Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco
Volume 12 - Número 1
Setembro 2025

Artigo de Divulgação

O Teorema de Müntz

Daniel Cariello
Universidade Federal de Uberlândia - Instituto de Matemática e Estatística
dcariello@ufu.br

Resumo

O teorema de Müntz generaliza o teorema de Weierstrass sobre a densidade dos polinômios no espaço das funções contínuas com a norma do supremo. Apresentamos a demonstração desse teorema para a norma 2, calculando um determinante e um limite simples.

Palavras-chaves: Teorema de Müntz, Norma 2, densidade de funções.

Abstract

Müntz theorem generalizes Weierstrass theorem on the density of the polynomial space within the space of continuous functions. Here we present a proof of Müntz theorem using the 2-norm by just computing a single determinant and a simple limit.

Keywords: Muntz theorem, 2-norm, density of functions.

1 Introdução

O Teorema de Weierstrass diz que o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais é denso no espaço das funções reais contínuas com domínio $[0,1]$ (denotado aqui por $C[0,1]$) usando a norma do supremo. Existem generalizações desse teorema como o Teorema de Stone-Weierstrass e como o Teorema de Müntz (Veja as referências (CAROTHERS, 2000; CAROTHERS, 1998; CHENEY e LIGHT, 2009; RUDIN, 1964)).

Esse último diz que o espaço real gerado pelo conjunto $A = \{t^{x_0}, t^{x_1}, t^{x_2}, \ldots\}$, onde $0 \leq x_0 < x_1 < x_2, \ldots$, é denso em $C[0,1]$ com a norma do supremo, se e só se, $x_0 = 0$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i} = \infty.$$

O motivo de x_0 ser igual a zero nesse teorema é simples. Isso se deve ao fato de que se $x_0 > 0$ então todas as funções de A se anulam no $t = 0$, consequentemente todas as funções do espaço gerado por A se anulariam no $t = 0$, impedindo elas de se aproximarem com a norma do supremo de funções contínuas que não se anulam no $t = 0$.

A razão para a série acima divergir é um pouco mais complicada, mas envolve duas ideias lindas de Álgebra Linear e uma de Análise que na nossa opinião deveriam ser conhecidas pelos estudantes de graduação.

Para não tornar o texto completamente técnico, veremos a demonstração da seguinte versão mais fraca do Teorema de Müntz, que diz que o espaço vetorial real gerado pelo conjunto A é denso em $C[0,1]$ com a norma 2, se e só se,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i} = \infty.$$

O valor de x_0 é irrelevante com respeito a norma 2.

A norma 2, a que nos referimos, é aquela induzida pelo produto interno

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{isto é} \quad \|f(t)\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, para todo $f(t) \in C[0,1]$, vale que

$$\|f(t)\|_2 \leq \|f(t)\|_\infty.$$

Essa desigualdade nos diz que se o espaço gerado por A é denso em $C[0,1]$ com a norma do supremo então ele também é denso com a norma 2. Se provarmos o Teorema de Müntz com a norma 2 e supormos que A é denso em $C[0,1]$ com a norma do supremo então, pelo que dissemos acima, A é denso em $C[0,1]$ com a norma 2 implicando na divergência da série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i}$$

pela versão do Teorema de Müntz com a norma 2.

Portanto, essa versão com a norma 2 é relevante e já prova metade do Teorema de Müntz com a norma do supremo. A outra metade pode ser lida na referência (CAROTHERS, 2009). Essa referência foi escrita pelo matemático Neal Carothers, um dos melhores expositores de matemática que conhecemos. Em todos os seus textos, as escolhas de incluir resultados interessantes e com demonstrações diferentes, os tornam excepcionais. Recomendamos também a leitura do seu livro mais famoso: Real Analysis (CAROTHERS, 2000). Esse livro é praticamente uma apologia a Análise.

Antes de descrevermos quais são essas ideias de Álgebra Linear e de Análise que precisamos para a demonstração dessa versão mais fraca do Teorema de Müntz, é interessante notar que o Teorema de Müntz é falso em $C[-1,1]$ com a norma

$$\|f(t)\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

e, portanto, também é falso com a norma do supremo.

Isso pode ser visto no fato que se $f(t)$ é uma função par e $g(t)$ é uma função ímpar em $C[-1,1]$ então

$$\|f(t) - g(t)\| = \sqrt{\|f(t)\|^2 + \|g(t)\|^2},$$

e, portanto, a distância entre $f(t)$ e $g(t)$ é maior ou igual a $\|g(t)\|$.

Agora, a sequência de funções $1, t^2, t^4, t^6, \ldots$, apesar de satisfazer a hipótese do Teorema de Müntz, gera um subespaço vetorial de funções pares de $C[-1,1]$. Cada função desse espaço dista de qualquer função ímpar ao menos o valor da norma da função ímpar, portanto esse espaço não é denso em $C[-1,1]$.

Vejamos agora as ideias para demonstrar o Teorema de Müntz em $C[0,1]$ com a norma 2.

A primeira ideia é uma fórmula para distância de vetor a subespaço que vale em qualquer espaço vetorial real com produto interno. Seja V um espaço vetorial real com produto interno e $v \in V$. Além disso, seja W subespaço de V com base $v_1, \ldots, v_n$ e $v \notin W$. Considere a matriz de Gram de ordem n dos vetores linearmente independentes $v_1, \ldots, v_n$:

$$Gram(v_1, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \ldots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \ldots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \ldots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Se d é a distância de v a W então

$$d^2 = \frac{\det(Gram(v_1, \ldots, v_n, v))}{\det(Gram(v_1, \ldots, v_n))}.$$

Uma demonstração para essa fórmula pode ser vista no Lemma 10.3. da referência (CAROTHERS, 2009) ou no artigo (CARIELLO, 2023), onde outras consequências dessa fórmula são obtidas.

O aparecimento da matriz de Gram não é uma grande surpresa, pois o vetor de W mais próximo de v é a projeção de v em W e a matriz de Gram está completamente relacionada com a projeção.

Essa fórmula nos dá que a distância de t^k, onde $k = 0, 1, \ldots$, ao espaço gerado por $t^{x_1}, \ldots, t^{x_n}$ vale

$$\left(\frac{\det(Gram(t^{x_1}, \ldots, t^{x_n}, t^k))}{\det(Gram(t^{x_1}, \ldots, t^{x_n}))} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Portanto a nossa estratégia será mostrar que para todo $k = 0, 1, \ldots$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\det(Gram(t^{x_1}, \ldots, t^{x_n}, t^k))}{\det(Gram(t^{x_1}, \ldots, t^{x_n}))} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

se e só se,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i} = \infty.$$

Isso mostra que as funções $1, t, t^2, \ldots$ podem ser aproximadas por funções do espaço gerado por $t^{x_1}, t^{x_2}, \ldots$ na norma 2, se e somente se,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i} = \infty.$$

Portanto, quando essa série divergir, o espaço gerado por A se aproxima arbitrariamente na norma 2 de qualquer polinômio. Mas os polinômios já são densos em $C[0, 1]$ na norma 2, por Weierstrass, provando o Teorema de Müntz para a norma 2.

Para mostrar que esse limite vale zero, precisamos calcular esses determinantes. Note que as matrizes envolvidas nos determinantes satisfazem

$$Gram(t^{x_1}, \ldots, t^{x_n})_{ij} = \langle t^{x_i}, t^{x_j} \rangle = \int_0^1 t^{x_i + x_j} dt = \frac{1}{x_i + x_j + 1}.$$

A matriz de ordem n cuja posição ij é ocupada pelo número $\frac{1}{x_i+x_j+1}$ é um tipo de matriz de Cauchy, que será definida na seção 2. É possível mostrar utilizando apenas operações elementares que

$$\left(\frac{\det(Gram(t^{x_1}, \ldots, t^{x_n}, t^k))}{\det(Gram(t^{x_1}, \ldots, t^{x_n}))} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{|k - x_1| \ldots |k - x_n|}{|k + x_1 + 1| \ldots |k + x_n + 1| (2k+1)^{\frac{1}{2}}}. \tag{2}$$

Finalmente, temos que mostrar que a expressão (2) converge a zero com n tendendo a infinito, se e só se,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i} = \infty.$$

Isso completa a versão do Teorema de Müntz com a norma 2 e o nosso pequeno artigo.

2 O determinante da matriz de Cauchy

Nessa seção obtemos uma fórmula para o determinante da matriz de Cauchy. Isso só é possível graças ao conhecimento de como as operações elementares nas linhas e colunas da matriz alteram o valor do determinante.

Definição 2.1

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ números positivos distintos. A matriz de Cauchy de ordem n é definida por

$$(C_n)_{ij} = \frac{1}{x_i + x_j + 1}.$$

Em particular, se escolhermos $x_i = i - 1$, obtemos a matriz de Hilbert.

Para provar o próximo teorema precisamos recordar como as operações elementares nas linhas e colunas afetam o determinante de uma matriz quadrada.

- Quando duas linhas (ou colunas) de uma matriz forem trocadas de lugar então o determinante da nova matriz vale menos o determinante da matriz original.
- Se multiplicarmos a linha (ou coluna) de uma matriz por um número diferente de zero então o determinante da nova matriz vale esse número vezes o determinante da original.
- Se somarmos a uma linha (ou coluna) de uma matriz uma outra linha (ou coluna, respectivamente) multiplicada por um número então o determinante da nova matriz é igual ao da original.

Teorema 2.1

Seja n um número natural maior que 1 e C_n a matriz de Cauchy de ordem n definida acima utilizando os números positivos distintos $x_1, \dots, x_n$. Então

$$\det(C_n) = \frac{(x_n - x_1)^2(x_n - x_2)^2 \dots (x_n - x_{n-1})^2}{(x_1 + x_n + 1)^2(x_2 + x_n + 1)^2 \dots (x_{n-1} + x_n + 1)^2(2x_n + 1)} \det(C_{n-1}).$$

Demonstração: Considere a matriz

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+x_1+1} & \frac{1}{x_1+x_2+1} & \dots & \frac{1}{x_1+x_{n-1}+1} & \frac{1}{x_1+x_n+1} \\ \frac{1}{x_2+x_1+1} & \frac{1}{x_2+x_3+1} & \dots & \frac{1}{x_2+x_{n-1}+1} & \frac{1}{x_2+x_n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}+x_1+1} & \frac{1}{x_{n-1}+x_2+1} & \dots & \frac{1}{x_{n-1}+x_{n-1}+1} & \frac{1}{x_{n-1}+x_n+1} \\ \frac{1}{x_n+x_1+1} & \frac{1}{x_n+x_2+1} & \dots & \frac{1}{x_n+x_{n-1}+1} & \frac{1}{x_n+x_n+1} \end{pmatrix}$$

Passo 1: Denote as linhas da matriz por $l_1, \dots, l_n$. Multiplique as linhas de C_n de tal maneira que a última coluna só contenha 1's. Para isso, faremos as seguintes operações

$$l_1 \leftrightarrow (x_1 + x_n + 1)l_1, l_2 \leftrightarrow (x_2 + x_n + 1)l_2, \dots, l_n \leftrightarrow (x_n + x_n + 1)l_n.$$

O valor do determinante é alterado pelo produto $(x_1 + x_n + 1) \dots (x_n + x_n + 1)$. Vamos dividir por $(x_1 + x_n + 1) \dots (x_n + x_n + 1)$ para compensar. Assim,

$$\det(C_n) = \frac{1}{(x_1 + x_n + 1) \dots (x_n + x_n + 1)} \det \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_n+1}{x_1+x_1+1} & \frac{x_1+x_n+1}{x_1+x_2+1} & \dots & \frac{x_1+x_n+1}{x_1+x_{n-1}+1} & 1 \\ \frac{x_2+x_n+1}{x_2+x_1+1} & \frac{x_2+x_n+1}{x_2+x_2+1} & \dots & \frac{x_2+x_n+1}{x_2+x_{n-1}+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_{n-1}+x_n+1}{x_{n-1}+x_1+1} & \frac{x_{n-1}+x_n+1}{x_{n-1}+x_2+1} & \dots & \frac{x_{n-1}+x_n+1}{x_{n-1}+x_{n-1}+1} & 1 \\ \frac{x_n+x_n+1}{x_n+x_1+1} & \frac{x_n+x_n+1}{x_n+x_2+1} & \dots & \frac{x_n+x_n+1}{x_n+x_{n-1}+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 2: Subtraia a última coluna das anteriores. Isso não altera o valor do determinante, então

$$\det(C_n) = \frac{1}{(x_1+x_n+1)\dots(x_n+x_n+1)}\det\begin{pmatrix} \dfrac{x_n-x_1}{x_1+x_1+1} & \dfrac{x_n-x_2}{x_1+x_2+1} & \dots & \dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_1+x_{n-1}+1} & 1 \\[2ex] \dfrac{x_n-x_1}{x_2+x_1+1} & \dfrac{x_n-x_2}{x_2+x_2+1} & \dots & \dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_2+x_{n-1}+1} & 1 \\[2ex] \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\[2ex] \dfrac{x_n-x_1}{x_{n-1}+x_1+1} & \dfrac{x_n-x_2}{x_{n-1}+x_2+1} & \dots & \dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}+x_{n-1}+1} & 1 \\[2ex] \dfrac{x_n-x_1}{x_n+x_1+1} & \dfrac{x_n-x_2}{x_n+x_2+1} & \dots & \dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_n+x_{n-1}+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 3: Coloque os numeradores das frações das colunas em evidência para fora do determinante.

$$\det(C_n) = \frac{(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}{(x_1+x_n+1)\dots(x_n+x_n+1)}\det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_1+x_1+1} & \dfrac{1}{x_1+x_2+1} & \dots & \dfrac{1}{x_1+x_{n-1}+1} & 1 \\[2ex] \dfrac{1}{x_2+x_1+1} & \dfrac{1}{x_2+x_2+1} & \dots & \dfrac{1}{x_2+x_{n-1}+1} & 1 \\[2ex] \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\[2ex] \dfrac{1}{x_{n-1}+x_1+1} & \dfrac{1}{x_{n-1}+x_2+1} & \dots & \dfrac{1}{x_{n-1}+x_{n-1}+1} & 1 \\[2ex] \dfrac{1}{x_n+x_1+1} & \dfrac{1}{x_n+x_2+1} & \dots & \dfrac{1}{x_n+x_{n-1}+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 4: Denote as colunas da matriz por $c_1, \dots, c_n$. Multiplique as colunas da matriz de tal maneira que a última linha só contenha 1's. Para isso, faremos as seguintes operações

$$c_1 \leftrightarrow (x_n+x_1+1)c_1,\ c_2 \leftrightarrow (x_n+x_2+1)c_2,\ \dots,\ c_{n-1} \leftrightarrow (x_n+x_{n-1}+1)c_{n-1}.$$

O valor do determinante é alterado pelo produto $(x_n+x_1+1)\dots(x_n+x_{n-1}+1)$. Vamos dividir por $(x_n+x_1+1)\dots(x_n+x_{n-1}+1)$ para compensar. Logo,

$$\det(C_n) = \frac{(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}{(x_n+x_1+1)^2\dots(x_n+x_{n-1}+1)^2(x_n+x_n+1)}\times$$

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{x_n+x_1+1}{x_1+x_1+1} & \dfrac{x_n+x_2+1}{x_1+x_2+1} & \dots & \dfrac{x_n+x_{n-1}+1}{x_1+x_{n-1}+1} & 1 \\[2ex] \dfrac{x_n+x_1+1}{x_2+x_1+1} & \dfrac{x_n+x_1+1}{x_2+x_2+1} & \dots & \dfrac{x_n+x_{n-1}+1}{x_2+x_{n-1}+1} & 1 \\[2ex] \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\[2ex] \dfrac{x_n+x_1+1}{x_{n-1}+x_1+1} & \dfrac{x_n+x_1+1}{x_{n-1}+x_2+1} & \dots & \dfrac{x_n+x_{n-1}+1}{x_{n-1}+x_{n-1}+1} & 1 \\[2ex] 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 5: Subtraia a última linha das anteriores. Isso não altera o valor do determinante, então

$$\det(C_n) = \frac{(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})}{(x_n + x_1 + 1)^2 \dots (x_n + x_{n-1} + 1)^2 (x_n + x_n + 1)} \times$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{x_n - x_1}{x_1 + x_1 + 1} & \frac{x_n - x_1}{x_1 + x_2 + 1} & \dots & \frac{x_n - x_1}{x_1 + x_{n-1} + 1} & 0 \\ \frac{x_n - x_2}{x_2 + x_1 + 1} & \frac{x_n - x_2}{x_2 + x_2 + 1} & \dots & \frac{x_n - x_2}{x_2 + x_{n-1} + 1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} + x_1 + 1} & \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} + x_2 + 1} & \dots & \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} + x_{n-1} + 1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 6: Coloque os numeradores das frações das linhas em evidência para fora do determinante.

$$\det(C_n) = \frac{(x_n - x_1)^2\dots(x_n - x_{n-1})^2}{(x_n + x_1 + 1)^2 \dots (x_n + x_{n-1} + 1)^2 (x_n + x_n + 1)} \times$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 + x_1 + 1} & \frac{1}{x_1 + x_2 + 1} & \dots & \frac{1}{x_1 + x_{n-1} + 1} & 0 \\ \frac{1}{x_2 + x_1 + 1} & \frac{1}{x_2 + x_2 + 1} & \dots & \frac{1}{x_2 + x_{n-1} + 1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} + x_1 + 1} & \frac{1}{x_{n-1} + x_2 + 1} & \dots & \frac{1}{x_{n-1} + x_{n-1} + 1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 7: Aplique a expansão de Laplace na última coluna e obtenha

$$\det(C_n) = \frac{(x_n - x_1)^2\dots(x_n - x_{n-1})^2}{(x_n + x_1 + 1)^2 \dots (x_n + x_{n-1} + 1)^2 (x_n + x_n + 1)} \det(C_{n-1}).$$

■

Corolário 2.1

O determinante de C_n é positivo quando $x_1, \dots, x_n$ são números positivos distintos.

Demonstração: Segue por indução em n utilizando o teorema anterior e lembrando que $C_1 = (\frac{1}{2x_1+1})$, portanto $\det(C_1) = \frac{1}{2x_1+1} > 0$. ■

Corolário 2.2

Sejam $x_1, \dots, x_n$ números positivos distintos. A distância de t^k ao subespaço gerado por $t^{x_1}, \dots, t^{x_n}$ utilizando a norma 2 da integral discutida na introdução vale

$$\frac{|k - x_1||k - x_2|\dots|k - x_n|}{|k + x_1 + 1||k + x_2 + 1|\dots|k + x_n + 1|(2k+1)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3}$$

Demonstração: Basta notar que $Gram(t^{x_1},\dots,t^{x_n},t^k)=C_{n+1}$, onde $x_{n+1}=k$, e que $Gram(t^{x_1},\dots,t^{x_n})=C_n$. Pelo corolário anterior, $\det(Gram(t^{x_1},\dots,t^{x_n}))=\det(C_n)>0$. Assim, se um t^{x_i} fosse combinação linear dos outros t^{x_j}, a linha i de $Gram(t^{x_1},\dots,t^{x_n})$ seria combinação linear das outras, o que não pode pois o determinante é diferente de zero. Portanto, $t^{x_1},\dots,t^{x_n}$ são linearmente independentes.

Pela fórmula (1) temos que a distância de t^k ao espaço cuja base é $t^{x_1},\dots,t^{x_n}$ vale $\sqrt{\dfrac{\det(C_{n+1})}{\det(C_n)}}$. Pelo teorema 2.1, isso vale

$$\frac{|k-x_1||k-x_2|\dots|k-x_n|}{|k+x_1+1||k+x_2+1|\dots|k+x_n+1|(2k+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

■

3 O limite converge a zero

Para finalizar, agora o nosso objetivo é determinar quando

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|k-x_1||k-x_2|\dots|k-x_n|}{|k+x_1+1||k+x_2+1|\dots|k+x_n+1|(2k+1)^{\frac{1}{2}}}=0.$$

Essa informação é dada no seguinte teorema.

Teorema 3.1

Sejam $x_1,x_2,\dots$ números positivos tais que $0<x_1<x_2<\dots$. Então,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|k-x_1||k-x_2|\dots|k-x_n|}{|k+x_1+1||k+x_2+1|\dots|k+x_n+1|(2k+1)^{\frac{1}{2}}}=0, \text{ para todo } k=0,1,2,\dots,$$

se e só se,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{x_i}=\infty.$$

Demonstração: É claro que esse limite vale zero se k for igual a algum dos x_i's , independente se a série divergir ou não. Entretanto o teorema pede para o limite ser zero para todos os $k=0,1,\dots$ e como todos os x_i's são positivos, existe ao menos um k diferente de todos os x_i's, o $k=0$. Então podemos supor, sem perda de generalidade, que estamos trabalhando com um k diferente de todos os x_i's. Como $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de números positivos, vamos supor primeiramente que o seu limite é um número positivo L e, depois, vamos supor que seu limite é infinito. No primeiro caso temos

$$\frac{|k-x_i|}{|k+x_i+1|}\xrightarrow{i\to\infty}\frac{|k-L|}{|k+L+1|}<1.$$

Portanto existe $0<B<1$ e $m\in\mathbb{N}$ tal que se $i>m$ então

$$\frac{|k-x_i|}{|k+x_i+1|}\leq B.$$

Assim para $n>m$

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{|k-x_i|}{|k+x_i+1|}\right)(2k+1)^{-\frac{1}{2}}\leq\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{|k-x_i|}{|k+x_i+1|}\right)B^{n-m}(2k+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Como $0<B<1$, pela última desigualdade, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{|k-x_i|}{|k+x_i+1|}\right)(2k+1)^{-\frac{1}{2}}=0. \tag{4}$$

Agora suponha que $\lim_{i\to\infty} x_i = \infty$. Então existe $\epsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que se $i > m$ temos

$$\epsilon < 1 - \frac{k}{x_i} < 1 + \frac{k+1}{x_i} < 2.$$

Pelo teorema do valor médio, quando $i > m$, temos que

$$\ln\left(1 - \frac{k}{x_i}\right) - \ln\left(1 + \frac{k+1}{x_i}\right) = \frac{-2k-1}{x_i a_i}, \tag{5}$$

onde $\epsilon < 1 - \frac{k}{x_i} < a_i < 1 + \frac{k+1}{x_i} < 2$.

Logo,

$$\frac{-2k-1}{\epsilon x_i} < \frac{-2k-1}{x_i a_i} < \frac{-2k-1}{2x_i}. \tag{6}$$

Assim, pelas equações (5) e (6), temos

$$\left(\frac{-2k-1}{\epsilon}\right)\frac{1}{x_i} < \ln\left(\frac{1 - \dfrac{k}{x_i}}{1 + \dfrac{k+1}{x_i}}\right) < \left(\frac{-2k-1}{2}\right)\frac{1}{x_i},$$

o que implica em

$$e^{\left(\frac{-2k-1}{\epsilon}\right)\frac{1}{x_i}} < \frac{1 - \dfrac{k}{x_i}}{1 + \dfrac{k+1}{x_i}} < e^{\left(\frac{-2k-1}{2}\right)\frac{1}{x_i}}.$$

Portanto, segue que

$$e^{\frac{-2k-1}{\epsilon}\left(\sum\limits_{i=m+1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)} < \prod_{i=m+1}^{n}\frac{1 - \dfrac{k}{x_i}}{1 + \dfrac{k+1}{x_i}} = \prod_{i=m+1}^{n}\frac{|k - x_i|}{|k + x_i + 1|} \tag{7}$$

e

$$\prod_{i=m+1}^{n}\frac{|k - x_i|}{|k + x_i + 1|} = \prod_{i=m+1}^{n}\frac{1 - \frac{k}{x_i}}{1 + \frac{k+1}{x_i}} < e^{\frac{-2k-1}{2}\left(\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)}. \tag{8}$$

Se supormos que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{x_i} = \infty,$$

temos duas possibilidades:

(i) $\lim_{i\to\infty} x_i = L$ e, pela equação (4), temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{|k - x_i|}{|k + x_i + 1|}\right)(2k+1)^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

(ii) $\lim_{i\to\infty} x_i = \infty$ e, pela equação (8), segue que

$$\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{|k - x_i|}{|k + x_i + 1|}\right)\left(\prod_{i=m+1}^{n}\frac{|k - x_i|}{|k + x_i + 1|}\right)(2k+1)^{-\frac{1}{2}} \leq \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{|k - x_i|}{|k + x_i + 1|}\right)(2k+1)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-2k-1}{2}\left(\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{|k - x_i|}{|k + x_i + 1|}\right)(2k+1)^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Agora, se supormos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i} < \infty,$$

então pela equação (7) temos que

$$\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{|k-x_i|}{|k+x_i+1|}\right)\left(\prod_{i=m+1}^{n} \frac{|k-x_i|}{|k+x_i+1|}\right)(2k+1)^{-\frac{1}{2}} >$$
$$\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{|k-x_i|}{|k+x_i+1|}\right)(2k+1)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-2k-1}{\epsilon}\left(\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)} >$$
$$\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{|k-x_i|}{|k+x_i+1|}\right)(2k+1)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-2k-1}{\epsilon}\left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{x_i}\right)} > 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{|k-x_i|}{|k+x_i+1|}\right)(2k+1)^{-\frac{1}{2}} \neq 0,$$

o que finaliza a prova. ■

Referências

CARIELLO, Daniel (2024). **A Matriz de Gram, a Regra de Cramer e a Distância entre Subespaços Afins**. Em: ***Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco*** 11.1.

CAROTHERS, Neal Lamar (1998). **A short Course on Approximation Theory**. Em: ***Bowling Green State University, Bowling Green, OH*** 38.

CAROTHERS, Neal Lamar (2000). **Real Analysis**. Cambridge University Press.

CHENEY, Elliott Ward e LIGHT, William Allan (2009). **A Course in Approximation Theory**. Vol. 101. American Mathematical Society.

RUDIN, Walter (1964). **Principles of Mathematical Analysis**. New York: McGraw-Hill.