior do que a amplitude calculada com amortecimento. Isto indica que há um aumento da eficiência do amortecimento conforme a frequência também aumenta.

CONCLUSÃO

Os resultados obtidos mostraram o comportamento do amortecimento intrínseco da estrutura, porém deve-se atentar ao fato de que, mesmo tendo atenuado os picos de amplitude, em muitos casos este amortecimento sozinho é insuficiente. A grande flexibilidade dos cabos adicionada ao baixo amortecimento inerente torna-os demasiadamente suscetíveis às vibrações, podendo causar falha precoce dos materiais e conexões (ZHOU; NIELSEN; QU, 2006). Portanto, quando cabível, deve ser acrescentado um amortecedor externo que assegure uma atenuação maior à amplitude, principalmente nas frequências mais baixas, onde o amortecimento interno apresentou menor eficiência.

REFERÊNCIAS

- CHOPRA, A. K. Dynamics of structures. Pearson Education India, 2007.
- COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M. Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons, 2007.
- DE SÁ CAETANO, E. Cable vibrations in cable-stayed bridges. IABSE, 2007.
- DE SILVA, C. W. (Ed.). Vibration damping, control, and design. CRC Press, 2007.
- GAO, H.; WANG, H.; LI, J.; WANG, Z.; LIANG, R.; XU, Z.; NI, Y. Optimum design of viscous inerter damper targeting multi-mode vibration mitigation of stay cables. Engineering Structures, v. 226, p. 111375, 2021.
- GIMSING, N.; GEORGAKIS, C. Cable supported bridges. Chichester: John Wiley & Sons, 2012. JAVANBAKHT, M.; CHENG, S.; GHRIB, F. Multimode vibration control of stay cables using optimized negative stiffness damper. Structural Control and Health Monitoring, v. 27, n. 4, p. e2503, 2020.
- LIN, K.; ZHOU, A.; LIU, H.; LIU, Y.; HUANG, C. Shear thickening fluid damper and its application to vibration mitigation of stay cable. In: Structures. Elsevier, 2020. p. 214-223.
- RAO, S. The finite element method in engineering. Butterworth-heinemann, 2017.
- SVENSSON, H. Cable-stayed bridges: 40 years of experience worldwide. John Wiley & Sons, 2012.
- THOMSON, W. Teoria da Vibração, com aplicações. Ed. Interciência, 1973. XU, Y. Wind effects on cable-supported bridges. John Wiley & Sons, 2013.
- ZHOU, Q.; NIELSEN, S.; QU, W. Semi-active control of three-dimensional vibrations of an inclined sag cable with magnetorheological dampers. Journal of sound and vibration, v. 296, n. 1-2, p. 1-22, 2006.