

Modelagem Matemática da Indutância em Linhas de Transmissão Trifásicas com Múltiplos Condutores Baseada nos Princípios do Eletromagnetismo

João Felipe Ximenes Paiva Lima

Universidade Federal do Ceará

joaofxpl@alu.ufc.br

Resumo

A indutância constitui um parâmetro de extrema relevância no estudo e dimensionamento de linhas de transmissão de energia elétrica, impactando diretamente o desempenho dos sistemas elétricos de potência tanto em regime permanente quanto durante fenômenos transitórios. Este trabalho tem como objetivo formular expressões matemáticas generalizadas para o cálculo da indutância em linhas de transmissão trifásicas, fundamentando-se nos princípios dos campos eletromagnéticos. A abordagem proposta considera diferentes configurações físicas dos condutores, bem como a disposição espacial das fases, permitindo o desenvolvimento de equações aplicáveis a diversas topologias de linhas. A pesquisa visa, assim, fornecer uma ferramenta analítica robusta e versátil, capaz de auxiliar tanto no projeto quanto na otimização de sistemas de transmissão de energia elétrica, contribuindo para o aprimoramento da modelagem de suas características elétricas.

Palavras-chaves: Indutância. Linhas de transmissão. Sistemas elétricos de potência. Campos eletromagnéticos.

Abstract

Inductance is a highly significant parameter in the study and design of power transmission lines, directly influencing the performance of electric power systems in both steady-state and transient conditions. This work aims to formulate generalized mathematical expressions for the calculation of inductance in generic three-phase transmission lines, based on the principles of electromagnetic fields. The proposed approach considers different physical configurations of the conductors, as well as the spatial arrangement of the phases, enabling the development of equations applicable to various line topologies. Thus, the research seeks to provide a robust and versatile analytical tool capable of assisting both in the design and optimization of power transmission systems, contributing to the enhancement of their electrical characteristics modeling.

Keywords: Inductance. Transmission lines. Electric power systems. Electromagnetic fields.

1 Introdução

A análise e o estudo de linhas de transmissão são essenciais para o projeto e operação eficiente de sistemas de energia elétrica. Dentre os diversos parâmetros elétricos que influenciam o desempenho de uma linha de transmissão, a indutância desempenha um papel crucial (MONTICELLI, 2011). A indutância afeta diretamente o comportamento da linha, influenciando o fluxo de potência, a queda de tensão e as perdas energéticas, além de impactar a estabilidade do sistema, especialmente em situações de transitórios e falhas.

A indutância de uma linha de transmissão está relacionada à formação de campos magnéticos em torno dos condutores à medida que correntes elétricas os percorrem. De acordo com a Lei de Biot-Savart, quando uma corrente I flui em um condutor, ela gera um campo magnético \vec{H} ao redor desse condutor. Esse campo magnético, por sua vez, dá origem ao fluxo magnético ϕ , que é a medida do campo magnético que passa através de uma superfície e está diretamente associado à corrente elétrica que gera esse campo (SADIKU, 2018). Matematicamente, o fluxo magnético é definido como a integral do produto escalar do vetor densidade de fluxo magnético $\mu_0 \vec{H}$ e do vetor de área \vec{dS} de uma superfície S :

$$\phi = \iint_S \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{dS}. \quad (1)$$

No caso da presença de múltiplos condutores carregados, como é o caso das linhas de transmissão reais, esse fluxo magnético gerado por um condutor pode influenciar os outros condutores adjacentes, o que caracteriza o fenômeno de fluxo concatenado. Assim, o fluxo magnético concatenado com um condutor em particular considera de soma de todos os campos magnéticos que atravessam a superfície delimitada pelo condutor analisado.

O fluxo concatenado com o condutor está então relacionado com a corrente que flui nele. Assim, em meios lineares, o fluxo magnético ϕ gerado por uma corrente I é diretamente proporcional a essa corrente, sendo a constante de proporcionalidade dada pela indutância L :

$$\phi = L \cdot I. \quad (2)$$

O cálculo da indutância em uma linha de transmissão pode ser feito determinando-se o fluxo concatenado com cada condutor por unidade de corrente, conforme Equação (2), dependendo basicamente da geometria do condutor e da permeabilidade magnética do meio ao redor. Assim, a indutância está relacionada à distribuição do campo magnético em torno dos condutores e à forma como o fluxo magnético se comporta dentro e fora de um condutor, levando em consideração a geometria do arranjo da linha e os efeitos de proximidade e agrupamento dos condutores na mesma.

A determinação da indutância envolve então o cálculo do fluxo magnético produzido tanto no interior do condutor quanto externamente ao ele. Para simplificação da análise matemática de linhas de transmissão, utiliza-se o conceito de raio reduzido dos condutores. O condutor com raio reduzido (que corresponde a uma fração do raio do condutor original) representa um condutor idealizado com campo magnético totalmente externo, mas equivalente ao condutor real em termos de fluxo (ZANETTA, 2006). Esse conceito facilita os cálculos do campo magnético e da indutância, pois elimina a necessidade de considerar a complexa distribuição de campo magnético no interior do condutor, permitindo uma modelagem mais simples e eficiente.

A indutância influencia diretamente a reatância série $X_L = 2\pi fL$, que, por sua vez, determina as perdas de energia e as quedas de tensão em uma linha de transmissão (WEDHWA, 2017). Ela impacta tanto a transmissão de energia quanto a resposta do sistema a variações de carga e falhas. Em linhas de transmissão longas, especialmente, valores elevados de indutância podem resultar em maiores quedas de tensão e perdas. Por esse motivo, em distâncias superiores a mil quilômetros, as linhas de transmissão em corrente contínua se mostram mais viáveis economicamente, pois, na corrente contínua, não ocorre variação temporal da corrente e, consequentemente, não há geração de fluxo magnético, eliminando os efeitos da indutância (MONTICELLI, 2011). O ponto de transição em que a corrente contínua se torna mais vantajosa do que a corrente alternada varia ao longo do tempo, sendo influenciado por diversos fatores, incluindo os avanços tecnológicos nos conversores CA/CC, cujos custos dependem da evolução das soluções implementadas.

Além disso, a indutância desempenha um papel crucial na limitação das correntes de curto-circuito, sendo essencial para a coordenação de sistemas de proteção. Ela influencia situações de operação transiente, como manobras de chaveamento ou curtos-circuitos, onde variações rápidas de corrente geram surtos de tensão indutiva, afetando a proteção e a integridade da linha.

Desse modo, modelos precisos de indutância são fundamentais para análises de fluxo de carga, estabilidade de tensão e para o dimensionamento de equipamentos como disjuntores e transformadores. O impacto acumulado da indutância ao longo de uma linha de transmissão pode ser significativo, influenciando significativamente a eficiência do sistema.

A subseção seguinte detalhará o procedimento matemático geral para a determinação da indutância em linhas de transmissão, com ênfase na generalização da matriz de indutância para configurações com múltiplos condutores por fase. O ponto de partida será uma linha monofásica com dois condutores, que servirá como base para estender o modelo a configurações mais complexas, permitindo uma análise mais precisa para sistemas de transmissão

1.1 Indutância de Linha Monofásica Bifilar

Na prática, as linhas de transmissão são constituídas por dois ou mais condutores e, em geral, a soma das correntes nesses fios é nula. Como consequência, o campo magnético é relativamente mais fraco em pontos mais afastados da linha (MONTICELLI, 2011).

A Figura 1 apresenta a seção reta de uma linha bifilar monofásica de comprimento infinito. Para o estudo e cálculo da indutância da linha considera-se aqui os condutores com raios reduzidos de modo que, portanto, só serão analisados os fluxos externos, ou seja, para distâncias do eixo maiores que o raio do condutor correspondente.

O ponto P, indicado na figura, está posicionado de forma arbitrária ao longo do eixo entre os condutores, externo a eles.

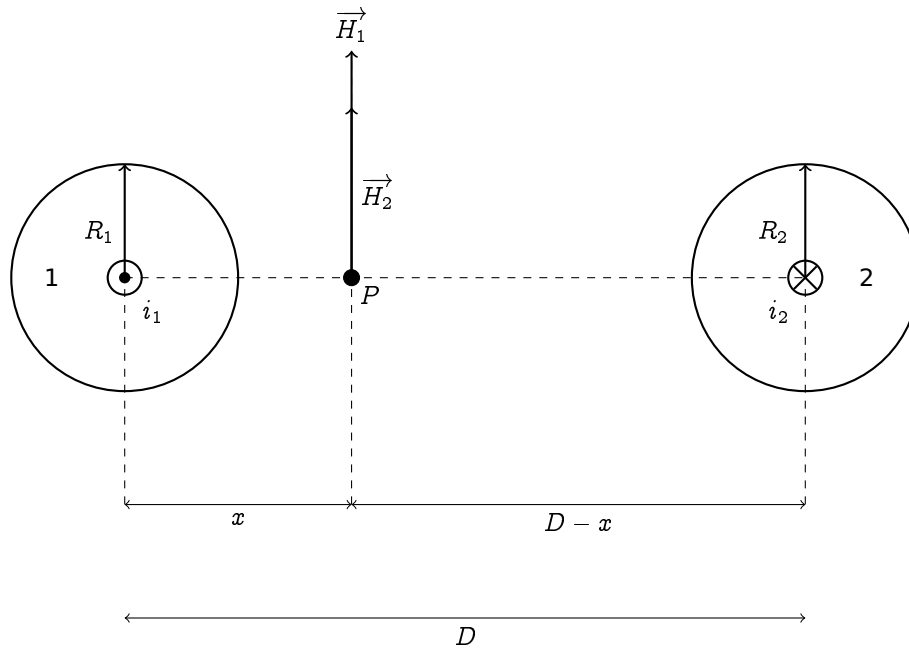


Figura 1: Representação de uma linha de transmissão monofásica bifilar

Uma primeira análise para determinação da indutância consiste em trabalhar com os vetores de campo magnético gerados no ponto P pelas correntes que circulam nos condutores da linha (SADIKU, 2018). A corrente no primeiro condutor produz um vetor campo magnético \vec{H}_1 na direção vertical \hat{j} e a corrente no segundo condutor, que flui no sentido oposto a do primeiro (soma das correntes nulas), gera um vetor campo magnético \vec{H}_2 também na direção vertical \hat{j} , conforme representado na Figura 1.

Os vetores campo magnético \vec{H}_1 e \vec{H}_2 são calculados seguindo-se a Lei de Ampère (KRISHNA, 2011), a qual possibilita calcular o campo magnético a partir de uma distribuição de densidade de corrente elétrica J ou de uma corrente elétrica i , sendo ambas estacionárias (independentes do tempo):

$$\oint_{\gamma_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 = \iint_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S}_1, \quad (3)$$

$$\oint_{\gamma_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \iint_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S}_2, \quad (4)$$

em que γ_1 e γ_2 são contornos ampèrianos, nesse caso definidos como circunferências de raios x e $D - x$, respectivamente, centralizadas, nessa ordem, nos centros dos condutores 1 e 2. S_1 e S_2 são as superfícies abertas definidas por esses contornos. Considerando então as densidades de corrente J_1 e J_2 uniformes nos condutores (desprezando-se aqui o efeito *skin* para 60 Hz), e a definição mencionada de γ_1 , γ_2 , S_1 e S_2 , de forma que os vetores diferenciais de área são paralelos às densidades de corrente, assim como os vetores diferenciais de com-

primento e os respectivos campos magnéticos, as integrais em (3) e (4) podem ser resolvidas, determinando-se, assim, os vetores \vec{H}_1 e \vec{H}_2 :

$$H_1 \oint_{\gamma_1} dl_1 = J_1 \iint_{S_1} dS_1 \Rightarrow H_1 \cdot (2\pi x) = J_1 \cdot (\pi x^2) = i_1 \Rightarrow \vec{H}_1 = \frac{i_1}{2\pi x} \hat{j}, \quad (5)$$

$$H_2 \oint_{\gamma_2} dl_2 = J_2 \iint_{S_2} dS_2 \Rightarrow H_2 \cdot (2\pi(D-x)) = J_2 \cdot \pi(D-x)^2 = i_2 \Rightarrow \vec{H}_2 = \frac{i_2}{2\pi(D-x)} \hat{j}. \quad (6)$$

O fluxo magnético ϕ gerado pelos condutores é então determinado, seguindo-se a Equação (1) como:

$$\phi = \iint_S \mu_o \vec{H} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_{i_1}} \mu_o \vec{H}_1 \cdot \vec{dS}_{i_1} + \iint_{S_{i_2}} \mu_o \vec{H}_2 \cdot \vec{dS}_{i_2}. \quad (7)$$

Os elementos de área são definidos, a partir de um retângulo infinitesimal de lados l (comprimento da linha) e dx , como $\vec{dS}_{i_{1,2}} = l dx \hat{j}$. Nesse caso, o fluxo é calculado somente devido aos campos magnéticos externos aos condutores, já que se considera na análise, os seus raios reduzidos R_1 e R_2 . Utilizando-se então as expressões desses vetores de campo magnético externo aos condutores \vec{H}_1 e \vec{H}_2 determinadas nas Equações (5) e (6), supondo ainda $R_1 = R_2 = R$ e considerando $i_1 - i_2 = 0$ (de modo que $i_1 = i_2 = i$), tem-se que as integrais da Equação (7) torna-se:

$$\phi = \int_R^{D-R} \frac{\mu_o i}{2\pi x} dx + \int_R^{D-R} \frac{\mu_o i}{2\pi(D-x)} dx, \quad (8)$$

que determina o fluxo total concatenado por unidade de comprimento.

Empregando-se técnicas de integração em (8) e considerando $D \gg R$, obtém-se:

$$\phi = \frac{\mu_o i}{\pi} \ln \left(\frac{D-R}{R} \right) \approx \frac{\mu_o i}{\pi} \ln \left(\frac{D}{R} \right). \quad (9)$$

A indutância L da linha, por unidade de comprimento, pode ser obtida a partir da expressão determinada para o fluxo ϕ na Equação (9) acima, seguindo-se a Equação (10):

$$L = \frac{\phi}{i} = \frac{\mu_o}{\pi} \ln \left(\frac{D}{R} \right). \quad (10)$$

Uma segunda análise pode ser feita, definindo-se um ponto P arbitrário fora da linha imaginária que une os centros, e que dista d_{1P} do centro do condutor 1 e d_{2P} do centro do condutor 2. O fluxo então que se concatena com a corrente i_1 tem duas componentes, sendo uma delas devido à própria corrente i_1 (ϕ_{11}) e outra devido à corrente no condutor 2, i_2 (ϕ_{12}).

O fluxo ϕ_{11} é calculado pela Equação (1), considerando $\vec{H}_1 = \frac{i_1}{2\pi x_1} \widehat{\varphi}_1$ e $\vec{dS}_1 = l dx_1 \widehat{\varphi}_1$, em que $\widehat{\varphi}_1$ é o versor perpendicular à linha imaginária que liga o centro do condutor 1 ao ponto P :

$$\phi_{11} = \iint_S \mu_o \vec{H}_1 \cdot \vec{dS}_1 = \int_{R_1}^{d_{1P}} \frac{\mu_o i_1}{2\pi x_1} dx_1 = \frac{\mu_o i_1}{2\pi} \ln \left(\frac{d_{1P}}{R_1} \right). \quad (11)$$

O fluxo ϕ_{12} é calculado igualmente pela Equação (1), considerando $\vec{H}_2 = \frac{i_2}{2\pi x_2} \widehat{\varphi}_2$ e $\vec{dS}_2 = l dx_2 \widehat{\varphi}_2$, em que $\widehat{\varphi}_2$ é o versor perpendicular à linha imaginária que liga o centro do condutor 2 ao ponto P :

$$\phi_{12} = \iint_S \mu_o \vec{H}_2 \cdot \vec{dS}_2 = \int_D^{d_{2P}} \frac{\mu_o i_2}{2\pi x_2} dx_2 = \frac{\mu_o i_2}{2\pi} \ln \left(\frac{d_{2P}}{D} \right). \quad (12)$$

A integração em (12) é feita considerando a distância D como o limite inferior, pois é a partir dessa distância medida do eixo do condutor 2, que o fluxo produzido pela corrente i_2 passa a se concatenar com o condutor 1 no qual flui corrente i_1 .

O fluxo ϕ_1 concatenado com o condutor 1 é então calculado, considerando $i_1 + i_2 = 0$:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \ln \left(\frac{d_{1P}}{R_1} \right) + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} \ln \left(\frac{d_{2P}}{D} \right),$$

$$\phi_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{D}{R_1} \right) + \ln \left(\frac{d_{1P}}{d_{2P}} \right) \right]. \quad (13)$$

Considerando o ponto P muito afastado dos condutores, $P \rightarrow \infty$, de modo que $d_{1P}/d_{2P} \rightarrow 1$ tem-se que a Equação (13) é reduzida a:

$$\phi_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \ln \left(\frac{D}{R_1} \right). \quad (14)$$

Por analogia com a Equação (14), o fluxo ϕ_2 concatenado com o condutor 2 é escrito como:

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} \ln \left(\frac{D}{R_2} \right). \quad (15)$$

Desse modo, considerando ainda $R_1 = R_2 = R$, a indutância L da linha, por unidade de comprimento, é dada pela Equação (16) seguinte:

$$L = \frac{\phi_1}{i_1} + \frac{\phi_2}{i_2} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{D}{R} \right). \quad (16)$$

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Indutância de Linha Trifásica a Três Condutores

Com a apresentação, na Introdução, dos principais aspectos relacionados ao eletromagnetismo e o subsequente procedimento de cálculo desenvolvido para a determinação da indutância de uma linha monofásica bifilar, buscou-se, a partir de um arranjo simplificado, proporcionar uma compreensão inicial do processo de análise matemática de campos e fluxos magnéticos em linhas de transmissão. Esse entendimento pode então ser estendido para a análise de arranjos trifásicos de condutores na linha por meio de uma abordagem análoga, inicialmente considerando uma linha trifásica trifilar e posteriormente generalizando os resultados para uma linha de transmissão trifásica com qualquer configuração de condutores.

A Figura 2 mostra uma linha trifásica com três condutores, um em cada fase, de raios reduzidos R_x, R_y, R_z . Um ponto P arbitrário é definido, e dista d_{xP}, d_{yP} e d_{zP} dos centros dos condutores das Fases X, Y e Z, respectivamente.

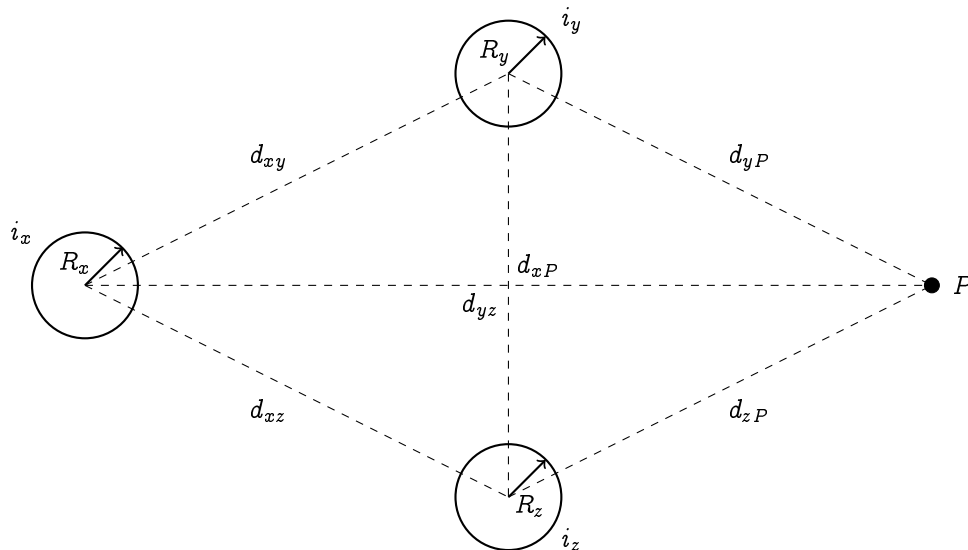


Figura 2: Arranjo de condutores em uma linha de transmissão trifásica

O mesmo procedimento executado para a linha monofásica bifilar na subseção anterior pode ser utilizado para a linha trifásica da Figura 2. Assim, de forma análoga, o fluxo que se concatena com a corrente i_x tem três componentes, sendo uma delas devido à própria corrente i_x (ϕ_{xx}), outra devido à corrente no condutor y, i_y (ϕ_{xy}) e outra devido à corrente no condutor z, i_z (ϕ_{xz}).

O fluxo ϕ_{xx} é calculado pela Equação (1), considerando $\vec{H}_x = \frac{i_x}{2\pi x} \widehat{\varphi}_x$ e $\vec{dS}_x = dx \widehat{\varphi}_x$, em que $\widehat{\varphi}_x$ é o versor perpendicular à linha imaginária que liga o centro do condutor x ao ponto P:

$$\phi_{xx} = \iint_S \mu_0 \vec{H}_x \cdot \vec{dS}_x = \int_{R_x}^{d_{xP}} \frac{\mu_0 i_x}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 i_x}{2\pi} \ln \left(\frac{d_{xP}}{R_x} \right). \quad (17)$$

A componente do fluxo ϕ_{xy} é calculada também pela Equação (1), sendo $\vec{H}_y = \frac{i_y}{2\pi x_y} \widehat{\varphi}_y$ e $\vec{dS}_y = dx_y \widehat{\varphi}_y$, em que $\widehat{\varphi}_y$ é o versor perpendicular à linha imaginária que liga o centro do condutor y ao ponto P. A integral da Equação (1) é realizada variando-se os seus limites de integração de d_{xy} , distância do eixo do condutor y até o ponto onde o fluxo de i_y se conecta ao condutor x, até d_{yP} , a distância entre o condutor y e o ponto P. Assim, o cálculo de ϕ_{xy} é realizado conforme a expressão:

$$\phi_{xy} = \iint_S \mu_0 \vec{H}_y \cdot \vec{dS}_y = \int_{d_{xy}}^{d_{yP}} \frac{\mu_0 i_y}{2\pi x_y} dx_y = \frac{\mu_0 i_y}{2\pi} \ln \left(\frac{d_{yP}}{d_{xy}} \right). \quad (18)$$

De forma semelhante, a expressão matemática para o cálculo do fluxo ϕ_{xz} pode ser determinada seguindo-se a integração:

$$\phi_{xz} = \iint_S \mu_0 \vec{H}_z \cdot \vec{dS}_z = \int_{d_{xz}}^{d_{zP}} \frac{\mu_0 i_z}{2\pi x_z} dx_z = \frac{\mu_0 i_z}{2\pi} \ln \left(\frac{d_{zP}}{d_{xz}} \right). \quad (19)$$

Assim, o fluxo total concatenado com o condutor da fase X é dado por:

$$\phi_x = \phi_{xx} + \phi_{xy} + \phi_{xz} = \frac{\mu_0 i_x}{2\pi} \ln \left(\frac{d_{xP}}{R_x} \right) + \frac{\mu_0 i_y}{2\pi} \ln \left(\frac{d_{yP}}{d_{xy}} \right) + \frac{\mu_0 i_z}{2\pi} \ln \left(\frac{d_{zP}}{d_{xz}} \right). \quad (20)$$

Separando os termos de ϕ_x , obtém-se:

$$\phi_x = \frac{\mu_0 i_x}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{R_x} \right) + \frac{\mu_0 i_y}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{d_{xy}} \right) + \frac{\mu_0 i_z}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{d_{xz}} \right) + \frac{\mu_0 i_x}{2\pi} \ln(d_{xP}) + \frac{\mu_0 i_y}{2\pi} \ln(d_{yP}) + \frac{\mu_0 i_z}{2\pi} \ln(d_{zP}). \quad (21)$$

Definindo-se,

$$\alpha = \frac{\mu_0 i_x}{2\pi} \ln(d_{xP}) + \frac{\mu_0 i_y}{2\pi} \ln(d_{yP}) + \frac{\mu_0 i_z}{2\pi} \ln(d_{zP}),$$

tomando-se também $P \rightarrow \infty$, de modo que $d_{xP}/d_{yP} \rightarrow 1$, $d_{yP}/d_{zP} \rightarrow 1$, $d_{xP}/d_{zP} \rightarrow 1$ e utilizando-se a relação $i_x + i_y + i_z = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu_0}{2\pi} [-i_y \ln(d_{xP}) - i_z \ln(d_{xP}) + i_y \ln(d_{yP}) + i_z \ln(d_{zP})], \\ \alpha &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_y \ln \left(\frac{d_{yP}}{d_{xP}} \right) + i_z \ln \left(\frac{d_{zP}}{d_{xP}} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Com o valor de $\alpha = 0$, a expressão da Equação (21) que determina o fluxo concatenado com a fase X torna-se:

$$\phi_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_x \ln \left(\frac{1}{R_x} \right) + i_y \ln \left(\frac{1}{d_{xy}} \right) + i_z \ln \left(\frac{1}{d_{xz}} \right) \right]. \quad (23)$$

Analogamente, determina-se as expressões dos fluxos concatenados com as fases Y e Z, ϕ_y e ϕ_z , respectivamente, conforme apresentado nas Equações (24) e (25):

$$\phi_y = \frac{\mu_0 i_y}{2\pi} \left[i_x \ln \left(\frac{1}{R_y} \right) + i_y \ln \left(\frac{1}{d_{xy}} \right) + i_z \ln \left(\frac{1}{d_{yz}} \right) \right], \quad (24)$$

$$\phi_z = \frac{\mu_0 i_z}{2\pi} \left[i_x \ln \left(\frac{1}{R_z} \right) + i_y \ln \left(\frac{1}{d_{xz}} \right) + i_z \ln \left(\frac{1}{d_{yz}} \right) \right]. \quad (25)$$

Com isso, uma equação matricial que relaciona os fluxos concatenados e as correntes nas respectivas fases pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix}, \quad (26)$$

em que os elementos da matriz de indutância da linha de transmissão trifásica (por unidade de comprimento) são expressos como:

$$L_{xx} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{R_x} \right), \quad (27)$$

$$L_{yy} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{R_y} \right), \quad (28)$$

$$L_{zz} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{R_z} \right), \quad (29)$$

$$L_{xy} = L_{yx} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{d_{xy}} \right), \quad (30)$$

$$L_{xz} = L_{zx} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{d_{xz}} \right), \quad (31)$$

$$L_{yz} = L_{zy} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{d_{yz}} \right). \quad (32)$$

Se a linha trifásica for equilátera, de modo que $d_{xy} = d_{yz} = d_{xz} = D$, a matriz de indutância será uma matriz diagonal, com o primeiro elemento da diagonal principal L_{x_d} , o segundo L_{y_d} e o terceiro L_{z_d} , respectivamente, iguais a:

$$L_{x_d} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{D}{R_x} \right), \quad (33)$$

$$L_{y_d} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{D}{R_y} \right), \quad (34)$$

$$L_{z_d} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{D}{R_z} \right). \quad (35)$$

Em linhas de transmissão reais, é comum a presença de mais de um condutor por fase, diferentemente do modelo trifilar analisado. Além das cargas em movimento que produzem as correntes elétricas nos condutores de uma linha, podem haver cargas excedentes que geram uma tensão entre os condutores (MONTICELLI, 2011). Essas cargas excedentes, por sua vez, concentram-se na superfície dos condutores e produzem um campo elétrico intenso, que pode causar o efeito corona, que consiste na ruptura dielétrica ao redor do condutor. Esse efeito surge principalmente em sistemas de alta tensão e ocorre quando a intensidade do campo elétrico excede o valor crítico de ionização do ar, geralmente em torno de 30 kV/cm. Como resultado, o ar ao redor dos condutores se torna eletricamente condutivo, provocando perdas de energia e podendo resultar em interferências eletromagnéticas.

Visando mitigar esse efeito, utiliza-se a ideia da gaiola de Faraday, aplicando múltiplos condutores por fase, o que cria um campo elétrico menor ao redor do conjunto, já que o campo nas regiões internas aos condutores que constituem uma fase são anulados, havendo apenas campos externos, reduzindo, assim, sua intensidade, o que diminui a chance de ocorrência do efeito corona (MONTICELLI, 2011).

Assim, torna-se comum a utilização de um ou mais condutores em cada fase da linha de transmissão e por isso a necessidade de se generalizar essa modelagem realizada para a linha trifásica, obtendo-se então uma matriz de indutância (Equação (26)) com coeficientes que permitam o cálculo da indutância em qualquer arranjo

de condutores na linha.

Para calcular o fluxo concatenado com cada condutor de uma respectiva fase, deve-se seguir o mesmo procedimento utilizado, separando-se o fluxo em três componentes, uma que contém a influência, no fluxo concatenado, dos próprios condutores da fase (além da influência do condutor analisado em si), e outras duas que expressam a influência dos condutores das demais fases.

Assim, o fluxo total concatenado com o condutor será a soma dessas contribuições, de modo que o fluxo total concatenado com a fase será a média dos fluxos concatenados com os condutores que compõe a respectiva fase (MONTICELLI, 2011).

Essa abordagem facilita a extensão da análise para sistemas complexos com múltiplos condutores e diferentes arranjos espaciais, o que é fundamental para o projeto de redes de transmissão de energia eficientes e confiáveis.

Ao generalizar essas expressões de indutância, o modelo pode abranger geometrias não uniformes e configurações assimétricas de condutores, ampliando sua aplicabilidade para cenários reais. Essa estrutura fundamental apoia técnicas avançadas de simulação, permitindo que engenheiros prevejam e otimizem o desempenho eletromagnético dos sistemas de energia sob diversas condições operacionais, contribuindo assim para a melhoria da estabilidade do sistema e a redução de interferências eletromagnéticas.

Assim, na subseção seguinte será desenvolvido esse procedimento visando a determinação dos elementos da matriz de indutância de uma linha de transmissão com um arranjo genérico de condutores.

2.2 Indutância de Linha Trifásica Genérica

A partir do desenvolvimento matemático da matriz de indutância para linhas de transmissão trifásicas trifilar realizado na subseção anterior, a análise pode ser generalizada para uma linha trifásica com n condutores na Fase X , m condutores na Fase Y e p condutores na Fase Z , representada na Figura 3.

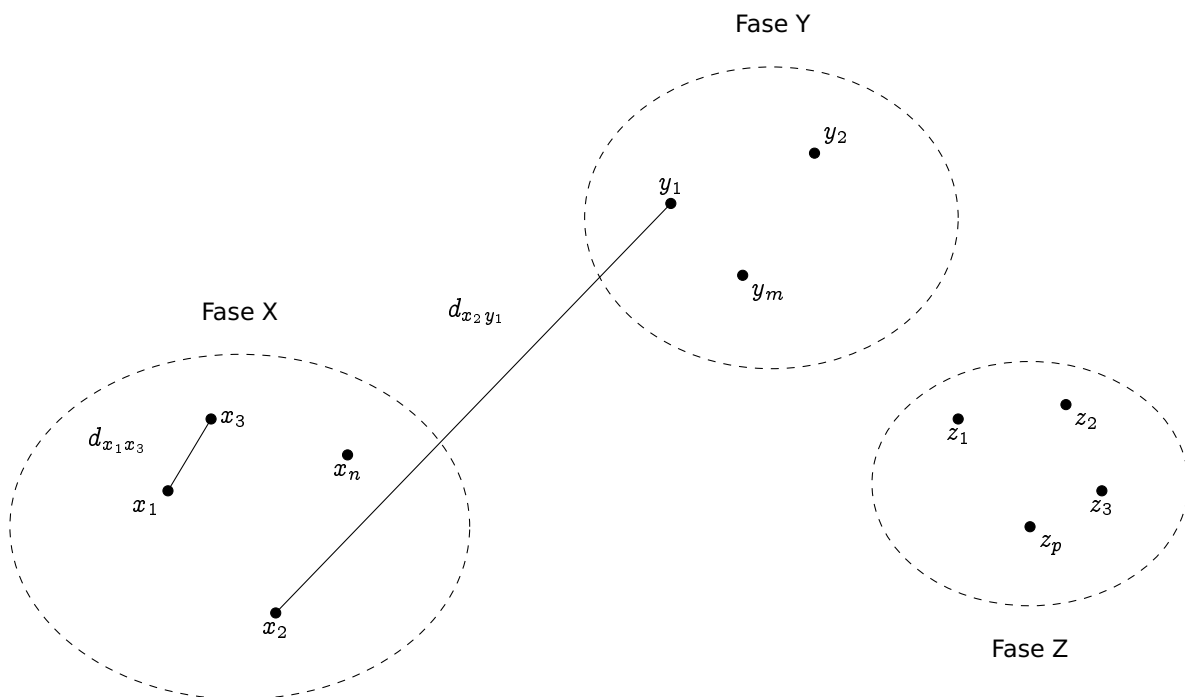


Figura 3: Linha trifásica genérica

Nesse caso, a corrente total na fase X é i_x de modo que a corrente em cada condutor será a mesma, sendo escrita como i_x/n . Raciocínio análogo é desenvolvido para as outras fases, de modo que a corrente elétrica em cada condutor das fases Y e Z são, respectivamente, i_y/m e i_z/p . A soma fasorial das correntes totais de cada fase, i_x , i_y e i_z é nula.

Assim, inicialmente, pode-se calcular o fluxo concatenado com cada condutor de cada fase. Seguindo-se o mesmo procedimento matemático adotado nas subseções anteriores, tem-se que o fluxo concatenado com o

condutor x_1 da fase X , ϕ_{x_1} , por exemplo, é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} \phi_{x_1} = \mu_0 \left(\iint_{S_{x_1}} \vec{H}_{x_1} \cdot d\vec{S}_{x_1} + \iint_{S_{x_1 x_2}} \vec{H}_{x_2} \cdot d\vec{S}_{x_1 x_2} + \cdots + \iint_{S_{x_1 x_n}} \vec{H}_{x_n} \cdot d\vec{S}_{x_1 x_n} + \iint_{S_{x_1 y_1}} \vec{H}_{y_1} \cdot d\vec{S}_{x_1 y_1} + \cdots + \right. \\ \left. + \iint_{S_{x_1 y_m}} \vec{H}_{y_m} \cdot d\vec{S}_{x_1 y_m} + \iint_{S_{x_1 z_1}} \vec{H}_{z_1} \cdot d\vec{S}_{x_1 z_1} + \cdots + \iint_{S_{x_1 z_p}} \vec{H}_{z_p} \cdot d\vec{S}_{x_1 z_p} \right). \quad (36) \end{aligned}$$

Utilizando-se o mesmo raciocínio da subseção anterior para determinação dos campos magnéticos, tem-se que a expressão da Equação (36) torna-se:

$$\begin{aligned} \phi_{x_1} = \int_{R_{x_1}}^{d_{x_1 P}} \frac{\mu_0 i_x}{2\pi n x_{x_1}} dx_{x_1} + \int_{d_{x_1 x_2}}^{d_{x_2 P}} \frac{\mu_0 i_x}{2\pi n x_{x_2}} dx_{x_2} + \cdots + \int_{d_{x_1 x_n}}^{d_{x_n P}} \frac{\mu_0 i_x}{2\pi n x_{x_n}} dx_{x_n} + \int_{d_{x_1 y_1}}^{d_{y_1 P}} \frac{\mu_0 i_y}{2\pi m x_{y_1}} dx_{y_1} + \cdots + \\ + \int_{d_{x_1 y_m}}^{d_{y_m P}} \frac{\mu_0 i_y}{2\pi m x_{y_m}} dx_{y_m} + \cdots + \int_{d_{x_1 z_p}}^{d_{z_p P}} \frac{\mu_0 i_z}{2\pi p x_{z_p}} dx_{z_p}. \quad (37) \end{aligned}$$

Resolvendo-se as integrações de (37), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_{x_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left[\frac{i_x}{n} \ln \left(\frac{d_{x_1 P}}{R_{x_1}} \right) + \frac{i_x}{n} \ln \left(\frac{d_{x_2 P}}{d_{x_1 x_2}} \right) + \cdots + \frac{i_x}{n} \ln \left(\frac{d_{x_n P}}{d_{x_1 x_n}} \right) + \frac{i_y}{m} \ln \left(\frac{d_{y_1 P}}{d_{x_1 y_1}} \right) + \frac{i_y}{m} \ln \left(\frac{d_{y_2 P}}{d_{x_1 y_2}} \right) + \cdots + \right. \\ \left. + \frac{i_y}{m} \ln \left(\frac{d_{y_m P}}{d_{x_1 y_m}} \right) + \frac{i_z}{p} \ln \left(\frac{d_{z_1 P}}{d_{x_1 z_1}} \right) + \frac{i_z}{p} \ln \left(\frac{d_{z_2 P}}{d_{x_1 z_2}} \right) + \cdots + \frac{i_z}{p} \ln \left(\frac{d_{z_p P}}{d_{x_1 z_p}} \right) \right]. \quad (38) \end{aligned}$$

Nesse caso, P é um ponto no espaço arbitrariamente escolhido, no qual são calculados os vetores de campos magnéticos associados aos fluxos magnéticos de cada condutor da linha. O resultado final da matriz de indutância da linha de transmissão independe desse ponto P , conforme será demonstrado.

Para um condutor j da fase X , a expressão do fluxo concatenado ϕ_{x_j} é então, utilizando-se a notação de somatório, generalizada como:

$$\phi_{x_j} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left[\frac{i_x}{n} \ln \left(\frac{d_{x_j P}}{R_{x_j}} \right) + \frac{i_x}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \ln \left(\frac{d_{x_i P}}{d_{x_j x_i}} \right) + \frac{i_y}{m} \sum_{i=1}^m \ln \left(\frac{d_{y_i P}}{d_{x_j y_i}} \right) + \frac{i_z}{p} \sum_{i=1}^p \ln \left(\frac{d_{z_i P}}{d_{x_j z_i}} \right) \right]. \quad (39)$$

O fluxo total médio concatenado com a corrente i_x , ϕ_x , é então escrito como:

$$\begin{aligned} \phi_x = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \phi_{x_i} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi n} \left[\frac{i_x}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{d_{x_i P}}{R_{x_i}} \right) + \frac{i_x}{n} \sum_{i=2}^n \ln \left(\frac{d_{x_1 P}}{d_{x_1 x_i}} \right) + \cdots + \frac{i_x}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \ln \left(\frac{d_{x_j P}}{d_{x_j x_i}} \right) + \cdots + \frac{i_x}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \ln \left(\frac{d_{x_n P}}{d_{x_n x_i}} \right) \right. \\ \left. + \frac{i_y}{m} \sum_{i=1}^m \ln \left(\frac{d_{y_i P}}{d_{x_1 y_i}} \right) + \cdots + \frac{i_y}{m} \sum_{i=1}^m \ln \left(\frac{d_{y_i P}}{d_{x_j y_i}} \right) + \cdots + \frac{i_y}{m} \sum_{i=1}^m \ln \left(\frac{d_{y_i P}}{d_{x_n y_i}} \right) + \frac{i_z}{p} \sum_{i=1}^p \ln \left(\frac{d_{z_i P}}{d_{x_1 z_i}} \right) + \cdots + \right. \\ \left. + \frac{i_z}{p} \sum_{i=1}^p \ln \left(\frac{d_{z_i P}}{d_{x_j z_i}} \right) + \cdots + \frac{i_z}{p} \sum_{i=1}^p \ln \left(\frac{d_{z_i P}}{d_{x_n z_i}} \right) \right]. \quad (40) \end{aligned}$$

Utilizando-se as propriedades do logaritmo e a notação de produtório, a Equação (40) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \phi_x = \frac{\mu_o}{2\pi n} & \left[\frac{i_x}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{d_{x_i P}}{R_{x_i}} \right) + \frac{i_x}{n} \ln \left(\prod_{i=2}^n \frac{d_{x_1 P}}{d_{x_1 x_i}} \right) + \cdots + \frac{i_x}{n} \ln \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{d_{x_j P}}{d_{x_j x_i}} \right) + \cdots + \frac{i_x}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{d_{x_n P}}{d_{x_n x_i}} \right) \right. \\ & + \frac{i_y}{m} \ln \left(\prod_{i=1}^m \frac{d_{y_i P}}{d_{x_1 y_i}} \right) + \cdots + \frac{i_y}{m} \ln \left(\prod_{i=1}^m \frac{d_{y_i P}}{d_{x_j y_i}} \right) + \cdots + \frac{i_y}{m} \ln \left(\prod_{i=1}^m \frac{d_{y_i P}}{d_{x_n y_i}} \right) + \frac{i_z}{p} \ln \left(\prod_{i=1}^p \frac{d_{z_i P}}{d_{x_1 z_i}} \right) + \cdots \\ & \left. + \frac{i_z}{p} \ln \left(\prod_{i=1}^p \frac{d_{z_i P}}{d_{x_j z_i}} \right) + \cdots + \frac{i_z}{p} \ln \left(\prod_{i=1}^p \frac{d_{z_i P}}{d_{x_n z_i}} \right) \right]. \quad (41) \end{aligned}$$

A expressão da Equação (41) é então reescrita de forma otimizada, com o uso de produtórios e somatórios, conforme a Equação (42) seguinte

$$\phi_x = \frac{\mu_o}{2\pi n} \left[\frac{i_x}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{d_{x_i P}}{R_{x_i}} \right) + \frac{i_x}{n} \sum_{j=1}^n \ln \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{d_{x_j P}}{d_{x_j x_i}} \right) + \frac{i_y}{m} \sum_{j=1}^m \ln \left(\prod_{i=1}^m \frac{d_{y_i P}}{d_{x_j y_i}} \right) + \frac{i_z}{p} \sum_{j=1}^p \ln \left(\prod_{i=1}^p \frac{d_{z_i P}}{d_{x_j z_i}} \right) \right]. \quad (42)$$

Os termos da Equação (42) independentes e dependentes do ponto P arbitrariamente definido, são separados na Equação (43):

$$\begin{aligned} \phi_x = \frac{\mu_o}{2\pi n} & \left\{ \frac{i_x}{n} \left[\ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{R_{x_i}} \right) + \sum_{j=1}^n \ln \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{d_{x_j x_i}} \right) \right] + \frac{i_y}{m} \sum_{j=1}^m \ln \left(\prod_{i=1}^m \frac{1}{d_{x_j y_i}} \right) + \frac{i_z}{p} \sum_{j=1}^p \ln \left(\prod_{i=1}^p \frac{1}{d_{x_j z_i}} \right) \right\} \\ & + \frac{\mu_o}{2\pi n} \left[\frac{i_x}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\prod_{i=1}^n d_{x_i P} \right) + \frac{i_y}{m} \sum_{i=1}^m \ln \left(\prod_{i=1}^m d_{y_i P} \right) + \frac{i_z}{p} \sum_{i=1}^p \ln \left(\prod_{i=1}^p d_{z_i P} \right) \right]. \quad (43) \end{aligned}$$

Definindo-se então

$$\alpha = \frac{i_x}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\prod_{i=1}^n d_{x_i P} \right) + \frac{i_y}{m} \sum_{i=1}^m \ln \left(\prod_{i=1}^m d_{y_i P} \right) + \frac{i_z}{p} \sum_{i=1}^p \ln \left(\prod_{i=1}^p d_{z_i P} \right), \quad (44)$$

considerando-se também $P \rightarrow \infty$, de modo que as distâncias $d_{x_1 P}, d_{x_2 P}, \dots, d_{x_n P} \rightarrow d_{x_j P}$; $d_{y_1 P}, d_{y_2 P}, \dots, d_{y_m P} \rightarrow d_{y_j P}$; $d_{z_1 P}, d_{z_2 P}, \dots, d_{z_n P} \rightarrow d_{z_j P}$ e utilizando-se a relação $i_x + i_y + i_z = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{i_x}{n} \ln \left(d_{x_j P}^{n^2} \right) + \frac{i_y}{m} \ln \left(d_{y_j P}^{m n} \right) + \left(\frac{-i_x - i_y}{p} \right) \ln \left(d_{z_j P}^{n p} \right), \\ \alpha &= n i_x \ln \left(\frac{d_{x_j P}}{d_{z_j P}} \right) + n i_y \ln \left(\frac{d_{y_j P}}{d_{z_j P}} \right) = 0. \quad (45) \end{aligned}$$

uma vez que $d_{x_j P}/d_{z_j P} \rightarrow 1$ e $d_{y_j P}/d_{z_j P} \rightarrow 1$

A Equação (43) do fluxo ϕ_x é então simplificada resultando na Equação (46):

$$\phi_x = \frac{\mu_o}{2\pi n} \left[\frac{i_x}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{R_{x_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{d_{x_j x_i}} \right) + \frac{i_y}{m} \ln \left(\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^m \frac{1}{d_{x_j y_i}} \right) + \frac{i_z}{p} \ln \left(\prod_{j=1}^p \prod_{i=1}^p \frac{1}{d_{x_j z_i}} \right) \right]. \quad (46)$$

Ou ainda, rescreve-se (46) como:

$$\phi_x = \frac{\mu_o}{2\pi} \left[i_x \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{R_{x_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{d_{x_j x_i}}} \right) + i_y \ln \left(\sqrt[nm]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^m \frac{1}{d_{x_j y_i}}} \right) + i_z \ln \left(\sqrt[np]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^p \frac{1}{d_{x_j z_i}}} \right) \right]. \quad (47)$$

Por procedimento análogo, determinam-se as expressões dos fluxos concatenados ϕ_y e ϕ_z associados às fases Y e Z respectivamente, as quais são escritas conforme registrado nas Equações (48) e (49):

$$\phi_y = \frac{\mu_o}{2\pi} \left[i_y \ln \left(\sqrt[m^2]{\prod_{i=1}^m \frac{1}{R_{y_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{1}{d_{y_j y_i}}} \right) + i_x \ln \left(\sqrt[nm]{\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{y_j x_i}}} \right) + i_z \ln \left(\sqrt[mp]{\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^p \frac{1}{d_{y_j z_i}}} \right) \right], \quad (48)$$

$$\phi_z = \frac{\mu_o}{2\pi} \left[i_z \ln \left(\sqrt[p^2]{\prod_{i=1}^p \frac{1}{R_{z_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \frac{1}{d_{z_j z_i}}} \right) + i_x \ln \left(\sqrt[np]{\prod_{j=1}^p \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{z_j x_i}}} \right) + i_y \ln \left(\sqrt[mp]{\prod_{j=1}^p \prod_{i=1}^m \frac{1}{d_{z_j y_i}}} \right) \right]. \quad (49)$$

A matriz de indutância da linha de transmissão trifásica genérica (por unidade de comprimento) pode então ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix}, \quad (50)$$

em que,

$$L_{xx} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{R_{x_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{d_{x_j x_i}}} \right), \quad (51)$$

$$L_{yy} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[m^2]{\prod_{i=1}^m \frac{1}{R_{y_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{1}{d_{y_j y_i}}} \right), \quad (52)$$

$$L_{zz} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[p^2]{\prod_{i=1}^p \frac{1}{R_{z_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \frac{1}{d_{z_j z_i}}} \right), \quad (53)$$

$$L_{xy} = L_{yx} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[nm]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^m \frac{1}{d_{x_j y_i}}} \right), \quad (54)$$

$$L_{xz} = L_{zx} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[np]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^p \frac{1}{d_{x_j z_i}}} \right), \quad (55)$$

$$L_{yz} = L_{zy} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[mp]{\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^p \frac{1}{d_{y_j z_i}}} \right). \quad (56)$$

A matriz de indutância apresentada na Equação (50) para uma linha de transmissão trifásica genérica não é uma matriz diagonal. A existência de elementos não nulos fora da diagonal principal na matriz de indutância em linhas de transmissão de energia elétrica pode trazer uma série de desvantagens operacionais e impactos negativos no desempenho do sistema elétrico (GLOVER et al., 2017). Essa assimetria ocasiona desequilíbrios de corrente, pois as diferentes indutâncias entre as fases geram diferentes impedâncias, além de resultar no desbalanceamento de potência reativa, o qual pode causar oscilações de tensão que se propagam por grandes distâncias na rede, comprometendo a confiabilidade do sistema.

Visando, assim, se obter uma matriz de indutância diagonal para a linha de transmissão, é realizada a técnica de transposição dos condutores. Esse procedimento envolve permutar periodicamente as posições dos condutores das fases em seções específicas da linha, de forma que, assim, cada condutor ocupe todas as possíveis posições relativas aos outros condutores e ao solo em algum ponto da linha. Nesse caso então, garante-se que, em média, cada condutor ocupe todas as posições relativas aos outros condutores e ao solo, minimizando os efeitos de assimetrias geométricas que afetam as propriedades elétricas das fases, já que as indutâncias e capacitâncias associadas a cada fase se equilibram.

A transposição em geral é realizada em intervalos regulares, podendo ser feita em estações de chaveamento, sendo necessário que as torres de transmissão sejam projetadas de modo a permitir a troca física dos condutores sem comprometer a integridade mecânica e a segurança da linha.

Para a determinação da matriz de indutância resultante da transposição, considera-se uma linha trifásica semelhante à da Figura 3 mas nesse caso com o mesmo número de condutores n em cada fase. Supõe-se também que os condutores ficam em cada uma das posições por $1/3$ do comprimento total da linha.

No primeiro terço, os condutores estão posicionado nas posições padrões de suas respectivas fases, da mesma maneira apresentada na Figura 3.

No segundo terço do percurso, ocorre a primeira permuta entre as fase. Nesse caso, por exemplo, o condutor x_1 da fase X ocupa a posição do condutor y_1 da fase Y durante o primeiro terço do seu percurso; o condutor x_2 ocupa a posição de y_2 ; ao mesmo tempo, o condutor y_1 ocupa a posição antes preenchida pelo condutor z_1 , o qual ocupa a posição deixada pelo condutor x_1 . Em resumo, os condutores da Fase X, ocupam as posições onde antes alojavam-se os condutores da fase Y, os quais agora preenchem as posições deixadas pelos condutor da fase Z, passando esses a preencherem as posições dos condutores de X.

No último terço então, os condutores da fase X, ocupam as posições deixadas pelos condutores da fase Z, os quais preenchem as posições anteriormente ocupada pelos da fase Y e, por fim, os condutores da fase Y passam a preencher as posições dos condutores de X.

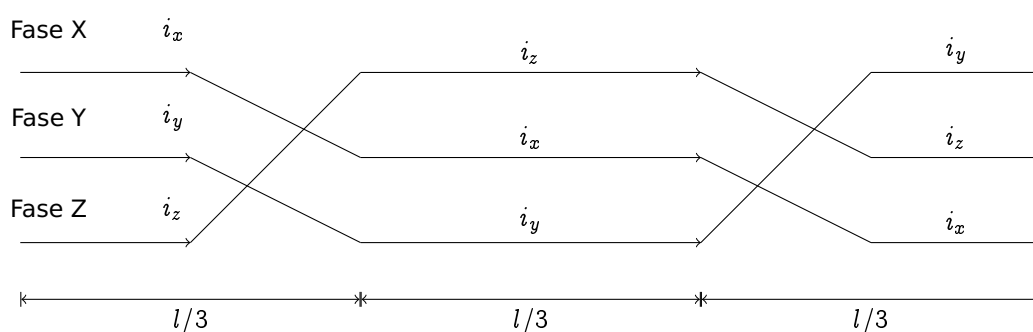


Figura 4: Transposição dos condutores

Nesse caso, o fluxo total concatenado com a fase X, considerando a transposição, ϕ_{x_T} , é calculado a partir da matriz de indutância da Equação (50), no primeiro terço do percurso. No segundo terço, os condutores da fase X ocupam as posições dos condutores da fase Y, de modo que o fluxo concatenado com a fase X é calculado agora considerando a segunda linha da equação matricial (50), modificando-se apenas as expressões das indutâncias como será descrito. No último terço de percurso, por fim, os condutores da fase X ocupam as posições dos condutores da fase Z, sendo então o fluxo concatenado com a fase X nesse trecho determinado utilizando a terceira linha da equação matricial (50), modificando-se apenas as expressões das indutâncias como será descrito.

Com isso, o fluxo ϕ_{x_T} , por unidade de comprimento, é escrito como:

$$\phi_{x_T} = \phi_{x_{1/3}} + \phi_{x_{2/3}} + \phi_{x_{3/3}}, \quad (57)$$

$$\phi_{x_T} = \frac{1}{3} (L_{xx} i_x + L_{xy_x} i_y + L_{xz_x} i_z) + \frac{1}{3} (L_{yx_x} i_x + L_{yy_x} i_y + L_{yz_x} i_z) + \frac{1}{3} (L_{zx_x} i_x + L_{zy_x} i_y + L_{zz_x} i_z). \quad (58)$$

A indutância L_{xx} é a mesma escrita na Equação (51). As expressões de L_{yy_x} , L_{zz_x} , L_{xy_x} , L_{xz_x} e L_{yz_x} são escritas, respectivamente, como:

$$L_{yy_x} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{R_{x_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{d_{y_j y_i}}} \right), \quad (59)$$

$$L_{zz_x} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{R_{x_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{d_{z_j z_i}}} \right), \quad (60)$$

$$L_{xy_x} = L_{yx_x} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j y_i}}} \right), \quad (61)$$

$$L_{xz_x} = L_{zx_x} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j z_i}}} \right), \quad (62)$$

$$L_{yz_x} = L_{zy_x} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{y_j z_i}}} \right). \quad (63)$$

Separando a expressão do fluxo na fase X com a transposição da Equação (58), nos termos com i_x , i_y e i_z , tem-se:

$$\phi_{x_T} = \phi_{xx_T} + \phi_{xy_T} + \phi_{xz_T} = \frac{i_x}{3} (L_{xx} + L_{yy_x} + L_{zz_x}) + \frac{i_y}{3} (L_{xy_x} + L_{yz_x} + L_{zx_x}) + \frac{i_z}{3} (L_{xz_x} + L_{yx_x} + L_{zy_x}), \quad (64)$$

em que ϕ_{xx_T} , ϕ_{xy_T} e ϕ_{xz_T} representam, respectivamente, as contribuições para o fluxo total transposto na fase X, geradas pelas correntes que fluem nas fases X, Y e Z, dadas as interações indutivas entre as fases.

Com isso, a partir dos termos definidos na Equação (64) e das expressões estabelecidas para as indutâncias nas Equações (59) a (63), pode-se calcular primeiramente ϕ_{xx_T} :

$$\begin{aligned} \phi_{xx_T} &= \frac{i_x}{3} (L_{xx} + L_{yy_x} + L_{zz_x}), \\ \phi_{xx_T} &= \frac{\mu_o i_x}{6\pi} \left[\ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{R_{x_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{d_{x_j x_i}}} \right) + \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{R_{x_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{d_{y_j y_i}}} \right) + \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{R_{x_i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{d_{z_j z_i}}} \right) \right], \\ \phi_{xx_T} &= \frac{\mu_o i_x}{6\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_{x_i}} \right)^3 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{d_{x_j x_i} d_{y_j y_i} d_{z_j z_i}}} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Por outro lado, uma expressão para a componente do fluxo, ϕ_{xy_T} , é obtida como:

$$\phi_{xy_T} = \frac{i_y}{3} (L_{xy_x} + L_{yz_x} + L_{zx_x})$$

$$\phi_{xy_T} = \frac{\mu_o i_y}{6\pi} \left[\ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j y_i}}} \right) + \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{y_j z_i}}} \right) + \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j z_i}}} \right) \right],$$

$$\phi_{xy_T} = \frac{\mu_o i_y}{6\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j y_i} d_{y_j z_i} d_{x_j z_i}}} \right), \quad (66)$$

E, por fim, a componente do fluxo, ϕ_{xz_T} , pode ser calculada como:

$$\phi_{xz_T} = \frac{i_z}{3} (L_{xz_x} + L_{yx_x} + L_{zy_x}),$$

$$\phi_{xz_T} = \frac{\mu_o i_z}{6\pi} \left[\ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j y_i}}} \right) + \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{y_j z_i}}} \right) + \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j z_i}}} \right) \right],$$

$$\phi_{xz_T} = \frac{\mu_o i_z}{6\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j y_i} d_{y_j z_i} d_{x_j z_i}}} \right). \quad (67)$$

Utilizando-se as Equações (65), (66) e (67) e considerando-se ainda $i_x + i_y + i_z = 0$ pode-se calcular ϕ_{x_T} , a partir da Equação (64), obtendo-se a expressão:

$$\phi_{x_T} = \frac{\mu_o i_x}{6\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_{x_i}} \right)^3 \prod_{j \neq i}^n \frac{1}{d_{x_j x_i} d_{y_j y_i} d_{z_j z_i}}}{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j y_i} d_{y_j z_i} d_{x_j z_i}}}} \right). \quad (68)$$

Utilizando-se procedimento análogo, tem-se que as expressões dos fluxos concatenados com as fases Y e Z, considerando a transposição, ϕ_{y_T} e ϕ_{z_T} são escritas, respectivamente, como:

$$\phi_{y_T} = \frac{\mu_o i_y}{6\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_{y_i}} \right)^3 \prod_{j \neq i}^n \frac{1}{d_{x_j x_i} d_{y_j y_i} d_{z_j z_i}}}{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j y_i} d_{y_j z_i} d_{x_j z_i}}}} \right), \quad (69)$$

$$\phi_{z_T} = \frac{\mu_o i_z}{6\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_{z_i}} \right)^3 \prod_{j \neq i}^n \frac{1}{d_{x_j x_i} d_{y_j y_i} d_{z_j z_i}}}{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j y_i} d_{y_j z_i} d_{x_j z_i}}}} \right). \quad (70)$$

A matriz de indutância (por unidade de comprimento) da linha de transmissão trifásica genérica com n condutores por fase e considerando a transposição, pode então ser escrita como uma matriz diagonal na Equação (71):

$$\begin{bmatrix} \phi_{x_T} \\ \phi_{y_T} \\ \phi_{z_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{x_T} & 0 & 0 \\ 0 & L_{y_T} & 0 \\ 0 & 0 & L_{z_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix}, \quad (71)$$

sendo, se os raios reduzidos de todos condutores forem iguais a R ,

$$L_{x_T} = L_{y_T} = L_{z_T} = \frac{\mu_o}{6\pi} \ln \left(\sqrt[n^2]{\frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{R} \right)^3 \prod_{j \neq i}^n \frac{1}{d_{x_j x_i} d_{y_j y_i} d_{z_j z_i}}}{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_{x_j y_i} d_{y_j z_i} d_{x_j z_i}}}} \right). \quad (72)$$

3 Conclusão

O estudo apresentado neste trabalho demonstrou a formulação de expressões matemáticas para o cálculo de indutância em linhas de transmissão trifásicas genéricas, com enfoque na análise de diferentes arranjos e configurações de condutores. Com base em princípios de eletromagnetismo, o desenvolvimento analítico abordou desde casos simples de linhas monofásicas até configurações complexas de linhas trifásicas com múltiplos condutores por fase. A generalização dessas expressões permite uma aplicabilidade mais ampla, servindo como uma ferramenta analítica robusta para o projeto e a otimização de sistemas de transmissão de energia.

Os resultados obtidos possibilitam uma modelagem mais precisa das características elétricas das linhas, contribuindo para o aumento da confiabilidade e da eficiência operacional dos sistemas de potência. A introdução da técnica de transposição dos condutores revelou-se essencial para minimizar desequilíbrios e assegurar uma matriz de indutância simétrica, fator determinante para o desempenho do sistema.

Além das contribuições práticas, o estudo também abre caminho para futuras pesquisas, sugerindo, por exemplo, o desenvolvimento de modelos computacionais que automatizem o cálculo de indutância em linhas com diferentes configurações e que possam integrar esses cálculos em simulações complexas, como nos modelos de linha longa e modelo π para sistemas de alta tensão, onde a consideração adequada da indutância é essencial para prever o desempenho da linha sob carga e pequenas variações nesses parâmetros podem ter impacto significativo na confiabilidade e eficiência do sistema, aumentando a complexidade da análise.

Referências

- GLOVER, J. Duncan, OVERBYE, T. J. e SARMA, M. S (2017). **Power system analysis and design**. Boston: Cengage Learning.
- KRISHNA, S. (2011). **Teaching calculation of inductance of power transmission lines**. Em: *International Journal of Electrical Engineering Education* 48, pp. 434–443. DOI: <https://doi.org/10.7227/IJEEE.48.4.7>.
- MONTICELLI, Alcir (2011). **Introdução a Sistemas de Energia Elétrica**. 2ª ed. São Paulo: Editora da Unicamp.
- SADIKU, M. N. O (2018). **Elements of electromagnetics**. 7ª ed. New York: Oxford University Press.
- WEDHWA, C. L (2017). **Electrical power systems**. London: New Academic Science.
- ZANETTA, Luiz Cera (2006). **Fundamentos de sistemas elétricos de potência**. São Paulo: Editora Livraria da Física.