Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco
Volume 11 - Número 2
Dezembro 2024

Artigo de Divulgação

Sobre uma Demonstração da Identidade de Tepper

Andrei Doronin
Universidade de São Paulo
andreidoronin96@usp.br

Francyélio Campos Lima
Universidade de São Paulo
francyelio@usp.br

Resumo

Neste trabalho será apresentado um tópico que relaciona polinômios e combinatória, o resultado conhecido como Identidade de Tepper. Mais precisamente, com base em uma análise de tabelas envolvendo progressões aritméticas, veremos uma abordagem mais detalhada da demonstração encontrada em (GOULD, 1978).

Palavras-chaves: Combinatória. Polinômios. Identidade de Tepper. Diferenças sucessivas.

Abstract

In this work we will see a topic relating combinatorics and polynomials, the result known as Tepper's Identity. More precisely, we will present a more detailed proof of the one that can be found in (GOULD, 1978), based on our analysis of tables involving arithmetic progressions.

Keywords: Combinatorics. Polynomials. Tepper's Identity. Successive differences.

1 Introdução

Seja $n \in \mathbb{N}$. A identidade

$$n! = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}(\alpha - i)^n, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

é conhecida como *Identidade de Tepper* e será o objeto central do nosso estudo. Com base em tal igualdade, a literatura nos fornece vários outros resultados, como o de Egorychev, o obtido por Zhao e Wang, o de Gould e o de Bayat e Teimoori.

A Identidade de Tepper é comumente usada como ferramenta pelos matemáticos. Por exemplo, Sun aplicou a identidade de Tepper para obter algumas expressões e fórmulas combinatórias interessantes. Além disso, utilizando uma função geradora exponencial e polinômios de Bell, Yang obteve diversas identidades que possuem relações com a identidade de Tepper.

Observação 1.1

Todas essas citações podem ser encontradas em (KRUCHININ et al., 2020).

Apresentaremos, inicialmente, algumas ideias intuitivas que servirão de inspiração para obtermos a Identidade de Tepper. Para tal, introduziremos conceitos que relacionam sequências de ordem superior e diferenças sucessivas, os quais se encontram descritos nas seguintes definições:

Definição 1.1

Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definimos o *operador diferença* como a nova sequência $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma nova sequência, podemos reaplicar o operador diferença, isto é, $(\Delta^1[\Delta^1 a_n])_{n\in\mathbb{N}} = (\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Realizando o mesmo processo recursivamente, obtemos $(\Delta^k a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $k \geq 3$.

Observação 1.2

É fácil ver que o operador diferença é um operador linear, i.e.,

$$(\Delta^1 a_n + b_n) = (\Delta^1 a_n) + (\Delta^1 b_n)$$

e

$$(\Delta^1 c \cdot a_n) = c \cdot (\Delta^1 a_n)$$

para quaisquer sequências $(a_n), (b_n)$ e qualquer escalar $c \in \mathbb{R}$. Tendo isso em vista, torna-se mais simples analisar as composições.

Definição 1.2

Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita uma *progressão aritmética de ordem* k se é necessário aplicar o operador diferença k vezes para obter uma sequência constante.

Assim, uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem k se o operador diferença $(\Delta^k a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência constante e os operadores diferença $(\Delta^i a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para $i < k$, são sequências não constantes.

Exemplo 1.1

A sequência $a_n = 3n$ é uma progressão aritmética de primeira ordem, pois a sequência $\Delta^1 a_n = 3(n+1) - 3n = 3$ é constante. Além disso, a sequência $a_n = n^2$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois $\Delta^1 a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, de modo que a sequência $\Delta^2 a_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2$ é constante.

Com essas ferramentas em mãos, é possível criar tabelas que servirão de motivação posteriormente:

Exemplo 1.2: $a_n = n^3$

n	a_n	$\Delta^1 a_n$	$\Delta^2 a_n$	$\Delta^3 a_n$	$\Delta^4 a_n$	$\Delta^5 a_n$
0	0	1	6	6	0	0
1	1	7	12	6	0	0
2	8	19	18	6	0	0
3	27	37	24	6	0	0
4	64	61	30	6	0	0
5	125	91	36	6	0	0
6	216	127	42	6	0	$\vdots$
7	242	169	48	6	$\vdots$	$\vdots$
8	512	217	54	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	729	271	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1000	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Exemplo 1.3: $a_n = n^4$

n	a_n	$\Delta^1 a_n$	$\Delta^2 a_n$	$\Delta^3 a_n$	$\Delta^4 a_n$	$\Delta^5 a_n$
0	0	1	14	36	24	0
1	1	15	50	60	24	0
2	16	65	110	84	24	0
3	81	175	194	108	24	0
4	256	369	302	132	24	0
5	625	671	434	156	24	0
6	1296	1105	590	180	24	$\vdots$
7	2401	1695	770	204	$\vdots$	$\vdots$
8	4096	2465	974	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	6561	3439	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	10000	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Exemplo 1.4: $a_n = n^5$

n	a_n	$\Delta^1 a_n$	$\Delta^2 a_n$	$\Delta^3 a_n$	$\Delta^4 a_n$	$\Delta^5 a_n$
0	0	1	30	150	240	120
1	1	31	180	390	360	120
2	32	211	570	750	480	120
3	243	781	1320	1230	600	120
4	1024	2101	2550	1830	720	120
5	3125	4651	4380	2550	840	120
6	7776	9031	6930	3390	960	$\vdots$
7	16807	15961	10320	4350	$\vdots$	$\vdots$
8	32768	26281	14670	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	59049	40951	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1000000	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

A intuição nos leva a crer que, para $a_n = n^k$, temos

$$\Delta^k a_n = k!. \tag{1}$$

Na tentativa de provar a afirmação acima, apresentaremos dois resultados oriundos da análise combinatória. Mas, antes de enunciarmos tais resultados, observe primeiro que, retornando ao operador diferença, podemos constatar indutivamente que

$$\Delta^k a_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} a_{k+n-i}.$$

De fato, note que

$$\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = (-1)^0 \binom{1}{0} a_{1+n-0} + (-1)^1 \binom{1}{1} a_{1+n-1} = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{1}{i} a_{1+n-i}$$

Esse será nosso passo indutivo. Agora, assumindo a hipótese $\Delta^k a_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} a_{k+n-i}$, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta^{k+1}a_n &= \Delta^k a_{n+1} - \Delta^k a_n \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a_{k+n+1-i} - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a_{k+n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a_{k+n+1-i} - \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\binom{k}{i-1}a_{k+n+1-i} \\
&= a_{k+n+1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a_{k+n+1-i} + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\binom{k}{i-1}a_{k+n+1-i} \\
&= a_{k+n+1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a_{k+n+1-i} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i-1}a_{k+n+1-i} + (-1)^{k+1}a_n \\
&= a_{k+n+1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1})a_{k+n+1-i} + (-1)^{k+1}a_n \\
&= a_{k+n+1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i}a_{k+n+1-i} + (-1)^{k+1}a_n \\
&= \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}a_{k+n+1-i},
\end{aligned}
$$

o que conclui o processo indutivo.

Dessa forma, sendo $a_n = n^k$, segue que

$$\Delta^k a_n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a_{k+n-i} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k+n-i)^k.$$

Em particular, para $n = 0$, temos

$$\Delta^k a_0 = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a_{k-i} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^k.$$

Agora serão enunciados os dois resultados de análise combinatória.

Teorema 1.1: Sobrejeções

O número de sobrejeções de um conjunto com k elementos para um conjunto com m elementos é dado por

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^k.$$

Demonstração: Esta demonstração pode ser encontrada em (MLADENOVIĆ et al., 2019). ■

Corolário 1.1

Uma função de $\{1,\ldots k\}$ a $\{1,\ldots k\}$ é uma sobrejeção se, e somente se, for uma bijeção. Como existem $k!$ bijeções em $\{1,\ldots k\}$ (todas as permutações), obtemos a identidade

$$k! = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^k.$$

Agora é fácil ver que a igualdade (1) decorre imediatamente dos resultados acima, mas apenas para a primeira linha de cada tabela, ou seja, quando $n = 0$. Nosso principal objetivo é obter (1) em sua generalidade, isto é, uma expressão matemática na qual é possível variar um parâmetro para obter todas as infinitas linhas ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

2 Demonstração detalhada

Teorema 2.1: Identidade de Tepper

Sejam $n \in \mathbb{N}$. Então

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (\alpha - i)^n, \tag{2}$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Na seção anterior, conseguimos provar a validade da afirmação para $\alpha = n$. Nosso objetivo agora é mostrar que a identidade é válida para qualquer α real e, portanto, em particular, para qualquer α da forma $\alpha = n + x$, o que permitirá obter a igualdade (1) em sua generalidade. Para tal, seja $P_0(x) = x^n$ um polinômio. Definimos a seguinte sequência de polinômios:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_0(x+1) - P_0(x) \\ P_2(x) &= P_1(x+1) - P_1(x) \\ P_3(x) &= P_2(x+1) - P_2(x) \\ &\vdots \\ P_n(x) &= P_{n-1}(x+1) - P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Afirmamos que $\deg(P_{k+1}) = \deg(P_k) - 1$ com $0 \leq k \leq n-1$. De fato, se tomarmos um polinômio $P_k(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ de grau m (isto é, $a_m \neq 0$), obtemos

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= P_k(x+1) - P_k(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m} a_i (x+1)^i - \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} a_i [(x+1)^i - x^i] \\ &= a_m[(x+1)^m - x^m] + a_{m-1}[(x+1)^{m-1} - x^{m-1}] + \sum_{i=0}^{m-2} a_i[(x+1)^i - x^i] \\ &= \underbrace{a_m \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} x^i}_{grau\ m-1} + \underbrace{a_{m-1} \sum_{i=0}^{m-2} \binom{m-1}{i} x^i}_{grau\ m-2} + \underbrace{\sum_{i=0}^{m-2} a_i [(x+1)^i - x^i]}_{grau\ \leq m-2}. \end{aligned}$$

Assim, note que $\deg(P_{k+1}) = m - 1 = \deg(P_k) - 1$. Dessa forma, como $\deg(P_0) = n$, obtemos que $\deg(P_k) = n - k$. Em particular, $\deg(P_n) = 0$. Definimos o coeficiente líder de um polinômio como sendo o coeficiente da indeterminada com maior expoente. Denote por A_{P_k} o coeficiente líder de P_k. Afirmamos que A_{P_k} é dado por

$$A_{P_k} = \begin{cases} 1, \ se\ k = 0; \\ n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}, \ se\ 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Com efeito, tome $P_k(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ de modo que $A_{P_k} = a_m$. Note que

$$P_{k+1}(x) = a_m \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} x^i + a_{m-1} \sum_{i=0}^{m-2} \binom{m-1}{i} x^i + \sum_{i=0}^{m-2} a_i[(x+1)^i - x^i]$$

$$\begin{aligned}P_{k+1}(x) &= a_m\binom{m}{m-1}x^{m-1} + a_m\sum_{i=0}^{m-2}\binom{m}{i}x^i + a_{m-1}\sum_{i=0}^{m-2}\binom{m-1}{i}x^i + \sum_{i=0}^{m-2}a_i[(x+1)^i - x^i]\\ &= a_m\cdot m\cdot x^{m-1} + \underbrace{a_m\sum_{i=0}^{m-2}\binom{m}{i}x^i}_{grau\ m-2} + \underbrace{a_{m-1}\sum_{i=0}^{m-2}\binom{m-1}{i}x^i}_{grau\ m-2} + \underbrace{\sum_{i=0}^{m-2}a_i[(x+1)^i - x^i]}_{grau\ \leq m-2}.\end{aligned}$$

Assim, o coeficiente de x^{m-1} em $P_{k+1}(x)$ é $a_m\cdot m$ e, como $\deg(P_{k+1}) = m-1$, temos que $A_{P_{k+1}} = a_m\cdot m$. Desse modo, obtemos que $A_{P_{k+1}} = A_{P_k}\cdot\deg(P_k)$. Em particular, $A_{P_1} = A_{P_0}\cdot\deg(P_0) = 1\cdot n = n$. Mostremos agora, por indução, que $A_{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ para qualquer inteiro k entre 1 e n.

Para $k=1$, temos $A_{P_1} = n = \frac{n!}{(n-1)!}$, e então o caso $k=1$ é satisfeito. Ainda, assumindo que a igualdade é válida para algum inteiro não-negativo k, obtemos

$$A_{P_{k+1}} = A_{P_k}\cdot\deg(P_k) = \frac{n!}{(n-k)!}\cdot(n-k) = \frac{n!}{(n-(k+1))!},$$

finalizando nossa indução. Particularmente, note que $A_{P_n} = n!$.

Por fim, afirmamos que, para $1\leq k\leq n$, temos

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}P_0(x+k-i).$$

De fato, note que

$$P_1(x) = P_0(x+1) - P_0(x) = \sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{1}{i}P_0(x+1-i).$$

Ou seja, a relação é satisfeita para $k=1$. Assim, aplicando novamente a técnica de indução finita com

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}P_0(x+k-i)$$

sendo a hipótese indutiva, obtemos

$$\begin{aligned}P_{k+1}(x) &= P_k(x+1) - P_k(x)\\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}P_0(x+1+k-i) - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}P_0(x+k-i)\\ &= P_0(x+1+k) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}P_0(x+1+k-i) - \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\binom{k}{i-1}P_0(x+1+k-i)\\ &= P_0(x+1+k) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}P_0(x+1+k-i) + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i}\binom{k}{i-1}P_0(x+1+k-i)\\ &= P_0(x+1+k) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}P_0(x+1+k-i) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i-1}P_0(x+1+k-i) + (-1)^{k+1}P_0(x)\\ &= P_0(x+k+1) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1})P_0(x+1+k-i) + (-1)^{k+1}P_0(x)\\ &= P_0(x+k+1) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i}P_0(x+1+k-i) + (-1)^{k+1}P_0(x)\\ &= \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}P_0(x+1+k-i),\end{aligned}$$

finalizando a indução. ■

3 Considerações finais

Com base no que foi feito logo acima, obtemos, em particular, que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} P_0 (x + n - i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (x + n - i)^n .$$

Como P_n é um polinômio de grau 0 que possui coeficiente líder $n!$, segue que $P_n(x)$ é constante e vale $n!$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (x + n - i)^n , \ \forall \, x \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, ao tomarmos $x \in \mathbb{N}$, a igualdade (1) segue de imediato.

Por fim, para simplificar a expressão, tome $\alpha = x + n$. Como x é um real qualquer, perceba que α também é um real qualquer, o que nos leva, finalmente, à expressão original da identidade

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (\alpha - i)^n , \ \forall \, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Concluímos, após este estudo, que a Identidade de Tepper pode ser abordada com mais detalhes, embora já tenha sido extensivamente trabalhada por diversos matemáticos. Em nosso trabalho, vemos isso através de tabelas que envolvem progressões aritméticas de ordem superior e diferenças sucessivas.

Referências

GOULD, Henry W (1978). **Euler's formula for n th differences of powers**. Em: ***The American Mathematical Monthly*** 85.6, pp. 450–467.

KRUCHININ, Dmitry, KRUCHININ, Vladimir e SIMSEK, Yilmaz (2020). **Generalized Tepper's identity and its application**. Em: ***Mathematics*** 8.2, p. 243.

MLADENOVIĆ, Pavle, MLADENOVIĆ e CHERNYK (2019). **Combinatorics**. Springer.