

## Geração de ábacos para dimensionamento de pilares de concreto armado com seção circular

## Generation of abacuses for design of reinforced concrete column of circular section

Tereza Catrina Ferreira Fernandes<sup>1</sup>

Rodrigo Barros<sup>2\*</sup>

Joel Araújo do Nascimento Neto<sup>3</sup>

José Neres da Silva Filho<sup>4</sup>

Recebido: jul.2020 | Aceito: nov.2020

### Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a metodologia para a geração de ábacos adimensionais para o dimensionamento de pilares de seção circular de concreto armado projetados com concretos convencionais e de alta resistência. A utilização de ábacos adimensionais é uma das alternativas utilizadas para apresentar o dimensionamento de pilares de concreto armado. Todavia, na literatura atual, existe uma escassez dessa ferramenta para os pilares com seções circulares. O trabalho expõe duas metodologias de geração de ábacos baseado na norma ABNT NBR 6118:2014. A primeira metodologia utiliza um processo de integração para encontrar os esforços resistentes pelo concreto, enquanto a segunda, por sua vez, realiza uma discretização na seção transversal com o objetivo de encontrar esses esforços. Com auxílio do aplicativo Microsoft Excel é gerada uma planilha para possibilitar a criação dessa ferramenta. Apresenta-se ainda a solução de alguns exemplos para ilustrar o uso e eficiência dessa ferramenta.

**Palavras-chave:** Pilares, Concreto armado, Ábacos adimensionais, Dimensionamento, Seção circular.

### Abstract

This research program investigates the methodology for the generation of dimensionless abacuses for the design of circular section columns made with conventional and high strength concrete. The use of dimensionless abacus is one of the alternatives for the design of reinforced concrete columns, however, in the current literature, there is a shortage of these abacuses for the columns with circular sections. The paper presents two abacus generation methodologies based on the ABNT NBR 6118: 2014 standard, the first of which uses an integration process to find concrete stresses. The second, in turn, performs a discretization in the cross-section in order to find these efforts. With the help of the Microsoft Excel Program, a spreadsheet is generated to allow the creation of this tool and some examples are solved to exemplify its use and efficiency

**Keywords:** Columns; Concrete, Dimensionless abacus, Design, Circular section.

## **INTRODUÇÃO**

O dimensionamento de pilares é uma importante atividade do cálculo estrutural, uma vez que a ruína desse elemento pode alterar significativamente o funcionamento do sistema estrutural para o qual a estrutura foi projetada. Desse modo, é importante garantir que os esforços resistentes de cálculo sejam superiores aos esforços solicitantes.

Para o dimensionamento dos pilares podem ser utilizados programas computacionais ou mesmo ábacos adimensionais. Esses ábacos são diagramas em duas ou três dimensões, a depender da solicitação empregada na questão, que permitem que um usuário, ao conhecer os esforços solicitantes como a força normal reduzida ( $v$ ) e o momento fletor reduzido ( $\mu$ ), encontre uma taxa mecânica de armadura ( $\omega$ ) suficiente para resistir às solicitações. Dessa forma, os ábacos são formados por diferentes curvas de nível, sendo cada curva um conjunto de pontos correspondentes a uma mesma taxa mecânica de armadura, onde cada um desses pontos, por sua vez, representa um par de esforços resistentes para a seção.

De acordo com a ABNT NBR 8953:2015 – Concretos para fins estruturais – Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência, os concretos estruturais utilizados nos pilares de concreto armado podem pertencer ao grupo I, quando variam a classe de resistência à compressão ( $f_{ck}$ ) de 20 MPa à 50 MPa ou pertencer ao grupo II, com variando de 55MPa à 90MPa, estes últimos são conhecidos como Concretos de Alta Resistência (CAR).

Devido ao surgimento de projetos arquitetônicos mais ousados, os concretos com resistência elevada se mostram importantes para viabilizar construções com vãos maiores, elementos mais esbeltos e consequentemente estruturas mais leves.

Dentre os formatos de seção transversal utilizados em pilares, estão as seções circulares, as quais estão presentes em diversas estruturas como Obras de Arte Especiais (OAE), as estacas para fundações e as bases de reservatórios elevados. O procedimento para dimensionar pilares com essas seções também pode ser realizado com o uso de ábacos adimensionais, porém, no acervo técnico atual, não há uma boa disponibilidade dessa ferramenta para esse tipo de seção, a citar o material proposto por Montoya (2000). Os ábacos gerados por Montoya (2000) apresentam envoltórias de momentos resistentes para diversas seções, arranjos e taxas de armadura. Esses ábacos são utilizados com frequência para o dimensionamento manual de pilares, no qual o usuário seleciona uma seção e o arranjo da armadura e busca uma taxa de armadura cuja envoltória resistente cubra os esforços solicitantes.

## **OBJETIVO**

O objetivo principal deste trabalho é apresentar duas metodologias para a geração de ábacos adimensionais para o dimensionamento de pilares com seção circular projetados em concretos convencionais e de alta resistência, com o objetivo de ampliar o acervo técnico desse material e criar uma nova ferramenta para o dimensionamento desses elementos estruturais. A primeira metodologia é baseada na proposta de Santos (1994) e utilizada na geração de ábacos para concretos do grupo I. A segunda metodologia é descrita em Sias (2014) consiste em subdividir a seção transversal circular em regiões discretas, efetuando um somatório dessas regiões, sendo útil para elaboração dos ábacos dos concretos do grupo II.

## **PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS**

O método de cálculo utilizado neste trabalho para as estruturas de concreto armado garante a segurança fazendo com que as solicitações correspondentes às cargas majoradas sejam menores do que as solicitações últimas, as quais levariam a estrutura à ruptura, em um chamado Estado-Limite Último (ELU) (CARVALHO E FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Torrico (2010) afirma ainda que alguns fatores dificultam a compreensão do comportamento do concreto, como a diferença de resistência à compressão e à tração, a não linearidade física, na qual a relação entre as tensões aplicadas no material e as deformações obtidas se dá conforme um diagrama parábola-retângulo, a presença de fissuras e fenômenos reológicos como retração e fluência.

A principal característica do concreto é a sua resistência à compressão, determinada por ensaios em corpos de prova submetidos à compressão centrada (CARVALHO E FIGUEIREDO FILHO, 2015). Costa et al (2017) afirmam que essa resistência característica é obtida aos 28 dias, quando o material atinge entre 60% e 90% da sua resistência total. Em décadas passadas, os projetistas estavam satisfeitos em projetar estruturas de concreto armado com resistências à compressão reduzidas, as quais satisfaziam as necessidades da época (Aïtcin, apud Rohden et al, 2016). Entretanto, com o avanço do conhecimento na técnica e no cálculo estrutural, estruturas mais ousadas foram surgindo, sendo então solicitadas por esforços maiores. Dessa maneira, foi necessário elevar a resistência à compressão do concreto, de modo a compatibilizá-la com as solicitações atuantes (BACCIN, 1998).

Para o concreto, o processo se torna mais complexo pois, conforme Carvalho e Pinheiro (2009), quando a peça se aproxima do Estado Limite Último (ELU), no qual são dimensionadas as estruturas de concreto armado, a distribuição de tensões nesse material ocorre segundo um diagrama parábola-retângulo. A expressão que representa a relação entre a tensão e a deformação no concreto exposta na Figura 1 e pela Equação 1.

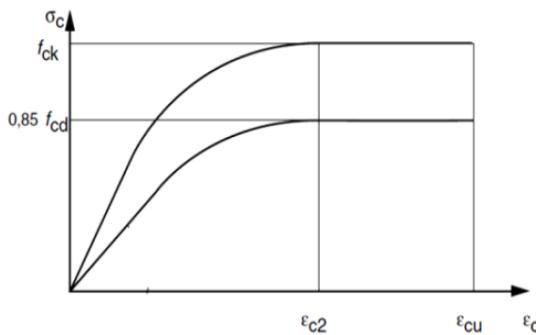


Figura 1 - Relação tensão-deformação para o concreto (ABNT NBR 6118:2014)

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_{c2}} \right)^n \right] \quad (1)$$

Em que:

$\sigma_c$  é a tensão no concreto (MPa);

$\dot{\varepsilon}_{c2}$  é a deformação específica do concreto no início do patamar plástico (%);

$\dot{\varepsilon}'_c$  é a deformação específica em uma fibra genérica do concreto (%);

$f_{cd}$  é resistência de cálculo à compressão do concreto (MPa);

$n$  = índice utilizado na equação tensão-deformação do concreto (adimensional). Obtido a partir da Equação 2.

$$n = 1,4 + 23,4 \cdot \left( \frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 \quad (2)$$

Dentre os dados a serem fornecidos para a geração dos ábacos está o arranjo da armadura, o qual é indispensável para qualquer cálculo de flexão simples ou composta (SANTOS, 1994). Para lajes, vigas e outros elementos estruturais, a distribuição dessa armadura é mais econômica quando disposta em duas bordas. Entretanto, o mesmo não ocorre para os pilares, onde é conveniente distribuí-la em todo o perímetro da seção (SANTOS, 1994).

Para o aço, conforme Bendô (2011), o cálculo da resistência da armadura torna-se mais simples. Isso ocorre porque o diagrama tensão-deformação do aço é bilinear, de acordo com Santos (1994). Enquanto a deformação da barra for menor do que a deformação de escoamento do aço, a tensão em cada barra na seção do transversal é dada pela multiplicação entre o módulo de elasticidade e sua deformação. Uma vez ultrapassado esse limite, a tensão permanece constante e igual à resistência de escoamento do aço.

O modelo de cálculo adotado neste trabalho é o dos estados limites. Logo, para que uma seção transversal atinja a ruína, para qualquer tipo de flexão no estado limite último, é preciso que as deformações específicas do aço ou do concreto (ou de ambos) atinjam os valores máximos de deformação específica desses materiais. Carvalho e Figueiredo Filho (2015) afirmam que os domínios de deformação, então, representam as diversas possibilidades de ruína da seção, a cada par de deformação específica de cálculo  $\varepsilon_c$  (concreto) e  $\varepsilon_s$  (aço), a seção é capaz de resistir a um par de esforço normal e momento fletor.

Com o estudo dos domínios de deformação, é possível perceber que apesar de existirem 6 domínios (1, 2, 3, 4, 4a e 5), as retas de ruptura sempre giram em torno de três pontos (A, B e C). Esses pontos são chamados de polos de ruína, os quais definem três regiões de deformação apresentadas na Figura 2, as quais englobam os seis domínios (SANTOS, 1994).

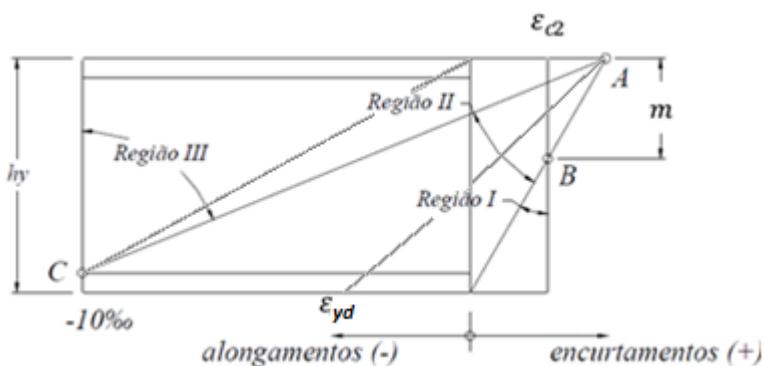


Figura 2 - Regiões de deformação (Adaptada de Bendô, 2011)

Em seguida, é necessário estudar como ocorrem as deformações em cada uma dessas regiões, estabelecendo equações de compatibilidade sempre em função da linha neutra. Conforme Smaniotti (2005) essas equações fornecem a deformação  $\varepsilon'$  de uma fibra genérica ou de uma barra de aço a uma distância  $\beta_i$  da borda mais comprimida. Desse modo, através de relações trigonométricas na seção, é possível determinar as Equações 3, 4 e 5 para as Regiões I, II e III, respectivamente.

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{\varepsilon_{c2} \cdot (\beta_x - \beta_i)}{\beta_x - \frac{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2})}{\varepsilon_{cu}}} \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (\beta_x - \beta_i)}{\beta_x} \quad (4)$$

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{10 \cdot (\beta_x - \beta_i)}{1 - \delta - \beta_x} \quad (5)$$

Em que:

$\varepsilon_{c2}$  é a deformação específica do concreto no início do patamar plástico (%);

$\varepsilon_{cu}$  é a deformação específica última do concreto na ruptura (%);

$\dot{\varepsilon}_c$  é a deformação de uma fibra genérica de encurtamento do concreto (%);

$\beta_x$  é a posição da linha neutra em valor reduzido (adimensional);

$\beta_i$  é a posição da fibra genérica em relação ao topo em valor reduzido (adimensional);

$\delta$  é a relação entre o cobrimento e o diâmetro da seção (adimensional).

## METODOLOGIA

A metodologia para geração dos ábacos envolve um estudo dos materiais que compõem a seção transversal do pilar, o concreto e o aço. O ábaco é formado por diversos pares de esforços resistentes (força normal e momento fletor) encontrados a partir do estudo da relação entre as tensões e deformações desses materiais. Ou seja, tanto para o aço como para o concreto existirá uma força normal e um momento fletor resistente, e, ao somar as parcelas dos esforços de ambos materiais, resultará no par de esforços resistentes da seção, útil para a construção do ábaco. São abordadas duas metodologias no desenvolvimento desse trabalho. A primeira é apresentada por Santos (1994) e útil para os pilares de seção circular projetados com os concretos do grupo I, ou seja, aqueles que conforme ANBT NBR 6118:2014 possuem a resistência à compressão  $f_{ck}$  menor ou igual a 50 MPa. Essa metodologia se caracteriza principalmente por fazer o uso de integração para descobrir os esforços resistentes no concreto e trabalhar com coordenadas polares.

A segunda metodologia é proposta por Sias (2014) e se caracteriza por descobrir os esforços resistentes pelo concreto através da discretização da seção circular em elementos suficientemente pequenos, nos quais não ocorre uma variação de tensão. Ou seja, são utilizados somatórios ao invés de realizar a integração direta. Essa metodologia se mostra fundamental porque permite ampliar a construção dos ábacos para pilares de seção circular projetados com concretos do grupo II, ou seja, aqueles que possuem a resistência à compressão  $f_{ck}$  maior que 50 MPa, uma vez que o procedimento utilizando integração se torna mais complexo, em virtude do expoente  $n$  da equação 1 resultar em um valor decimal, conforme pode ser observado pela equação 2. Tal consideração requer o auxílio de procedimentos numéricos para resolução da integral, uma vez que a solução analítica não é trivial. Maiores informações podem ser encontradas em Sias & Alves (2016).

## Ábacos por integração

### Esforços resistentes no aço

Faz-se necessário encontrar a distância vertical de cada barra em relação ao topo comprimido da seção transversal (Figura 3), uma vez que, com essa variável, é possível aplicar as equações de compatibilidade abordadas no tópico metodologia.

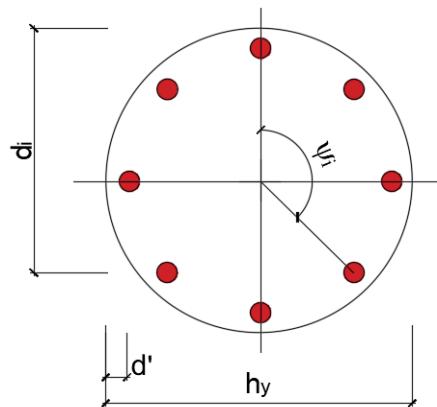


Figura 3 - Arranjo de armadura na seção circular (Adaptada de Santos 1994)

Santos (1994) faz o uso de relações trigonométricas na seção transversal, trabalhando por camadas de armadura, sendo que a camada 1 é relativa a armadura mais próxima do bordo inferior da seção, e definindo o ângulo de cada camada em relação ao eixo vertical, conforme Equação 6.

$$\psi_i = \left( \frac{n}{2} + 1 - i \right) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \quad (6)$$

Em que:

$\psi_i$  é o ângulo que define a posição de cada camada, a partir do eixo vertical (radianos);

$n$  é o número de camadas de aço na seção transversal (adimensional);

$i$  é o número que referencia uma camada de aço, a partir do bordo inferior (adimensional).

A partir dessa informação é possível determinar a distância dessa camada ao topo da seção, conforme Equação 7. Trabalha-se com valores reduzidos, dividindo as variáveis pelo diâmetro da seção ( $h_y$ ):

$$\beta_i = 0,5 \cdot (1 - \cos \psi_i) + \delta \cdot \cos \psi_i \quad (7)$$

Em que:

$\beta_i$  é a distância vertical de cada camada ao topo da seção, razão entre  $d_i$  e  $h_y$  (adimensional);

$\delta$  é a razão entre o cobrimento  $d'$  e o diâmetro da seção  $h_y$  (adimensional).

Com a distância vertical de cada camada ao topo da seção é possível descobrir a deformação de cada uma delas utilizando as equações genéricas 2, 3 e 4 das Regiões I, II e III. Obtida a deformação, a tensão atuante na barra pode ser calculada. Para o aço, faz-se necessário multiplicar a deformação em cada camada pelo módulo de elasticidade do material que é igual

a 210 GPa. Ressalta-se que a tensão é limitada ao valor da tensão de escoamento do aço, dada pela razão entre a tensão resistente, sendo 500 MPa para aços CA-50, e o fator de segurança do aço, neste caso, igual a 1,15. A Figura 4 apresenta a configuração da planilha com os esforços resistentes no aço.

Camada	$\psi_i$	$\beta_i$	$\varepsilon_{si}$	$\sigma_{si}$	$\emptyset_{barra}$	$A_{si}$	$F_{si}$	$M_{si}$
11	0,00000	0,0500	3,150	434,783	20	3,142	1365,91	614,66
10	0,31416	0,0720	2,996	434,783	20	6,283	2731,82	1169,15
9	0,62832	0,1359	2,548	434,783	20	6,283	2731,82	994,54
8	0,94248	0,2355	1,852	388,820	20	6,283	2443,03	646,19
7	1,25664	0,3609	0,973	204,415	20	6,283	1284,38	178,60
6	1,57080	0,5000	0,000	0,000	20	6,283	0,00	0,00
5	1,88496	0,6391	-0,973	-204,415	20	6,283	-1284,38	178,60
4	2,19911	0,7645	-1,852	-388,820	20	6,283	-2443,03	646,19
3	2,51327	0,8641	-2,548	-434,783	20	6,283	-2731,82	994,54
2	2,82743	0,9280	-2,996	-434,783	20	6,283	-2731,82	1169,15
1	3,14159	0,9500	-3,150	-434,783	20	3,142	-1365,91	614,66
nº barras		20			TOTAL	62,832	0,000	7206,285
Camadas		11						

Figura 4 - Configuração da planilha para esforços resistentes na armadura (por camadas)

#### Esforços resistentes no concreto

Devido a relação tensão deformação para o concreto desenvolver-se por meio de um diagrama parábola retângulo, a tensão varia na área de concreto comprimida e faz-se necessário realizar uma integral para descobrir os esforços resistentes pelo concreto. Nas seções circulares, Santos (1994) propõe trabalhar com coordenadas polares e a linha neutra é representada pelo ângulo  $\varphi$ , que vai de zero no topo da seção até  $\pi$  na borda inferior. Quando a linha neutra está dentro da seção ( $x \leq h_y$ ), ela é dada pela Equação 8. Quando ela encontra-se fora da seção, o seu valor é fixo igual a  $\pi$ .

$$\varphi = \arccos \frac{\theta - 2 \cdot \varepsilon_c}{\theta} \quad (8)$$

$$\theta = \frac{\varepsilon_c}{\beta_x} \quad (9)$$

Em que:

$\varphi$  = ângulo que define a posição da linha neutra (radianos);

$\varepsilon_c$  = deformação no topo da seção comprimida (adimensional).

$\theta$  = curvatura da seção, definida na Equação 9 (adimensional).

As integrais que representam a força normal e o momento fletor resistente pelo concreto estão expostas respectivamente nas Equações 10 e 11.

$$R_{cc} = \int_0^\varphi \sigma_c \cdot dA_{cc} \quad (10)$$

$$R_{cc} \cdot a = \int_0^\varphi \sigma_c \cdot y \cdot dA_{cc} \quad (11)$$

Em que:

$R_{cc}$  é a força normal resistida pelo concreto (Newton);

$a$  é a distância da linha de atuação da força normal ao topo da seção (m);

$\sigma_c$  é a tensão no concreto (Pascal);

$y$  é a distância do centro do elemento infinitesimal de área ao topo da seção (m);

$dA_{cc}$  é o elemento infinitesimal de área ( $m^2$ ).

O autor passa a definir todas as variáveis em função de ângulos conhecidos, como o que define a posição da linha neutra ( $\varphi$ ) e o que define a posição do elemento infinitesimal de área ( $\alpha$ ), conforme Figura 5.

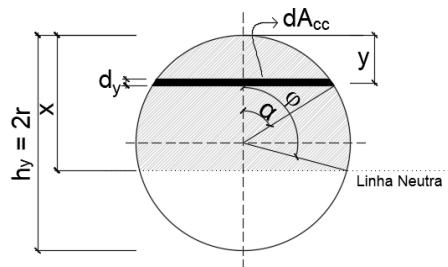


Figura 5 - Parâmetros para definir os esforços resistentes pelo concreto (Adaptada de Santos, 1994)

Por meio das relações trigonométricas, Santos (1994) desenvolve equações para o elemento infinitesimal de área (Equação 12), para a distância desse elemento ao topo da seção (Equação 13) e para a tensão no concreto (Equação 14). Com essas equações, é possível reescrever as Equações 10 e 11 e resolver as integrais trigonométricas geradas.

$$dA_{cc} = 2 \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot d\alpha \quad (12)$$

$$y = r - r \cdot \cos \alpha \quad (13)$$

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left\{ \left[ D - \frac{D^4}{4} \right] + \left[ \frac{\theta}{2} \cdot \left( 1 - \frac{D}{2} \right) \right] \cdot \cos \alpha + \left[ -\frac{\theta^2}{16} \right] \cdot \cos^2 \alpha \right\} \quad (14)$$

$$D = \varepsilon_c - \frac{\theta}{2} \quad (15)$$

Em que:

$dA_{cc}$  é o elemento infinitesimal de área ( $m^2$ );

$r$  é o raio da seção transversal (m);

$\alpha$  é o ângulo que define a fibra de encurtamento do concreto (radiano);

$y$  é a distância vertical do elemento infinitesimal de área ao topo da seção (m);

$\sigma_c$  é a tensão no concreto (Pascal);

$f_{cd}$  é a resistência de cálculo do concreto (MPa);

$\theta$  é a curvatura da seção (adimensional);

$\varepsilon_c$  é a deformação no topo da seção comprimida (adimensional).

Bendô (2011) explica que, a depender do domínio em que a seção se encontra, o concreto pode estar parcialmente ou totalmente comprimido, e por sua vez, pode encontrar-se em dois estados diferentes. No estado elástico, a deformação da fibra mais comprimida não atinge a deformação limite de escoamento ( $\varepsilon_c < \varepsilon_{c2}$ ) e a tensão no concreto não atinge o seu valor máximo, de modo que continua a ser regida pela equação do diagrama parábola-retângulo. No estado plástico, a deformação da fibra mais comprimida ultrapassa a deformação limite de escoamento ( $\varepsilon_c > \varepsilon_{c2}$ ). Nesse último caso, quando a deformação limite é atingida a tensão no concreto é igual a um valor fixo equivalente a tensão máxima.

Diante disso, no estado elástico, a integral possui apenas um único limite de integração que varia de zero até o ângulo que define a linha neutra, sendo a tensão regida sempre pela equação originada pelas relações do diagrama parábola retângulo. No estado plástico, a integral será dividida em duas partes: na primeira delas a deformação limite foi atingida e a tensão é dada por um valor fixo igual a tensão máxima. O limite de integração vai de zero até o ângulo  $\alpha_1$ , que representa o ponto que divide os estados elástico e plástico. Na segunda parte, a tensão continua a ser regida pelo diagrama parábola-retângulo e o limite de integração vai de  $\alpha_1$  até o ângulo que define a linha neutra. O ângulo que define essa fibra de encurtamento é exposto na Equação 16.

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{\theta - 2 \cdot \varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_{c2}}{\theta}\right) \quad (16)$$

Em que:

$\alpha_1$  é o ângulo que determina a fibra de encurtamento do concreto (radiano);

$\theta$  é a curvatura da seção (adimensional);

$\varepsilon_c$  é a deformação no topo da seção comprimida (adimensional);

$\varepsilon_{c2}$  é a deformação específica no início do patamar plástico do concreto (adimensional).

Por fim, conforme Fernandes (2018) expõe, utilizando as variáveis desenvolvidas, é possível obter quatro equações que determinam os esforços resistentes para o concreto a partir da resolução das integrais. Duas equações são para a força normal resistente, sendo uma delas para o estado elástico e outra para o estado plástico, e duas para o momento fletor resistente, sendo do mesmo modo, uma para o estado elástico e outra para o estado plástico.

Conforme Santos (1994) detalha, é recomendável trabalhar com valores adimensionais, chamados força normal reduzida e momento reduzido. Apresenta-se a seguir as equações 17 e 18 para força normal reduzida no estado elástico e plástico, e as Equações 19 e 20 para momento reduzido no estado elástico e plástico, respectivamente. Devido ao tamanho das equações, as mesmas estão apresentadas em função de variáveis que estão definidas nas Equações 21 a 31, cujos parâmetros já foram apresentados anteriormente.

$$\eta = \frac{2}{\pi} \cdot (A \cdot E + B \cdot F + C \cdot G) \quad (17)$$

$$\eta = \frac{2}{\pi} \cdot [E_1 + A \cdot (E - E_1) + B \cdot (F - F_1) + C \cdot (G - G_1)] \quad (18)$$

$$\eta' = \frac{1}{\pi} \cdot [A \cdot (E - F) + B \cdot (F - G) + C \cdot (G - J)] \quad (19)$$

$$\eta' = \frac{1}{\pi} \cdot [E_1 - F_1 + A \cdot (E - E_1 - F + F_1) + B \cdot (F - F_1 - G + G_1) + C \cdot (G - G_1 - J + J_1)] \quad (20)$$

Em que:

$$A = \left( \varepsilon_c - \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{4} \cdot x \cdot \left( \varepsilon_c - \frac{\theta}{2} \right)^4 \quad (21)$$

$$B = \frac{\theta}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_c}{2} - \frac{\theta}{4} \right) \right] \quad (22)$$

$$C = -\frac{\theta^2}{16} \quad (23)$$

$$E = \frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot \varphi)}{4} \quad (24)$$

$$F = \frac{\operatorname{sen}^3(\varphi)}{3} \quad (25)$$

$$G = \frac{\varphi}{8} - \frac{\operatorname{sen}(4 \cdot \varphi)}{32} \quad (26)$$

$$E_1 = \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot \alpha_1)}{4} \quad (27)$$

$$F_1 = \frac{\operatorname{sen}^3(\alpha_1)}{3} \quad (28)$$

$$G_1 = \frac{\alpha_1}{8} - \frac{\operatorname{sen}(4 \cdot \alpha_1)}{32} \quad (29)$$

$$J = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{5} - \frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{15} - \frac{\operatorname{sen}\varphi \cdot \cos^4\varphi}{5} \quad (30)$$

$$J_1 = \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{5} - \frac{\operatorname{sen}^3\alpha_1}{15} - \frac{\operatorname{sen}\alpha_1 \cdot \cos^4\alpha_1}{5} \quad (31)$$

A Figura 6 apresentada a seguir ilustra a tela de saída da planilha eletrônica com os esforços resistentes no concreto.

POSIÇÃO DA LINHA NEUTRA		VARIÁVEIS DAS INTEGRAIS		ESTADO ELÁSTICO		
$\beta_x$	0,50	A	0	$\varepsilon_c < 2$		
Domínio	3	B	3,5	$\eta$	0,35991056	
Raio ( $r$ )	0,1	C	-3,0625	$\eta'$	0,09118182	
D	0,2	D	0			
n	2	E	0,785398			
$\varepsilon_{cu}$	3,5	F	0,333333	ESTADO PLÁSTICO		
$\varepsilon_{cz}$	2	G	0,19635	$\varepsilon_c > 2$		
x	0,1	J	0,133333	$\eta$	0,38076855	
CÁLCULO DAS DEFORMAÇÕES						
	$\beta_i$	$\varepsilon$	E1	0,24680	VALOR ADOTADO	
Topo:	0,00	3,5000	F1	0,18422	$\eta$	0,38076855
Linha neutra:	0,50	0,0000	G1	0,14065	$\eta'$	0,09265069
Base:	1,00	-3,5000	J1	0,10978		
$\varphi$	1,570796327					
$\alpha_1$	0,962550748					

Figura 6 - Planilha com esforços resistentes pelo concreto

### Ábacos por somatório

#### Equacionamento para o aço

Da mesma forma, deve-se encontrar o posicionamento da armadura na seção transversal em relação ao topo da seção. Sias (2014) define as coordenadas para cada barra ( $i$ ) e não para cada camada. O ângulo entre as barras ( $\theta'$ ) é definido na Equação 32.

$$\theta' = \frac{2 \cdot \pi}{n} \quad (32)$$

Em que:

$\theta'$  é o ângulo entre as barras de aço (radiano);

$n$  é o número de barras na seção transversal (adimensional).

Dessa forma, as coordenadas de cada barra podem ser descritas em função de  $\theta'$ , conforme Equação 33 e Figura 7.

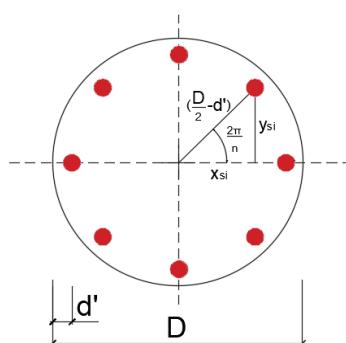


Figura 7 - Coordenadas das barras de aço na seção circular (Adaptada de Sias, 2014)

$$y_{si} = \left( \frac{D}{2} - d' \right) \cdot \sin \left[ (i-1) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \right] \quad (33)$$

Em que:

$y_{si}$  é a coordenada vertical da barra de aço i (m);

$D$  é o diâmetro da seção (m);

$d'$  é o cobrimento do concreto (m);

$n$  é o número de barras (adimensional);

$i$  é o número da camada em que a barra se encontra posicionada, sendo a primeira delas a que se encontra mais próxima do bordo superior.

#### Equacionamento para o concreto

Diferente de Santos (1994), Sias (2014) utiliza um processo aproximado de somatório de áreas. O autor divide a área de concreto em regiões pequenas o suficiente para que possa ser desconsiderada a variação de tensão dentro destas. Desse modo, o círculo que representa a seção transversal do pilar terá o seu diâmetro dividido em 40 segmentos de igual espaçamento entre si, assim como o ângulo central será dividido em 36 ângulos iguais, de acordo com o esquema apresentado na Figura 8.

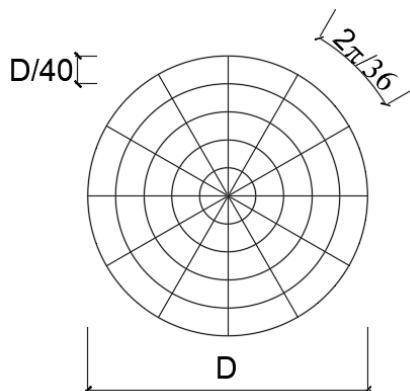


Figura 8 - Representação esquemática da seção transversal discretizada (Adaptada de Sias, 2014)

A distância vertical de cada elemento em relação ao topo da seção será determinada considerando o centro geométrico de cada um deles, conforme Equação 34. A área de cada elemento também pode ser representada e está exposta na Equação 35. Considerando que os círculos são representados pela variável  $r = (1, \dots, 20)$  e os raios pela variável  $b = (1, \dots, 36)$ , tem-se:

$$y_{t(r,b)} = \frac{D}{2} - \left( \frac{D}{2} - r \cdot \frac{D}{40} + \frac{D}{80} \right) \cdot \sin \left[ (b-1) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{36} + \frac{2 \cdot \pi}{72} \right] \quad (34)$$

$$A_{c(r,b)} = \frac{\left\{ \pi \cdot \left[ \frac{D}{40} \cdot (21-r) \right]^2 - \pi \cdot \left[ \frac{D}{40} \cdot (20-r) \right]^2 \right\}}{36} \quad (35)$$

Em que:

$y_{t(r,b)}$  é a coordenada vertical de cada elemento de concreto (m);

$D$  é o diâmetro da seção (m);

$r$  é o número de círculos da seção transversal, sendo  $r = (1, \dots, 20)$  (adimensional);

$b$  é o número de raios da seção transversal, sendo  $b = (1, \dots, 36)$  (adimensional);

$A_{c(r,b)}$  é a área de um determinado elemento de concreto ( $m^2$ ).

Uma vez que a distância de cada elemento em relação ao topo da seção é conhecida (Equação 34), pode-se substituir esse valor nas equações de compatibilidade 3, 4 e 5 para encontrar a deformação de cada elemento. Com a deformação ( $\varepsilon'_c$ ) é possível encontrar a tensão atuante no concreto através da Equação 1. Para obter a força normal resistente, realiza-se um somatório, no qual multiplica-se a tensão de cada elemento de concreto pela sua área (Equação 35), e para o momento fletor resistente, acrescenta-se na parcela do somatório o braço de alavanca de cada elemento em relação ao centro da seção transversal.

### Esforços resistentes para a seção transversal

Com os valores dos esforços para cada um dos materiais, pode-se encontrar a parcela total de força normal com a Equação 36 e de momento fletor com a Equação 37, resistidos pela seção em uma dada posição da linha neutra. Esses valores são transformados em adimensionais,  $v$  e  $\mu$ , respectivamente, conforme propõe Santos (1994) e é demonstrado em Fernandes (2018).

$$N_{Rd} = R_{cc} + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sdi} \quad (36)$$

$$M_{Rd} = R_{cc} \cdot (0,5 \cdot h_y - a) + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sdi} \cdot b_i \quad (37)$$

Em que:

$N_{Rd}$  é a força normal resistente pela seção transversal (kN);

$R_{cc}$  é a parcela de força normal resistente pelo concreto (kN);

$A_{si}$  é a área da barra de aço  $i$  ( $m^2$ );

$\sigma_{sdi}$  é a tensão na barra de aço  $i$  (MPa);

$M_{Rd}$  é a momento fletor resistente pela seção transversal (MPa);

$a$  é a distância do elemento de concreto ao topo da seção (m);

$h_y$  é o diâmetro da seção transversal (m);

$b_i$  é o braço de alavanca da barra de aço  $i$  (m).

A planilha do programa Microsoft Excel que gera os valores de entrada para a construção do ábaco utiliza os valores de  $v$ ,  $\mu$  e  $\omega$ . Quando as Equações 36 e 37 são transformadas em valores reduzidos, as variáveis  $v$  e  $\mu$  passam a depender do valor de  $\omega$ . Desse modo, varia-se  $\omega$  de 0,05 até 1,00, e encontram-se diversos pares ( $v, \mu$ ). É preciso ter atenção na organização dos dados, porque o ábaco é formado por curvas e cada uma delas corresponde a um valor fixo de  $\omega$ . Então, para formar uma curva são necessários diversos pares ( $v, \mu$ ) correspondentes a um mesmo valor de  $\omega$  que são obtidos a partir da variação da linha neutra.

## RESULTADOS

Para exemplificar o uso da planilha e identificar a sua precisão, foram realizados quatro exemplos para dimensionamento de diversas seções transversais circulares de concreto armado submetidas a esforços de flexo-compressão. As Figuras 9 e 10 apresentam os dados de entrada e saída do Exemplo 01 respectivamente.

CARACTERÍSTICAS DA SEÇÃO		CARACTERÍSTICAS AÇO	
$d'$ =	0,025 m	$f_yk$ =	500 MPa
D =	50 cm	$f_yd$ =	434,783 MPa
$A_c$ =	1963,4954 cm <sup>2</sup>	CARACTERÍSTICAS CONCRETO	
SOLICITAÇÕES DE CÁLCULO		$f_{ck}$ =	25 MPa
$N_d$ =	840 kN	$f_{cd}$ =	17,8571 MPa
$M_d$ =	210 kN.m		

Figura 9 - Informações de entrada do Exemplo 01

VALORES DE ENTRADA NO ÁBACO		VALOR DE SAÍDA DO ÁBACO	
$\mu$ =	0,1198	$\omega$ =	0,18
$v$ =	0,2396	ÁREA DE AÇO CALCULADA	
		$A_s$ =	14,52 cm <sup>2</sup>

Figura 10 - Informações de saída do Exemplo 01

Com o objetivo de analisar a eficiência dos ábacos adimensionais gerados e comparar os resultados obtidos, foi utilizado o P-Calc 1.4.0, um aplicativo que analisa pilares submetidos a flexão composta, que foi desenvolvido por Cardoso Júnior (2014). Com o intuito de comparar os resultados é calculada a diferença percentual da área de aço encontrada em relação ao resultado obtido pelo ábaco desenvolvido.

O ábaco do terceiro exemplo está apresentado na Figura 11, enquanto o ábaco do quarto exemplo está apresentado na Figura 12, sendo estes ábacos produzidos com a formulação apresentada anteriormente, e destinado para dimensionar seções circulares projetadas com concretos do grupo II.

No caso particular do exemplo quatro, utilizando a figura 8 e inserindo os valores da solicitação, força normal e momento fletor reduzidos, respectivamente  $v = 0,176$  e  $\mu = 0,11$ , extrai-se a taxa mecânica de armadura de, aproximadamente, 0,26.

### ÁBACO ADIMENSIONAL PARA PILARES DE SEÇÃO CIRCULAR ( $\mu \times v$ )

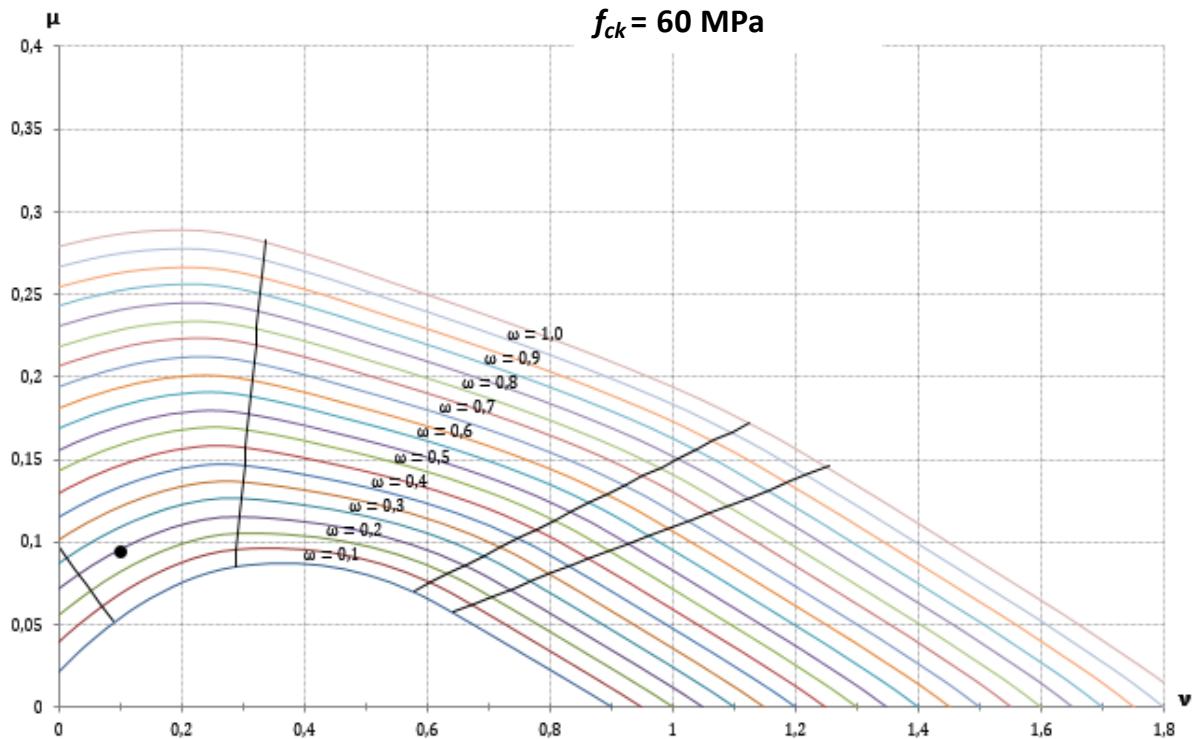


Figura 11 - Ábaco adimensional para seção circular com  $f_{ck} = 60 \text{ MPa}$  e  $d'/h = 0,10$

### ÁBACO ADIMENSIONAL PARA PILARES DE SEÇÃO CIRCULAR ( $\mu \times v$ )

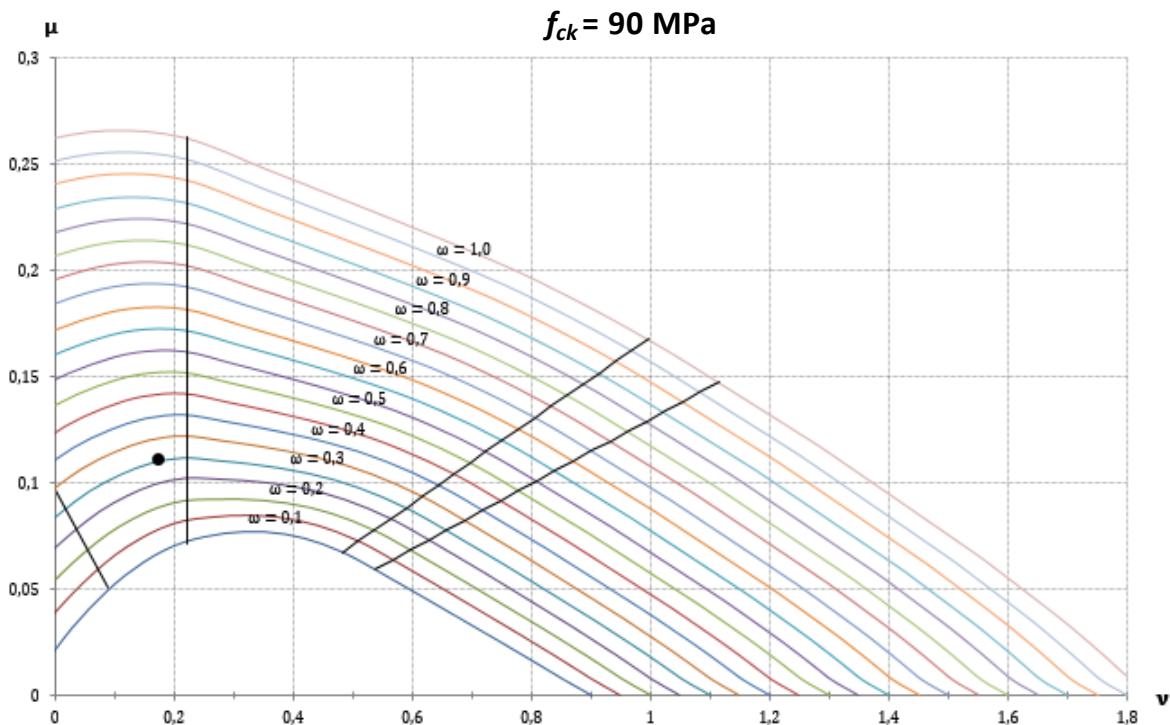


Figura 12 - Ábaco adimensional para seção circular com  $f_{ck} = 90 \text{ MPa}$  e  $d'/h = 0,10$

Com esse resultado, utiliza-se a Equação 38 para encontrar a área de aço necessária para essa determinada seção transversal, sendo para esse exemplo igual a 27,17 cm<sup>2</sup>.

$$A_s = \omega \cdot \frac{f_{cd} \cdot A_c}{f_{yd}} \quad (38)$$

Em que:

$A_s$  é a área de aço necessária (cm<sup>2</sup>);

$\omega$  é a taxa mecânica de armadura (adimensional);

$A_c$  é a área de concreto (cm<sup>2</sup>);

$f_{cd}$  é a resistência de cálculo à compressão do concreto (MPa);

$f_{yd}$  é a resistência de cálculo do aço (MPa).

As tabelas 1, 2, 3 e 4 apresentam as características e os resultados para os quatro exemplos realizados.

Tabela 1 - Resultado do exemplo 1

Entradas	Área de aço (cm <sup>2</sup> )		Diferença (%)
Diâmetro (cm)	50	Borges (2014)	13,55
Cobrimento (cm)	2,5	Ábaco desenvolvido	14,52
Resistência concreto (MPa)	25	Ábaco (Montoya, 2000)	14,52
Força Normal (kN)	840	P-Calc 1.4.0	14,14
Momento Fletor (kN.m)	210		-2,62%

Tabela 2 - Resultado do exemplo 2

Entradas	Área de aço (cm <sup>2</sup> )		Diferença (%)
Diâmetro (cm)	40	Ábaco desenvolvido	13,21
Cobrimento (cm)	3,0	Santos (1994)	12,58
Resistência concreto (MPa)	20	P-Calc 1.4.0	11,06
Força Normal (kN)	900	Ábaco (Montoya 2000)	12,39
Momento Fletor (kN.m)	100		-6,21%

Tabela 3 - Resultado do exemplo 3

Entradas	Área de aço (cm <sup>2</sup> )	Diferença (%)
Diâmetro (cm)	40 Ábaco desenvolvido	24,77 -
Cobrimento (cm)	4,0 P-Calc 1.4.0	25,76 4,00%
Resistência concreto (MPa)	60	
Força Normal (kN)	450	
Momento Fletor (kN.m)	200	

Tabela 4 - Resultado do exemplo 4

Entradas	Área de aço (cm <sup>2</sup> )	Diferença (%)
Diâmetro (cm)	30 Ábaco desenvolvido	27,17 -
Cobrimento (cm)	3,0 P-Calc 1.4.0	28,13 3,53%
Resistência concreto (MPa)	90	
Força Normal (kN)	800	
Momento Fletor (kN.m)	150	

De acordo com os resultados obtidos, foi possível concluir que as áreas de aço encontradas por meio dos ábacos desenvolvidos foram semelhantes aos resultados obtidos por outros ábacos existentes na literatura, destinados aos concretos do grupo I, ou por programas computacionais conforme exemplos 1 e 2. Nos exemplos 3 e 4, não há comparação com outros ábacos justamente por não ter sido observado a existência deles na literatura. Todavia, foi possível observar algumas diferenças percentuais entre os resultados.

O primeiro motivo que justifica essa diferença na área de aço é o fator de segurança utilizado no aplicativo P-Calc 1.4.0, que na maioria dos casos foi ligeiramente maior que 1,0, ocasionando área de aço maiores. O segundo fator se refere ao procedimento de consulta aos ábacos adimensionais, em que para extrair o valor da taxa mecânica de armadura, é realizado um processo manual, no qual na maioria das vezes a solicitação não coincide com uma das curvas existentes no ábaco, recaindo em um valor de  $\omega$  entre as curvas. Nessa situação, estima-se um resultado que está entre o  $\omega$  superior e o  $\omega$  inferior, realizando-se aproximações nessa variável.

## CONCLUSÃO

Os ábacos adimensionais são muito úteis no dimensionamento de pilares de concreto armado e a compreensão da construção dessa ferramenta é fundamental pois permite ao engenheiro entender como se dá tanto a distribuição dos esforços na seção transversal, bem

como a contribuição de cada material, aço e concreto, para a resistência total da seção. Apesar de existirem diversos programas para calcular a área de aço para pilares de forma automática e mais rápida, o processo de construção dos ábacos expõe toda a metodologia para chegar na automação dos programas de dimensionamento e verificação de seções transversais.

Com a realização dos exemplos foi possível concluir que os resultados obtidos com o uso do ábaco foram próximos aos resultados obtidos por outros ábacos ou programas computacionais, tanto para os concretos do grupo I como os concretos do grupo II. Dessa forma, comprova-se a eficiência dos ábacos gerados.

Percebe-se também que apesar da metodologia de Sias (2014) realizar um somatório ao invés de uma integral para encontrar o esforço resistente pelo concreto, o resultado é satisfatório e as aproximações são bastante válidas.

O trabalho deixa como contribuição todo o equacionamento necessário para a geração dos ábacos adimensionais para o dimensionamento de pilares com seção circular. Essa rotina de cálculo pode ser reproduzida no programa Microsoft Excel por estudantes e profissionais da área e com isso obtém-se a ferramenta de dimensionamento de pilares com esse tipo de seção transversal.

## **REFERÊNCIAS**

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118:2014 - Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8953:2015 - Concreto para fins estruturais - Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência. Rio de Janeiro, 2015.
- BACCIN, A. G. C. Fundamentos do concreto de alto desempenho e sua aplicação no projeto de pilares. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- BENDÔ, N. E. P. Geração de ábacos para dimensionamento de seções de pilares solicitadas por flexão composta. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- CARDOSO JÚNIOR, S. D. Sistema computacional para análise não linear de pilares de concreto armado. Monografia (Especialista em Gestão de Projetos de Sistemas Estruturais) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.
- CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado, Volume 2. 1<sup>a</sup> Edição. São Paulo: Ed. PINI, 2009.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2014. 4<sup>a</sup> Edição. São Carlos: EdUFSCar, 2015.
- COSTA, G. C. C.; ABREU, R. O. A.; AGUIAR, E. A. B. Verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto de alta resistência submetidos a flexo-compressão normal segundo o método geral. In: Congresso Brasileiro do Concreto, 59., 2017, Bento Gonçalves. Bento Gonçalves, 2017.
- FERNANDES, T. C. F. Geração de ábacos para dimensionamento de pilares de concreto armado com seção circular. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.

- MONTOYA, P. J.; MESEGURER, A. G.; CABRÉ, F. M. Hormigón armado: Ajustada al código modelo y al eurocódigo. 14. Ed. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 2000.
- ROHDEN, A. B.; SEELBACH, L. C.; XAVIER JUNIOR, J. E. Utilização de concretos com variação da resistência à compressão em pilares – estudo de caso: Edifício de 30 pavimentos com resistência fixa e resistência variável ao longo dos pavimentos. Congresso Brasileiro do Concreto, 58., 2016, Belo Horizonte. Belo Horizonte, 2016.
- SANTOS, L. M. Sub-rotinas básicas do dimensionamento de concreto armado. São Paulo: Ed. Thot, 1994.
- SIAS, F. M. Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.
- SIAS, F. M.; ALVES, E. C. Dimensionamento ótimo de pilares circulares de concreto armado segundo a ABNT NBR 6118:2014, Revista Engenharia Estudo e Pesquisa, v. 16, p. 34-42, 2016.
- SMANIOTTO, A. Dimensionamento e Detalhamento Automático de Pilares Retangulares Submetidos à Flexão Composta Oblíqua. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- TORRICO, F. A. Análise teórica e experimental do comportamento de pilares esbeltos de concreto de alta resistência, considerando a ductilidade. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.