



Artigo de Iniciação Científica

## Descobrimos a Cardioide: Entre Círculos e Simetrias

**Vitória Alves Azevedo Melo**

Universidade Federal do Rio Grande

[v.melo18031999@gmail.com](mailto:v.melo18031999@gmail.com)

**Gilberto Frederico Faber Filho**

Universidade Federal do Rio Grande

[giba\\_faber@hotmail.com](mailto:giba_faber@hotmail.com)

**Cinthya Maria Schneider Meneghetti**

Universidade Federal do Rio Grande

[cinthya.schneider@gmail.com](mailto:cinthya.schneider@gmail.com)

### Resumo

Este artigo tem como objetivo explorar aspectos teóricos e aplicados da Geometria Diferencial por meio do estudo da curva Cardioide. Inicialmente, apresenta-se uma fundamentação teórica sobre conceitos fundamentais, como regularidade e curvatura. Em seguida, a Cardioide é introduzida como um exemplo expressivo de curva plana, cuja simetria, parametrização e curvatura são analisadas à luz da Geometria Diferencial. A metodologia adotada baseia-se em uma revisão da literatura, com foco na identificação das ferramentas analíticas utilizadas em pesquisas anteriores e no aprofundamento teórico do tema. São também apresentadas aplicações da Cardioide em áreas como acústica, óptica e morfologia vegetal, evidenciando seu caráter interdisciplinar. Os resultados obtidos confirmam a relevância da Cardioide tanto para o desenvolvimento de competências matemáticas no contexto da Geometria Diferencial quanto para sua aplicabilidade prática em diferentes campos do conhecimento.

**Palavras-chaves:** Geometria. Curvas Planas. Cardioide.

### Abstract

This article aims to explore theoretical and applied aspects of Differential Geometry through the study of the cardioid curve. Initially, a theoretical foundation is presented on fundamental concepts such as regularity and curvature. Next, the cardioid is introduced as a significant example of a plane curve, whose symmetry, parameterization, and curvature are analyzed in light of Differential Geometry. The methodology adopted is based on a literature review, focusing on identifying the analytical tools used in previous research and on a deeper theoretical understanding of the topic. Applications of the cardioid in areas such as acoustics, optics, and plant morphology are also discussed, highlighting its interdisciplinary nature. The results confirm the relevance of the cardioid both for the development of mathematical skills in the context of Differential Geometry and for its practical applicability in different fields of knowledge.

**Keywords:** Geometry. Flat Curves. Cardioid.

## 1 Introdução

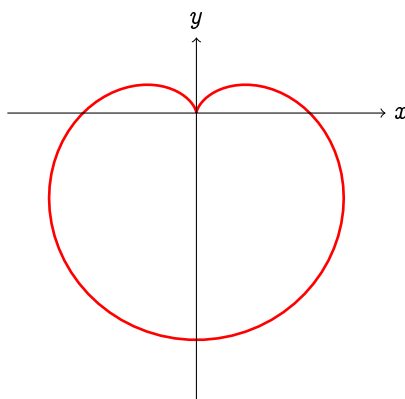
A Geometria, ao longo da história, ocupou um lugar de destaque na construção do conhecimento humano, não apenas por sua utilidade prática, mas também pela beleza intrínseca de suas formas e relações. Seu nome deriva das palavras gregas “geo” (terra) e “metria” (medida) e remonta aos antigos agrimensores egípcios, que utilizavam cordas para medir e traçar formas simples, como retas e circunferências, sobre terrenos. Em especial, a Geometria Diferencial oferece um olhar aprofundado sobre a estrutura e o comportamento de curvas e superfícies, conectando a intuição geométrica com as ferramentas analíticas do Cálculo Diferencial. Ao estudar conceitos como Curvatura, Comprimento de Arco, Superfícies Regulares, entre outros, podemos compreender com maior precisão os fenômenos naturais, modelar estruturas complexas e apreciar as sutilezas matemáticas que descrevem o espaço em que vivemos.

Este trabalho tem por objetivo abordar alguns desses conceitos fundamentais, evidenciando a riqueza teórica e as amplas aplicações da Geometria Diferencial. Precisamente, serão apresentadas a definição e principais

propriedades da curva Cardioide (veja a Figura 1). O trabalho incluirá a dedução de equações no Sistema de Coordenadas Polares, a verificação de propriedades matemáticas relacionadas com a Geometria Diferencial como o cálculo de sua Curvatura e Evoluta, bem como exemplos de aplicações.

A palavra Cardioide deriva do grego kardia “coração” e eidos “formas” e seu nome se deve por sua forma se assemelhar a um coração (EVES, 2011). Formalmente descrita por Johann Castillon (1704-1791) em 1741, em um artigo publicado na *Philosophical Transactions of the Royal Society*, a Cardioide ganhou destaque não apenas como objeto de estudo na Matemática Pura, mas também como uma estrutura com aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento (MORENO, 2018).

**Figura 1:** Cardioide



Fonte: Os autores

Sua forma peculiar, simétrica em relação a um eixo, emerge em contextos surpreendentes da Física e da Engenharia, como nas cáusticas de luz geradas por superfícies curvas e nos padrões de interferência de ondas (EVES, 2011). Em acústica, por exemplo, a Cardioide é amplamente conhecida como o padrão polar característico de muitos microfones, destacando-se por sua capacidade de captar sons de maneira direcional, minimizando ruídos indesejados provenientes de outras direções (BOURNE, 2009). A curva Cardioide é observada em superfícies refletoras circulares, evidenciando sua relevância tanto na teoria quanto em aplicações práticas. Na biologia, a Cardioide é utilizada para realizar a análise morfológica de sementes (MARTÍN GÓMEZ, 2013). Algumas dessas aplicações são discutidas na Seção 3.

## 2 A Cardioide: definição e propriedades geométricas

Nesta seção, são apresentados o conceito de Curvas Diferenciáveis Parametrizadas Regulares, com destaque para as curvas Parametrizadas por Comprimento de Arco (PCA), a definição de Epicicloide e a parametrização da Cardioide como um caso particular de Epicicloide. Também será explorado o conceito de Evoluta, complementando o estudo das propriedades geométricas dessas curvas.

### 2.1 Parametrização da Cardioide em Coordenadas Polares

O diâmetro de uma Cardioide é a maior distância entre dois pontos da curva, medidos ao longo de uma reta que passa pela origem (ou polo).

Segundo (PARADINHA et al., 1999) quando a medida do diâmetro da Cardioide for  $2a$  (constante), a sua equação cartesiana é

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2). \quad (1)$$

Para realizar a transformação da equação que descreve a Cardioide em Coordenadas Cartesianas para Coordenadas Polares, utiliza-se a mudança de coordenadas  $x = r\cos(\theta)$  e  $y = r\sin(\theta)$ . Substituindo na Equação (1),

tem-se:

$$[r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) + a \cos(\theta)]^2 = a^2(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)).$$

Fazendo-se as simplificações necessárias, obtém-se:

$$r^2 + 2a \cos(\theta) + a^2 \cos^2(\theta) = a^2,$$

que é uma equação do segundo grau em  $r$ :

$$r^2 + 2a \cos(\theta)r + a^2 \cos^2(\theta) - a^2 = 0. \quad (2)$$

Para resolver a Equação (2), utiliza-se a fórmula resolutive para equações do segundo grau, obtendo-se as soluções

$$r = -a \cos(\theta) \pm a.$$

Assumindo implicitamente  $a > 0$  e considerando o domínio usual das coordenadas polares, com  $r \geq 0$ , observa-se que a solução  $r = a(1 - \cos(\theta))$  é não negativa para todo  $\theta$ , enquanto  $r = -a(1 + \cos(\theta))$  assume apenas valores não positivos.

Do ponto de vista geométrico, em coordenadas polares, pares do tipo  $(r, \theta)$  e  $(-r, \theta + \pi)$  representam o mesmo ponto do plano. Assim, embora as duas expressões para  $r$  possuam sinais distintos, ambas descrevem o mesmo conjunto geométrico de pontos quando se leva em conta essa equivalência polar.

Entretanto, a fim de evitar interpretações envolvendo raios negativos e simplificar as análises subsequentes, opta-se por considerar apenas a solução não negativa

$$r = a(1 - \cos(\theta)),$$

a qual descreve completamente a curva em estudo.

Observa-se que o valor máximo de  $r$  é de fato  $2a$  (diâmetro) e o mínimo é 0, ou seja, a curva vai desde o polo até uma distância  $2a$ , formando uma figura cuja extensão total (maior comprimento linear a partir do polo) é  $2a$ . É importante destacar que a definição de diâmetro não coincide com a maior distância entre dois pontos da curva.

Assim, tem-se uma parametrização de uma Cardioide para um caso específico em que a curva é simétrica em relação ao eixo  $x$  (Figura 6), mas essa curva pode ser representada de várias formas, rotacionando sua representação no Plano Cartesiano. Considerando:

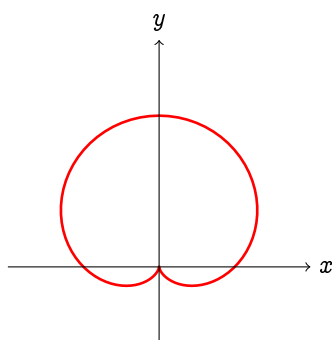
$r$ : distância de um ponto da curva até a origem do Plano Polar;

$a$ : parâmetro que define o tamanho/diâmetro da Cardioide;

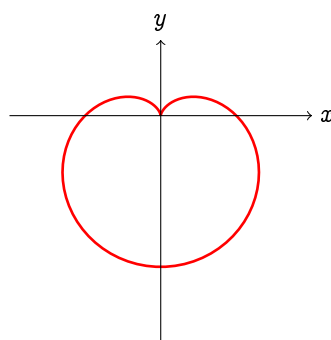
$\theta$ : ângulo em radianos,

as parametrizações da Cardioide em Coordenadas Polares e seus traços podem ser observados na Figura 2.

**Figura 2:** Representações gráficas de cardioides em diferentes posições

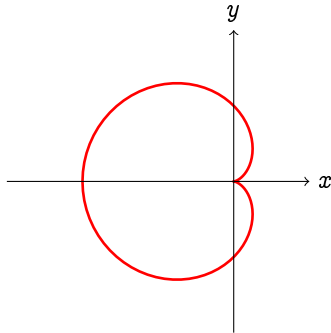
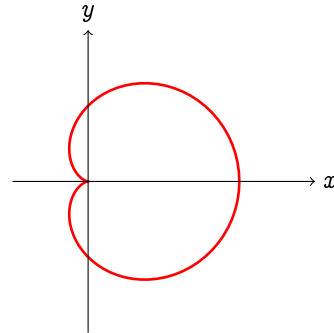


**Figura 3:** Cardioide  $r(\theta) = a + a \sin(\theta)$



**Figura 4:** Cardioide  $r(\theta) = a - a \sin(\theta)$

Fonte: Os autores

**Figura 5:** Representações gráficas de cardioides em diferentes posições

**Figura 6:** Cardioide  $r(\theta) = a - a\cos(\theta)$ 

**Figura 7:** Cardioide  $r(\theta) = a + a\cos(\theta)$ 

Fonte: Os autores

Essas equações descrevem a curva (Cardioide), mas com posições diferentes no plano, dependendo da função trigonométrica e do sinal utilizados.

## 2.2 Curva Diferenciável Parametrizada Regular

Uma curva  $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida como Parametrizada Regular Diferenciável (ou suave) quando satisfaz duas condições principais. Primeiramente, a função deve ser diferenciável de classe  $C^1$ , ou seja, ela e sua derivada devem ser contínuas em todo o intervalo  $I$ . Em segundo lugar, sua derivada, dada por  $\vec{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t))$ , não pode ser nula, ou seja,  $\vec{\gamma}'(t) \neq (0, 0)$  para todo  $t \in I$ . Essa segunda condição garante que a velocidade da curva não se anula e, conseqüentemente, a curva possui uma orientação local bem definida em todos os seus pontos e admite uma reta tangente em cada um deles, o que é fundamental para o estudo de suas propriedades geométricas.

O ponto onde a derivada da curva se anula é chamado de Ponto de Reversão (PARADINHA et al., 1999). Nesse ponto a variação do declive das retas tangentes à imagem da curva muda de sentido. A Cardioide possui um Ponto de Reversão, por isso não é regular e seu diâmetro é então o comprimento da maior corda que se pode traçar a partir do Ponto de Reversão.

Observa-se que a equação  $r = a(1 + \cos(\theta))$  descreve uma cardioide geometricamente equivalente àquela dada por  $r = a(1 - \cos(\theta))$ , diferindo apenas por uma rotação do plano. Como rotações são isometrias do  $\mathbb{R}^2$ , ambas representam o mesmo objeto geométrico. A partir deste ponto, adota-se a forma  $r = a(1 + \cos(\theta))$  por conveniência nas análises subsequentes.

Considerando a parametrização em Coordenadas Polares da Cardioide

$$r(\theta) = a(1 + \cos(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

e convertendo para sua forma paramétrica, tem-se:

$$x(\theta) = a(1 + \cos(\theta))\cos(\theta), \quad y(\theta) = a(1 + \cos(\theta))\sin(\theta). \quad (3)$$

Para verificar que a Cardioide não é uma Curva **Regular**, é necessário calcular a derivada do vetor posição  $\vec{r}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ .

Calculando as derivadas das funções coordenadas, tem-se:  $x'(\theta) = -a[\sin(2\theta) + \sin(\theta)]$  e  $y'(\theta) = a[\cos(2\theta) + \cos(\theta)]$ .

Agora, será necessário verificar que o vetor tangente  $\vec{r}'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta))$  é **nulo para algum**  $\theta$ . Para isso, serão investigadas, primeiramente, as condições que acarretam  $x'(\theta) = 0$ . Observa-se que isto ocorre se

$$\sin(2\theta) + \sin(\theta) = 0. \quad (4)$$

Note que para a Equação (4) ser verdadeira tem-se duas possibilidades: a primeira é  $\theta = 0$  e a segunda ocorre quando  $\theta = \pi$ . Por outro lado, para que  $y'(\theta) = 0$ , tem-se:

$$\cos(2\theta) + \cos(\theta) = 0. \quad (5)$$

Para que a Equação (5) seja satisfeita tem-se  $\theta = \pi$ .

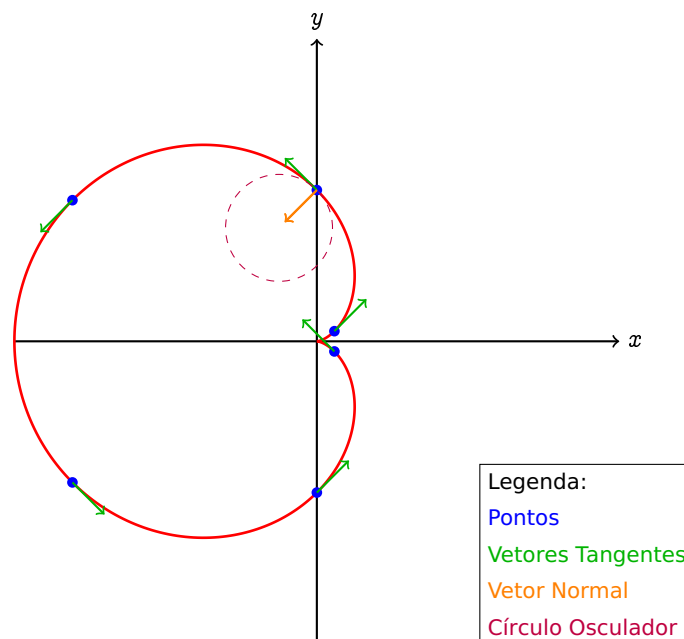
Ocorre que  $x'(\theta)$  e  $y'(\theta)$  se anulam ao mesmo tempo quando  $\theta = \pi$ . Portanto, tem-se  $\vec{r}'(\pi) = (0, 0)$ , o que significa que a curva **não é regular**.

### 2.3 Curvatura da Cardioide

Segundo MORENO (2018), a Curvatura de uma Curva pode ser interpretada geometricamente como a medida de sua diferença em relação a uma reta. Mais precisamente, a Curvatura é uma medida intrínseca que descreve como uma curva se desvia de ser uma reta ou superfície se desvia localmente de ser plana, sendo fundamental no estudo das propriedades geométricas das curvas e superfícies. A autora SOUZA LUZ (2017) explica que em uma curva, a Curvatura é definida como a taxa de variação da direção do vetor tangente ao longo da curva em um ponto específico.

Na Figura 8, além da representação da Cardioide, são exibidos vetores tangentes em diferentes pontos da curva. Esses vetores tangentes ajudam a visualizar a direção instantânea da curva e servem como base para calcular o Vetor Normal, utilizado no cálculo da Curvatura e na parametrização do Círculo Osculador da curva.

**Figura 8:** Representação dos Vetores Tangente e Normal na Cardioide



Fonte: Os autores

Considere uma aplicação  $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^\infty$ , regular, definida em um intervalo aberto  $I = (c, d)$  da reta. Suponha que  $\vec{r}$  está Parametrizada por Comprimento de Arco (PCA), isto é,

$$\|\vec{r}'(s)\| = 1, \quad \text{para todo } s \in I.$$

Para cada  $s \in I$ , o vetor  $\vec{r}'(s)$  é um vetor unitário que será designado por  $\mathbf{t}(s)$ . Seja  $\mathbf{n}(s)$  o vetor unitário de  $\mathbb{R}^2$  ortogonal à  $\vec{r}'(s)$  tal que a base  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$  tem a mesma orientação da base canônica  $\{e_1, e_2\}$ . A função  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ , para todo  $s \in I$ , é chamada curvatura de  $\vec{r}$  em  $s \in I$  (DELGADO e FRENSEL, 2019).

Essa definição decorre do fato de o vetor tangente unitário  $\mathbf{t}(s)$  satisfazer  $\|\mathbf{t}(s)\| = 1$  para todo  $s \in I$ . Derivando

a identidade  $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$  em relação a  $s$ , obtém-se

$$\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0,$$

o que implica que  $\mathbf{t}'(s)$  é ortogonal a  $\mathbf{t}(s)$ . Assim, como  $\mathbf{n}(s)$  é definido como o vetor normal unitário à curva, conclui-se que  $\mathbf{t}'(s)$  é necessariamente paralelo a  $\mathbf{n}(s)$ , justificando a existência da função escalar  $k$ .

Assim, considerando a parametrização  $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$ , tem-se

$$k(s) = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

Caso a curva não seja PCA (como é o caso da Cardioide), segundo DELGADO e FRENSEL (2019, p.20), considerando  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ , tem-se que sua curvatura é dada por

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}}.$$

Considerando a parametrização  $\vec{r}(t) = (a(1 - \cos(t))\cos(t), a(1 - \cos(t))\sin(t))$  da Cardioide, tem-se:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(1 - \cos(t))\cos(t) & x'(t) &= -a\sin(t) + a\sin(2t) & x''(t) &= -a\cos(t) + 2a\cos(2t) \\ y(t) &= a(1 - \cos(t))\sin(t) & y'(t) &= a\cos(t) - a\cos(2t) & y''(t) &= -a\sin(t) + 2a\sin(2t) \\ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= 2a^2(1 - \cos(t)) & \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= \sqrt{2}a(1 - \cos(t))^{1/2} \end{aligned}$$

Portanto,

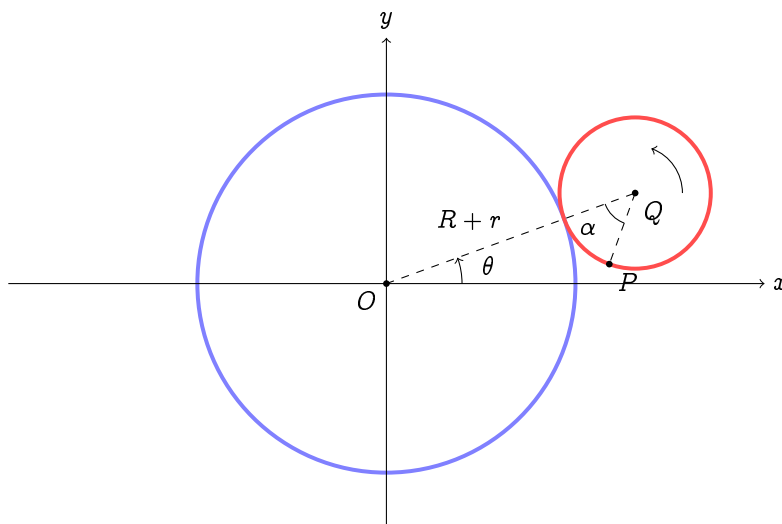
$$k(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}a(1 - \cos(t))^{1/2}}.$$

O cálculo explícito mostra que a expressão da curvatura envolve o termo  $1 - \cos(t)$  no denominador, de modo que, ao aproximar-se de  $t = 0$  ou  $t = 2\pi$ , o termo tende a zero. Consequentemente, a curvatura diverge, assumindo valores arbitrariamente grandes. Assim, do ponto de vista da Geometria Diferencial, o cúspide constitui uma singularidade da curva, caracterizado por uma curvatura que tende ao infinito.

## 2.4 Definição da Epicicloide

Seja  $c$  um círculo de raio  $r$  (vermelho) e centro  $Q$  rolando externamente sobre um círculo  $c'$  de raio  $R$  (azul) e centro  $O$ , sem escorregamento. Seja  $P = (x, y)$  um ponto fixo em  $c$ . A Epicicloide é a curva descrita pelo ponto  $P$  à medida que  $c$  rola sobre  $c'$  (SILVA, 2021). Veja a Figura 9.

Figura 9: Coordenadas da Epicicloide



Fonte: Os autores

As coordenadas do ponto  $Q$  são dadas por  $((R+r)\cos(\theta), (R+r)\sin(\theta))$ .

O comprimento de circunferência entre o ponto de tangência entre os dois círculos e o ponto  $P$  em  $c$  é  $l_r$  e em  $c'$  é  $l_R$ . Uma vez que  $l_R = l_r$ , sendo  $l_R = R\theta$  e  $l_r = r\alpha$ , ou seja,  $\alpha = R\frac{\theta}{r}$ , tem-se que a Epicicloide é parametrizada por:

$$\begin{cases} x(\theta) = (R+r)\cos(\theta) - r\cos\left(\frac{\theta R}{r} + \theta\right) \\ y(\theta) = (R+r)\sin(\theta) - r\sin\left(\frac{\theta R}{r} + \theta\right) \end{cases} \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi]. \quad (6)$$

Quando o raio  $R$  do círculo  $c'$  for igual ao raio  $r$  do círculo móvel  $c$ , isto é,  $R = r$ , a Epicicloide resultante será uma Cardioide, orientada como na Figura 6, com Ponto de Reversão de coordenadas  $(R, 0)$  e diâmetro  $4R$ . Isso acontece porque, nesse caso, o círculo móvel  $c$  percorre exatamente uma volta completa ao redor do círculo fixo  $c'$  enquanto também gira uma volta completa sobre si mesmo. A Figura 11 ilustra a formação de uma Cardioide com círculo móvel  $c$  tangenciando  $c'$ .

Este processo de construção da Cardioide, fazendo-se  $R = r$  na Equação 6, é dado pelas seguintes funções paramétricas:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= 2R\cos(\theta) - R\cos(2\theta) \\ &= 2R\cos(\theta) - R(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \\ &= 2R\cos(\theta) - R\cos^2(\theta) + R\sin^2(\theta) \\ &= 2R\cos(\theta) - R(\cos^2(\theta) + R(1 - \cos^2(\theta))) \\ &= 2R\cos(\theta)(1 - \cos(\theta)) + R \end{aligned} \quad \begin{aligned} y(\theta) &= 2R\sin(\theta) - R\sin(2\theta) \\ &= 2R\sin(\theta) - 2R\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= 2R\sin(\theta)(1 - \cos(\theta)). \end{aligned}$$

Assim, a curva descrita pelo ponto  $P$  pode ser parametrizada como:

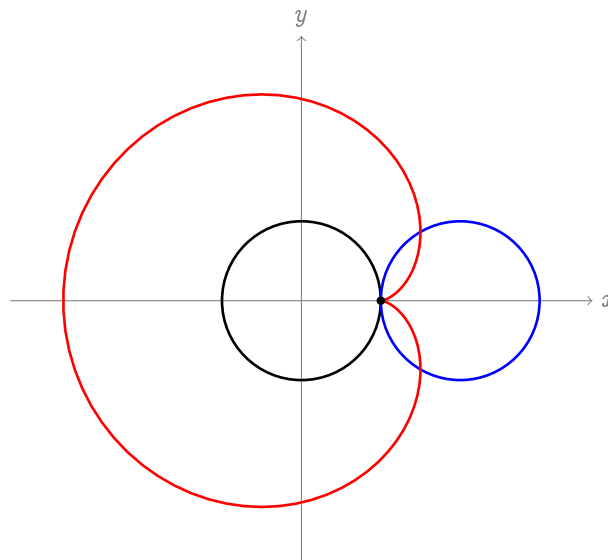
$$\vec{r}(\theta) = (R + 2R(1 - \cos(\theta))\cos(\theta), 2R(1 - \cos(\theta))\sin(\theta)),$$

ou seja,

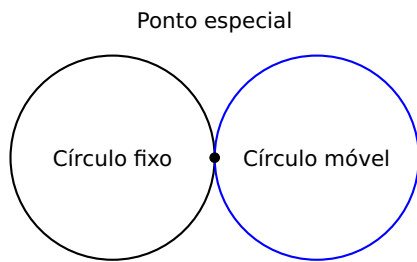
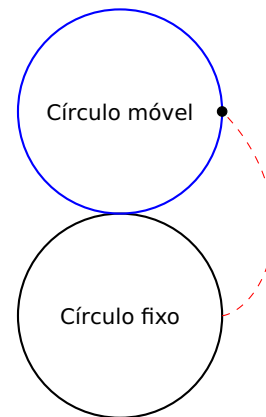
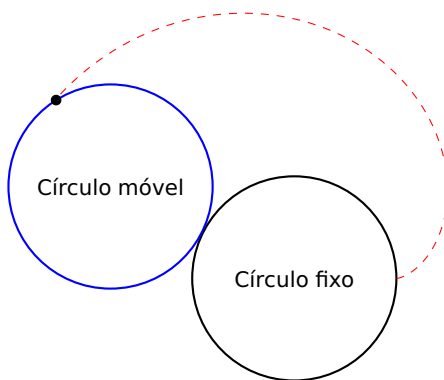
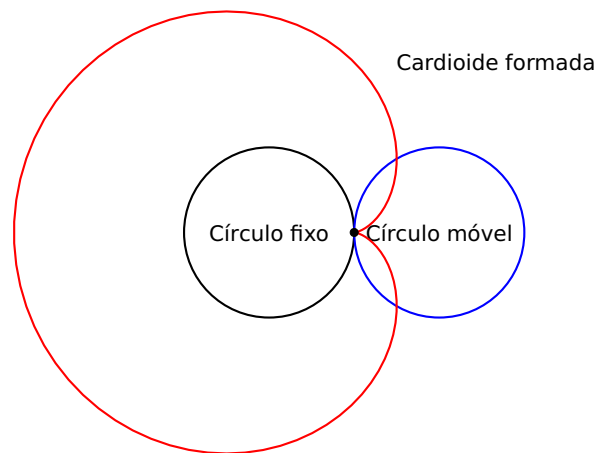
$$\vec{r}(\theta) = (R, 0) + 2R((1 - \cos(\theta))\cos(\theta), (1 - \cos(\theta))\sin(\theta)).$$

Na Figura 10 é apresentada a Cardioide juntamente com os eixos coordenados. A Figura 11 ilustra a representação da construção da Epicicloide.

**Figura 10:** Epicicloide



Fonte: Os autores

**Figura 11:** Representações gráficas de uma Epicicloide para  $R = r$ 

**Figura 12:** Circunferências tangentes pelo ponto especial  $P$ 

**Figura 13:** O círculo móvel após  $\frac{1}{4}$  de volta

**Figura 14:** O círculo móvel após  $\frac{1}{3}$  de volta

**Figura 15:** Formação completa da Cardioide após uma volta

Fonte: Os autores

Portanto, a Cardioide é um caso particular de Epicicloide, onde a igualdade dos raios  $r = R$  cria essa curva única e simétrica.

## 2.5 Evoluta da Cardioide

Seja  $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular com  $k(t) \neq 0, \forall t \in I$ . Define-se a **evoluta** de  $\vec{r}$  como o lugar geométrico dos centros dos círculos osculadores da curva, isto é, a curva  $\vec{e} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\vec{e}(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{n}(t),$$

onde  $k(t) = \frac{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}}$  e  $\vec{n}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$  representam, respectivamente, a curvatura e o vetor normal unitário no ponto  $\vec{r}(t)$ . Assim, para cada  $t_0 \in I$ , o ponto  $\vec{e}(t_0)$  corresponde ao centro do círculo osculador de  $\vec{r}$  em  $t_0$ .

Considerando a Cardioide:

$$r(\theta) = a(1 - \cos\theta),$$

obtem-se, a partir das expressões da curvatura e do vetor normal em coordenadas polares, que

$$k(\theta) = \frac{3}{2\sqrt{2}a(1 - \cos(\theta))^{1/2}}$$



e

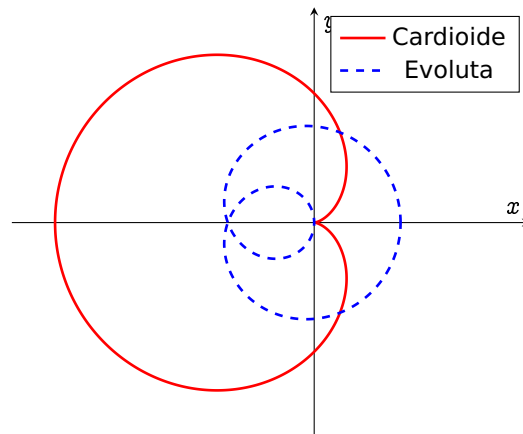
$$\vec{n}(\theta) = \frac{(-a\cos(\theta) + a\cos(2\theta), -a\sin(\theta) + a\sin(2\theta))}{\sqrt{2a(1 - \cos(\theta))^{1/2}}}.$$

Substituindo esses resultados na definição de evoluta, chega-se à parametrização

$$\vec{e}(\theta) = \left( \frac{a}{3}\cos(\theta)(1 - \cos(\theta)) + \frac{2a}{3}\cos(2\theta), \frac{a}{3}\sin(\theta)(1 - \cos(\theta)) + \frac{2a}{3}\sin(2\theta) \right).$$

Essa curva representa o lugar geométrico dos centros de curvatura da Cardioide, ou seja, sua Evoluta.

**Figura 16:** Cardioide e sua evoluta (em azul).



Fonte: Os autores

Efetuando-se uma simplificação trigonométrica:  $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ ,  $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ , tem-se:

$$e_x(\theta) = \frac{a}{3}(\cos\theta - \cos^2\theta + 4\cos^2\theta - 2) = \frac{a}{3}(3\cos^2\theta + \cos\theta - 2),$$

$$e_y(\theta) = \frac{a}{3}(\sin\theta - \sin\theta\cos\theta + 4\sin\theta\cos\theta) = \frac{a}{3}\sin\theta(1 + 3\cos\theta).$$

Assim, uma decomposição vetorial útil é

$$\vec{e}(\theta) = \frac{a}{3}(3\cos\theta + 1)(\cos\theta, \sin\theta) - \left(\frac{2a}{3}, 0\right)$$

que pode ser escrita na forma polar

$$\mathcal{R}(\theta) = \frac{a}{3}(1 + 3\cos\theta).$$

Portanto, relativamente ao ponto  $C = (\frac{2a}{3}, 0)$ , a evoluta tem equação polar

$$\mathcal{R}(\theta) = \frac{a}{3}(1 + 3\cos\theta),$$

que é um *Limaçon de Pascal* (com laço interno, pois  $3 > 1$ ). Logo, a evoluta *não* é uma Cardioide homotética da original; trata-se de um caso particular de Limaçon.

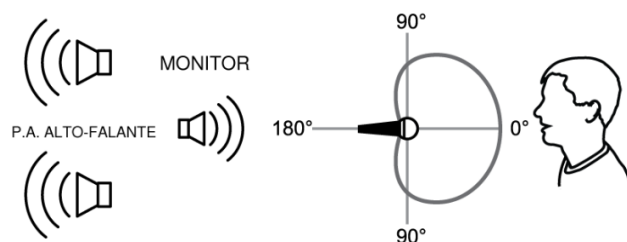
### 3 Aplicações da Cardioide

A curva Cardioide, além de seu interesse matemático intrínseco, encontra aplicações relevantes em diferentes áreas do conhecimento, evidenciando sua importância tanto teórica quanto prática. Nesta seção, serão apresentadas algumas dessas aplicações.

### 3.1 Acústica: reflexão de ondas sonoras em superfícies com formato de Cardioide

Segundo BOURNE (2009), a Cardioide é diretamente aplicada no design do Microfone Cardioide, onde o padrão de captação de som segue o mesmo comportamento da curva. Na prática, o microfone é mais sensível na direção frontal ( $\theta = 0^\circ$ ), captando o som com maior intensidade, enquanto a sensibilidade diminui gradualmente nas laterais ( $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 270^\circ$ ) e é praticamente nula na parte traseira ( $\theta = 180^\circ$ ). Essa característica permite isolar o som desejado, reduzindo a captação de ruídos indesejados provenientes de outras direções, tornando o Microfone Cardioide ideal para gravações em estúdio, palcos e outras situações onde a direcionalidade do som é crucial. Veja a Figura 17.

**Figura 17:** Exemplo de Microfone Cardioide em um palco com *Public Address* (P.A.) e monitor de retorno



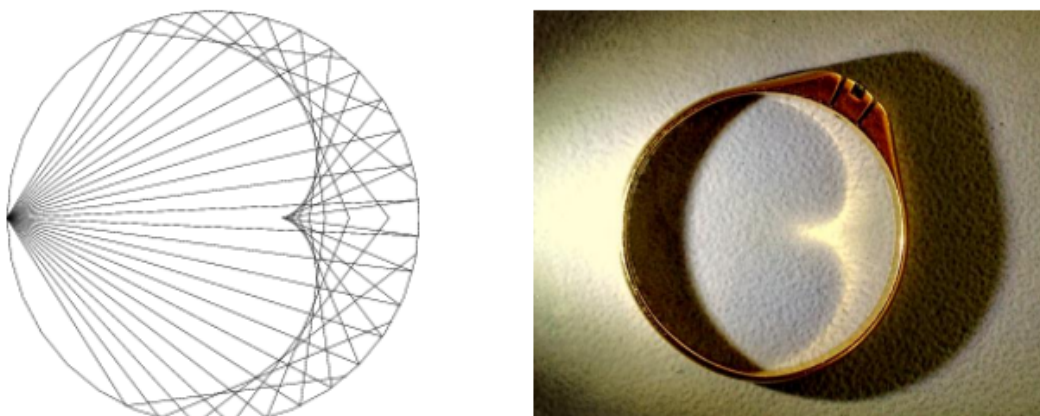
Fonte: KRUNNER (2021)

Na Figura 17 estão indicados o Monitor de Retorno, que é o sistema responsável por permitir que os músicos se escutem durante a apresentação, podendo ser feito por meio de caixas no chão ou fones de ouvido conectados a sistemas individuais de monitoramento e o P.A., que é o sistema de som voltado para o público, composto por caixas acústicas, posicionadas ao lado do palco para garantir que o som chegue com qualidade à plateia.

### 3.2 Óptica

Conforme o trabalho de (MELO FILHO et al., 2016) quando uma fonte de luz fixa em um círculo emite raios em todas as direções, cada raio bate na superfície curva e é refletido seguindo a lei da reflexão (o ângulo de entrada é igual ao de saída). Quando a luz é refletida no círculo, cada raio refletido é tangente a uma Cardioide invisível dentro do círculo. O interessante é que, quando todos esses raios são refletidos, formam a curva Cardioide. Isso ocorre porque os ângulos de reflexão fazem com que os raios se alinhem perfeitamente, como se a Cardioide fosse um molde que todos os raios refletidos tocam. É como se a própria geometria do círculo escondesse essa forma cardíaca, revelada apenas quando a luz é refletida de maneira organizada. Veja a Figura 18:

**Figura 18:** Reflexão Cardioide



Fonte: MELO FILHO et al. (2016)

### 3.3 Aplicação da Curva Cardioide na Análise Morfológica de Sementes

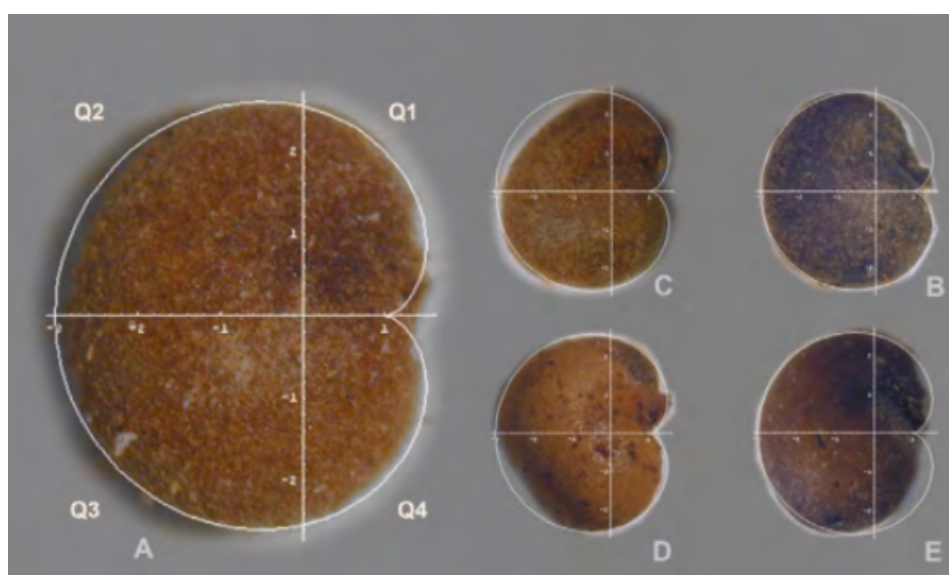
A Cardioide é utilizada como ferramenta de análise morfológica no estudo de algumas espécies de sementes (MARTÍN GÓMEZ, 2013). Este método geométrico permite avaliar com precisão a similaridade entre o contorno das sementes e a forma Cardioide ideal por meio do índice de similaridade  $j$ . A análise realizada evidenciou que sementes com maior similaridade à Cardioide, isto é, que apresentam valores elevados de  $j$ , têm uma maior qualidade.

O índice de similaridade  $j$  é dado como:

$$j = \frac{A_C}{A_C + A_D} 100, \quad (7)$$

onde  $A_C$  representa a área da Cardioide e  $A_D$  é a área entre a Cardioide e a semente. Essa comparação pode ser feita por quadrantes como mostra a Figura 19.

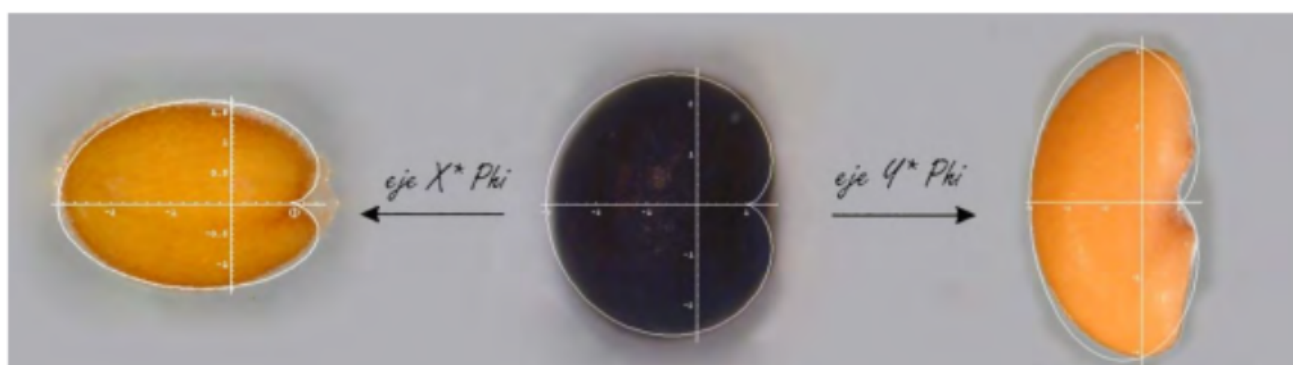
**Figura 19:** Divisão da Cardioide em Quadrantes



Fonte: MARTÍN GÓMEZ (2013, p.127)

Um exemplo da aplicação com sementes de Arabidopsis, Lotus e Medicago pode ser vista na Figura 20.

**Figura 20:** Composição: à esquerda, semente de Arabidopsis; no centro, semente de Lotus; e à direita, semente de Medicago, com as Cardioides que melhor se ajustam às suas formas



Fonte: MARTÍN GÓMEZ (2013, p.80)

## 4 Conclusão

Do ponto de vista matemático, a Cardioide oferece uma rica oportunidade para integrar diferentes temas, desde Coordenadas Polares e Cartesianas até conceitos de Cálculo Diferencial e Geometria Diferencial. Ao mesmo tempo, sua análise proporciona uma conexão rica entre ideias matemáticas abstratas e aplicações concretas, oferecendo um ponto de partida motivador para explorar como a matemática se manifesta no mundo ao nosso redor.

Conclui-se, com base neste trabalho, que o estudo da curva Cardioide é relevante e apresenta potencial para novas investigações. Durante a pesquisa teórica, foi possível encontrar aplicações interessantes da Cardioide, destacando-se seu papel na acústica, em particular na reflexão de ondas sonoras em superfícies com formato de Cardioide, frequentemente explorada em projetos de microfones direcionais e ambientes com controle acústico. Em ótica, a Cardioide surge em fenômenos de reflexão de luz em espelhos curvos, revelando propriedades geométricas interessantes (MELO FILHO et al., 2016). Por fim, foi abordada sua utilização na análise morfológica de sementes, onde a forma cardioidal serve como referência para a caracterização de estruturas naturais, contribuindo para a análise da qualidade de grãos (MARTÍN GÓMEZ, 2013). Essas aplicações ilustram como conceitos da Geometria Diferencial transcendem o campo abstrato e se conectam a contextos reais e interdisciplinares.

## Referências

- BOURNE, Murray (2009). **Coordenadas Polares e Microfones Cardioides**. URL: <https://www.intmath.com/blog/mathematics/polar-coordinates-and-cardioid-microphones-2496>.
- DELGADO, Jorge e FRENSEL, Katia (2019). **Geometria Diferencial I**. Universidade Federal Fluminense.
- EVES, Howard (2011). **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, p. 849.
- KRUNNER (2021). **Os Diferentes Padrões Polares de Microfones e seus Usos**. Home.blog. URL: <https://krunner.home.blog/2021/06/26/os-diferentes-padroes-polares-de-microfones-e-seus-usos/> (acessado em: 15/12/2025).
- MARTÍN GÓMEZ, José Javier (2013). **Análisis Morfológico de las Semillas Mediante Modelos Basados en la Curva Cardioide**. Tese de Doutorado. Cidade de Salamanca, na Espanha: Universidad de Salamanca. URL: <http://hdl.handle.net/10366/123001>.
- MELO FILHO, Renato de et al. (2016). **Princípio da Reflexão e Relações com a Cardioide, um Estudo Interdisciplinar**. Em: **Anais**. Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências. URL: <https://www.dme.ufcg.edu.br/pet/arquivos/Artigo-Conapesc-Principio-da-Reflexao-e-Relacoes-Com-a-Cardioide.pdf>.
- MORENO, Thais Santos (2018). **Introdução à Geometria Diferencial e Estudo da Curva de Limaçon de Pascal**. Trabalho de Conclusão de Curso. URL: <https://www.matematicasorocaba.ufscar.br/arquivos/tcc-thais-santos-moreno.pdf>.
- PARADINHA, Helena, OLIVEIRA, Margarida e MOREIRINHA, Otília (1999). **A Cardioide**. Em: **Educação e Matemática**, pp. 29–31.
- SILVA, Thiago Henrique Bueno da (2021). **Inserção de Curvas Planas Não-convencionais no Ensino Básico**. Dissertação de Mestrado. Cornélio Procopio: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, p. 37.
- SOUZA LUZ, Geniffer Pereira de (2017). **Curvas Parametrizadas Diferenciáveis: Parametrização de Curvas Planas e um Teorema Geral de Classificação**. Trabalho de Conclusão de Curso. Urutaí. URL: [https://repositorio.ifgoiano.edu.br/bitstream/prefix/370/1/Geniffer%20Luz%20-%20Curvas%20Parametrizadas%](https://repositorio.ifgoiano.edu.br/bitstream/prefix/370/1/Geniffer%20Luz%20-%20Curvas%20Parametrizadas%20)

[20Diferenci%C3%A1veis-Parametriza%C3%A7%C3%A3o%20de%20Curvas%20Planas%20e%20um%20Teorema%20Geral%20de%20Classifica%C3%A7%C3%A3o.pdf](#).