Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco
Volume 12 - Número 1
Setembro 2025

Artigo de Iniciação Científica

A Importância do Cálculo Diferencial e Integral nos Negócios e Finanças

Luciana Aparecida Alves
Universidade Federal de Uberlândia - Instituto de Matemática e Estatística
luciana.alves@ufu.br

Lucas de Castro Bianchi
Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Ciências Contábeis
lucas.bianchi@ufu.br

Resumo

O presente trabalho aborda a relevância do cálculo diferencial e integral nos negócios e finanças. Essa área da matemática lida com o estudo das taxas de variação e quantidades acumuladas, permitindo análises complexas e precisas em diversos contextos. No mundo empresarial, o cálculo é utilizado para a tomada de decisões consistentes, fornecendo ferramentas para análise e modelagem de fenômenos complexos. A matemática financeira é um exemplo de aplicação do cálculo, sendo utilizada para descrever flutuações de valor do dinheiro ao longo do tempo e determinar taxas de juros, valores presentes e futuros de investimentos, entre outros. O cálculo diferencial e integral, portanto, auxilia no processo de análise financeira, análise de dados e otimização de processos de produção, permitindo identificar oportunidades estratégicas de crescimento.

Palavras-chaves: Matemática Financeira. Cálculo Diferencial e Integral. Matemática Aplicada. Decisão Estratégica.

Abstract

The present work discusses the relevance of differential and integral calculus in business and finance. This field of mathematics deals with the study of rates of change and accumulated quantities, allowing for complex and precise analyses in various contexts. In the business world, calculus is used for consistent decision-making, providing tools for analyzing and modeling complex phenomena. Financial mathematics is an example of the application of calculus, used to describe fluctuations in the value of money over time and to determine interest rates, present and future values of investments, among other things. Therefore, differential and integral calculus play an important role in financial analysis, data analysis, and the optimization of production processes, making it possible to identify strategic opportunities for growth.

Keywords: Financial Mathematics. Differential and Integral Calculus. Applied Mathematics. Strategic Decision-Making.

1 Introdução

O cálculo diferencial e integral lida com o estudo das taxas de variação e as quantidades acumuladas. Nesse sentido, são estudadas como as funções se alteram e se comportam em pequenas mudanças em sua entrada. Por exemplo, pode ser usada para determinar a taxa de crescimento de uma população, a velocidade de um objeto em movimento, ou a taxa de variação de uma função de demanda ou oferta em economia. Por outro lado, o cálculo integral concentra-se na acumulação de quantidades infinitesimais, como a área sob uma curva, o volume de um sólido ou o trabalho feito por uma força variável. Essa técnica pode ser usada para determinar a área de um terreno, o volume de uma piscina ou a quantidade de trabalho necessária para levantar um objeto. Um dos contextos em que o cálculo é especialmente útil é no mundo empresarial. De forma objetiva, o cálculo auxilia a tomada de decisões consistentes em negócios e finanças, fornecendo ferramentas para a análise e modelagem de fenômenos complexos. Em (BARROS, 2013) a relevância do cálculo aplicado aos negócios é reforçada ao citar (GOLDSTEIN et al., 2000), afirmando que:

(...) analistas de negócios tem cada vez mais buscado métodos matemáticos para descrever o que está acontecendo, para prever os efeitos de várias políticas alternativas e decidir sobre estratégias razoáveis entre um enorme número de possibilidades. Entre os métodos empregados está o cálculo aplicado aos negócios.

No que tange à matemática financeira, ferramenta utilizada no ambiente empresarial, o cálculo é utilizado para descrever as flutuações do valor do dinheiro ao longo do tempo. Isso inclui a determinação das taxas de juros, o cálculo de valores presentes e futuros de investimentos, o estudo de séries temporais de preços de ações e o quadro de riscos financeiros. Assim sendo, cálculo e a matemática financeira são áreas intrinsecamente conectadas. A respeito do cálculo diferencial, por exemplo, é possível utilizá-lo para calcular a taxa de variação de uma função de produção em relação a uma variável específica, como a relação de um determinado produto em relação aos custos de produção. Por outro lado, o cálculo integral pode ser utilizado para o cálculo de uma área total sob uma curva, o que pode ser relevante para determinar o total de vendas de um produto ao longo de um determinado período. Além disso, a análise de séries temporais, tem suas aplicações ao prever a demanda futura de um produto ou serviço para auxiliar empresas a definir os parâmetros de produção e estoque. Em suma, o cálculo é uma ferramenta utilizada em negócios e finanças para modelar e analisar fenômenos complexos. Desde a determinação de taxas de juros e a avaliação de investimentos até a análise de dados financeiros. Assim, o seguinte trabalho visa enfatizar a relevância do cálculo no contexto empresarial e destacar as aplicações práticas do cálculo na análise financeira, análise de dados e otimização de processos de produção para melhor identificar oportunidades estratégicas de crescimento.

2 A Matemática financeira e o cálculo diferencial integral

O Cálculo Financeiro consiste no estudo de relações monetárias em determinados pontos ao longo do tempo. Por exemplo, ao comprarmos um certo produto cujo valor à vista é conhecido, por meio de um dado número de prestações constantes, é através do Cálculo Financeiro que determinaremos o valor de cada prestação. Em resumo, conhecida a cotação estabelecida pelo mercado, chamada de *taxa de juros*, o Cálculo Financeiro nos mostra como calcular o valor de cada prestação. De maneira geral, podemos dizer que essa área tem por objetivo estudar a evolução do valor do dinheiro ao longo do tempo.

Em (FARO, 2006), *juro* é definido como a remuneração, a qualquer título, atribuída ao fator capital. Nesse sentido, considere C_0, definido como *capital inicial* (também conhecido como *valor presente*), denotado por PV na calculadora financeira HP12C (FEIJÓ, 2015). Por outro lado, o *valor futuro* (também chamado de *capital acumulado* ou *montante*), denotado por FV na calculadora financeira HP12C (FEIJÓ, 2015), representa o valor do capital inicial após um período de tempo. Embora essencialmente equivalentes, eles não são iguais. A *taxa de juros* i desempenha um papel crucial, determinando o valor futuro que o capital inicial proporcionalmente assumirá, dentro das considerações mercadológicas. Assim, os juros J, resultantes da aplicação de i ao C_0, se originam e se integram de acordo com o regime de capitalização adotado. Dois regimes fundamentais coexistem: os juros simples e os juros compostos, assuntos que serão tratados no tópico subsequente.

A diferença entre valor futuro e o capital inicial são os juros. Dessa forma, para um intervalo de tempo de n períodos, temos que $J_n = FV - PV$, ou ainda:

$$J_n = C_n - C_{n-1}, \tag{1}$$

Em que C_n denota o capital acumulado no período n.

Assim, podemos definir matematicamente a taxa de juros i_n como sendo a taxa de remuneração do capital inicial ao longo de um período n. Ou seja:

$$i_n = \frac{J_n}{C_{n-1}}.$$

Os juros podem ser incorporados de maneira discreta ou contínua. Em outras palavras, eles podem ser acumulados ao final de períodos elementares estabelecidos ou em intervalos infinitamente pequenos (FEIJÓ, 2015). A abordagem da capitalização contínua pode ser considerada como um limite da forma discreta quando a duração dos períodos se aproxima de zero.

O estudo da capitalização contínua será aprofundada na Seção 2.3, oferecendo uma compreensão mais abrangente desses conceitos interligados.

2.1 Regime de Capitalização Simples

No âmbito do *regime de capitalização simples*, seja este contínuo ou discreto, a taxa de juros exerce seu impacto única e exclusivamente sobre o capital inicial (FEIJÓ, 2015). Em outras palavras, apenas o capital inicial isolado é suscetível à geração de juros. Nesse contexto, não ocorre o reinvestimento dos juros para o propósito de originar incrementos subsequentes. O desenvolvimento do patrimônio, ou seja, a acumulação de capital, apresenta uma natureza linear.

Ao considerarmos juros simples temos que o juro J_n é dado por $J_n = C_0 i_{n+1}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + J_0 = C_0(1 + i_1) \\
C_2 &= C_1 + J_1 = C_0(1 + i_1) + C_0 i_2 = C_0(1 + i_1 + i_2) \\
&\vdots \\
C_n &= C_{n-1} + J_{n-1} = C_0(1 + i_1 + \ldots + i_{n-1}) + C_0 i_n \\
C_n &= C_0(1 + i_1 + \ldots + i_{n-1} + i_n).
\end{aligned}$$

Para uma taxa constante i, após n períodos de tempo, a fórmula para a apuração dos juros simples é expressa da seguinte maneira:

$$C_n = C_0(1 + in).$$

Para o cálculo do montante C_x, para $n < x < n + 1$, onde n é um número inteiro, basta que se execute uma interpolação linear entre os valores C_n e C_{n+1}.

Conforme abordado anteriormente, é válido destacar que os juros são acumulados em uma progressão linear. Essa característica pode ser mais claramente visualizada na imagem representada abaixo, a qual ilustra a sobreposição dos regimes de capitalização simples nos casos contínuo (função linear em vermelho) e discreto (função escada):

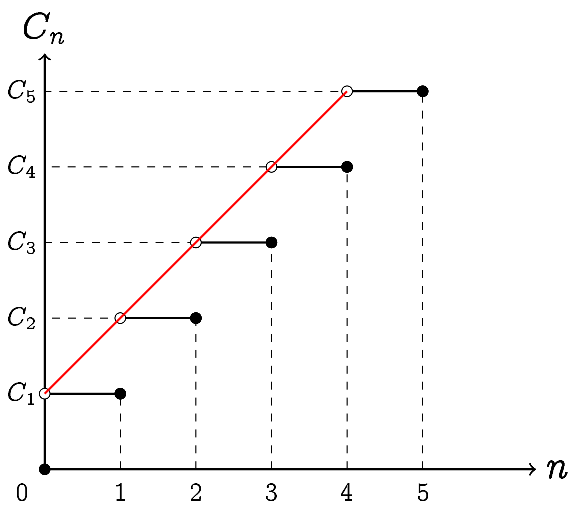

Figura 1: Regime de capitalização simples: casos discreto e contínuo.

2.2 Regime de Capitalização Composta

Dentro do contexto dos juros compostos, seja em sua modalidade discreta ou contínua, é possível inferir: os juros ao final de cada período são somados ao capital inicial, permitindo que esses juros se acumulem e gerem mais juros no próximo período (FEIJÓ, 2015). Isso resulta em um aumento constante do montante total a cada período subsequente. O montante total, que é a soma do capital inicial com os juros obtidos, torna-se a nova base na qual a taxa de juros é aplicada. Basicamente, essa prática contínua de reinvestir os juros tem um efeito notável, e o crescimento resultante é cada vez mais rápido ao longo do tempo. Observamos um crescimento exponencial do capital inicial ao longo do tempo.

Para uma taxa constante i, em n períodos de tempo, a fórmula para a apuração dos juros compostos é expressa da seguinte maneira:

$$C_n = C_0(1+i)^n. \tag{2}$$

Considerando J_n os juros acumulados, ou melhor, a variação dos montantes C_n, teremos:

$$J_n = C_{n-1}i_n.$$

Os montantes de capital acumulado serão representados, conforme 1, da seguinte forma:

$$C_n = C_{n-1} + J_n = C_{n-1} + C_{n-1}i_n = C_{n-1}\left(1+i_n\right).$$

Em n períodos:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 + J_1 = C_0\left(1+i_1\right) \\ C_2 &= C_1 + J_2 = C_0\left(1+i_1\right)\left(1+i_2\right) \\ &\vdots \\ C_n &= C_{n-1} + J_n = C_0\left(1+i_1\right)\left(1+i_2\right)\left(1+i_3\right)\ldots\left(1+i_n\right) \end{aligned}$$

A taxa de juros i é constante, dessa forma, $i_n = i$, para todo n. Ou seja,

$$C_n = C_0\underbrace{(1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i)\ldots(1+i)}_{n \text{ vezes}} = C_0(1+i)^n.$$

Conforme abordado anteriormente, é válido destacar que os juros são acumulados em uma progressão exponencial. Essa característica pode ser mais claramente visualizada no gráfico apresentado abaixo:

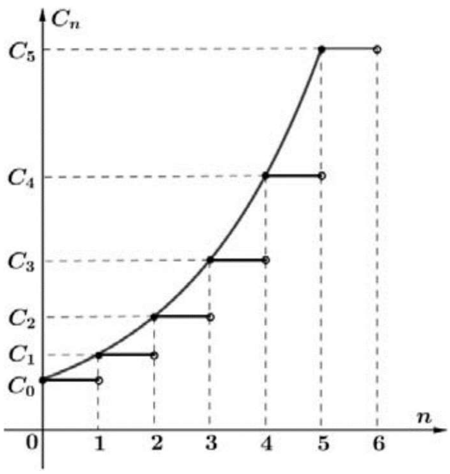

Figura 2: Regime de capitalização composta.
Fonte: (BARROS, 2013).

2.2.1 Comparando os regimes de capitalização

Sobrepondo os gráficos dos dois regimes, é possível encontrar uma conclusão relevante para este estudo (BARROS, 2013). A discrepância entre os dois regimes emerge após o primeiro período ($n = 1$). No paradigma dos juros simples, a disparidade é sutil, já que os juros se aplicam apenas sobre o montante inicial. Porém, no cenário de juros compostos, a discrepância ganha impulso de forma acelerada, uma vez que os juros atuam sobre o montante total, que já incorpora juros acumulados pregressamente. À medida que os períodos avançam, a discrepância entre as consequências dos dois regimes se amplia substancialmente, como mostra o gráfico 3.

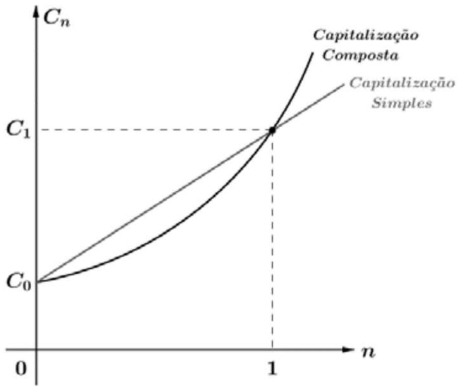

Figura 3: Comparação entre os regimes de capitalização simples e composta.
Fonte: (BARROS, 2013).

Em síntese, enquanto a capitalização simples apresenta um incremento linear dos juros, a capitalização composta culmina num crescimento exponencial.

2.3 Capitalização Contínua

Conforme (BARROS, 2013), capitalização contínua representa uma extensão avançada dos regimes de capitalização simples e composta, estabelecendo uma relação profunda entre o tempo, a taxa de juros e o crescimento monetário. Diferente dos regimes tradicionais, onde os períodos são discretos e as taxas de juros são definidas para intervalos fixos, a capitalização contínua opera em uma esfera onde o tempo é infinitesimal e as taxas de juros são instantâneas.

Em um regime de capitalização contínua a uma taxa de juros i constante, o capital acumulado C_n, após n períodos, é dada através da relação apresentada abaixo:

$$C_n = C_0 e^{in}.$$

Para ilustrar a conexão intrínseca entre a fórmula mencionada e o regime de capitalização discreta com intervalos de tempo infinitesimais, procederemos pela utilização da fórmula supracitada, considerando o regime composto. Considere m como o número de capitalizações. Dessa forma, pela equação (2), segue que

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}.$$

Importante ressaltarmos aqui que considerar intervalos de tempo de $\frac{1}{m}$ equivale a considerar m capitalizações porque, ao dividir o período total em m partes iguais, cada fração de tempo corresponde a uma aplicação dos juros. Assim, em vez de capitalizar apenas uma vez no final do período, o capital é atualizado m vezes em intervalos de duração $\frac{1}{m}$, resultando no mesmo efeito de se ter m capitalizações ao longo do período.

Devido à natureza do regime de capitalização contínua em questão, é crucial que o valor de m seja conduzido em direção ao infinito. Com isso em mente, continuamos da seguinte forma:

$$C_n = \lim_{m \to \infty} C_0 \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m\right]^n = C_0 \left[\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m\right]^n.$$

Para resolvermos o limite acima, considere a seguinte substituição $t = \dfrac{m}{i}$. Logo, $\dfrac{1}{t} = \dfrac{i}{m}$. Além disso, à medida que m tende ao infinito, t também tenderá. Desse modo, o limite é reescrito como:

$$C_n = C_0 \left[\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{ti}\right]^n.$$

Pelo 2° limite fundamental, tratado em (GUIDORIZZI, 2008), sabe-se que:

$$\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} = e.$$

Com isto,

$$C_n = C_0 \left[\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{n.i} = C_0 e^{ni}.$$

2.4 Taxa efetiva, taxa nominal e taxa equivalente

Nessa seção, exploraremos algumas categorias de classificação das taxas de juros: a *taxa efetiva*, a *taxa nominal* e a *taxa equivalente*. Cada uma dessas taxas possui características distintas e aplicações específicas que desempenham um papel crucial na análise financeira, na avaliação de investimentos e na tomada de decisões econômicas informadas.

2.4.1 Taxa Nominal

A taxa nominal é aquela em que a unidade de tempo na qual a taxa é expressa não está perfeitamente alinhada com os intervalos em que ocorre a capitalização (BARROS, 2013). Um exemplo ilustrativo dessa dissociação é quando a taxa de juros é apresentada em termos anuais, mas a capitalização acontece em intervalos mensais. Nesse contexto, a unidade de tempo e a frequência de capitalização (no exemplo apresentado, o ano e o mês, respectivamente), não estão sincronizadas.

2.4.2 Taxa Efetiva

Em nítido contraste com a taxa nominal, a característica marcante da taxa efetiva reside na perfeita concordância entre a unidade de tempo na qual a taxa é expressa e os intervalos em que ocorre a capitalização (BARROS, 2013). Para ilustrar essa harmonia, consideremos um exemplo claro: quando a taxa de juros é apresentada em termos anuais, e a capitalização é realizada em intervalos correspondentes a anos. Nessa conjuntura, tanto a unidade de tempo quanto a frequência de capitalização estão estritamente sincronizadas. Isso implica que a taxa efetiva leva em conta essa congruência, assegurando que o cálculo dos juros seja feito de forma precisa e sem ambiguidades.

2.4.3 Taxa Equivalente

Duas taxas são ditas *equivalentes* se, quando aplicadas ao mesmo capital inicial e ao mesmo período de tempo, geram o mesmo montante acumulado. Ou seja, a peculiaridade das taxas equivalentes reside na capacidade de aplicar taxas distintas a um mesmo capital, durante um período de tempo idêntico, resultando em um valor futuro idêntico. Em outras palavras, as taxas equivalentes são aquelas que, mesmo sendo diferentes em termos de magnitude, produzem o mesmo resultado final (FEIJÓ, 2015).

Para ilustrar essa sincronia, considere o cenário no qual duas taxas de juros distintas são aplicadas sobre um mesmo montante, durante um período de tempo uniforme. O notável é que, apesar das diferenças nas taxas, o valor futuro que ambas produzem é exatamente o mesmo. Essa coerência entre diferentes taxas é essencial, pois fornece uma base sólida para a comparação de investimentos ou empréstimos que envolvam taxas variadas.

Dentro do cenário financeiro, em que as taxas de juros compostos predominam, surge a necessidade de compreender a noção de equivalência de taxas. Sob esse prisma, compararemos o cálculo da taxa equivalente para o regime de capitalização simples e composta, considerando dois capitais iniciais C_0 iguais, mesmo período n de capitalizações, e duas taxas diferentes, respectivamente i e i_m.

Dessa forma, considerando o *regime de capitalização simples*:

$$C_0 \cdot (1 + i \cdot n) = C_0 \cdot (1 + i_m \cdot m \cdot n)\,.$$

Ou seja:

$$i_m = \frac{i}{m}. \tag{3}$$

Já no *regime de capitalização composta*, encontramos:

$$C_0 \cdot (1+i)^n = C_0 \cdot (1+i_m)^{n \cdot m}.$$

Dessa forma,

$$i = (1+i_m)^m - 1. \tag{4}$$

Exemplo 2.1

Considere uma taxa anual de 6% ao ano, capitalizados mensalmente. Qual a taxa equivalente, capitalizada somente uma vez ao ano, que é equivalente a apresentada?
A primeira etapa é determinar a taxa mensal:

$$i = \frac{0,06}{12} = 0,005.$$

Agora, basta aplicarmos o valor de $0,005$ em i_m na equação (4):

$$i = (1+0,005)^{12} - 1. = 0,061677$$

Assim, concluímos que a taxa i de 6,1677% ao ano capitalizada apenas uma vez é equivalente a i_m de 6% ao ano capitalizada mês a mês.

2.4.4 Equivalência para as Taxas Composta e Contínua

Nesta seção, compararemos as taxas de juros dos regimes de capitalização composta e contínua. A equação (4) vista anteriormente pode ser reescrita da seguinte forma:

$$i = \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m - 1, \tag{5}$$

Em que i é a taxa efetiva anual e t é a taxa de juros aplicada em m capitalizações. Logo, pela equação (5), segue que

$$t = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{1/m}.$$

Desse modo, podemos definir a taxa instantânea δ como o limite da taxa nominal t quando $m \to \infty$, ou seja,

$$\delta = \lim_{m \to \infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{1/m}.$$

Para resolvermos esse limite, usaremos a Regra de L'Hospital (veja (GUIDORIZZI, 2008)). Para isso, observe que

$$(1+i)^{\frac{1}{m}} = \exp\left(\frac{1}{m}\ln(1+i)\right).$$

Derivando a expressão acima com relação à variável m, temos que

$$\begin{aligned}\left(\exp\left(\frac{1}{m}\ln(1+i)\right)\right)' &= -\exp\left(\frac{1}{m}\ln(1+i)\right)\frac{\ln(1+i)}{m^2} \\ &= -(1+i)^{1/m}\frac{\ln(1+i)}{m^2}.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\delta = \lim_{m\to\infty} \frac{((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1)'}{(1/m)'} = \lim_{m\to\infty} \frac{-(1+i)^{1/m} \cdot \frac{\ln(1+i)}{m^2}}{-1/m^2} = \ln(1+i).$$

Portanto, $1 + i = e^{\delta}$.

2.5 Séries de Capitais Uniformes

Neste tópico, exploraremos o conceito de séries de capitais uniformes, suas características e aplicações. Além disso, discutiremos as diferenças entre séries postecipadas e antecipadas, e como essas séries são representadas na notação $(0+n)$ e $(1+n)$.

Uma *série de capitais uniformes* é um fluxo de pagamentos financeiros que ocorre em intervalos regulares de tempo, com valores constantes em cada período. Essas séries são frequentemente usadas em finanças para modelar empréstimos, investimentos, amortizações e outros cenários financeiros. Os elementos-chave de uma série de capitais uniformes incluem o *valor do pagamento periódico* (P), o qual corresponde ao valor constante pago ou recebido em cada período, a taxa de juros por período i e, o número total de períodos n (BARROS, 2013).

2.5.1 Introduzindo séries Postecipadas e Antecipadas

As séries de capitais uniformes podem ser categorizadas em dois tipos principais: *postecipadas* e *antecipadas*. As diferenças entre elas estão relacionadas ao momento em que os pagamentos são feitos ou recebidos.

Uma *série postecipada* é aquela em que os pagamentos ocorrem no final de cada período. Em outras palavras, o primeiro pagamento é feito no final do período 1. A notação comum para uma série postecipada é $(0+n)$, onde o 0 indica que o primeiro pagamento ocorre no final do período 0 e o n representa o número total de períodos.

Uma *série antecipada* é aquela em que os pagamentos ocorrem no início de cada período. Nesse caso, o primeiro pagamento é feito no início do período 1. A notação comum para uma série antecipada é $(1+n)$, onde o 1 indica que o primeiro pagamento ocorre no início do período 1 e o n representa o número total de períodos.

2.5.2 Fórmulas para Séries de Capitais Uniformes Postecipadas

Novamente, uma *série de capitais uniformes postecipada* é um fluxo de caixa periódico onde os pagamentos são feitos no final de cada período.

A fórmula para calcularmos o capital inicial C_0 de uma série uniforme postecipada é dada por:

$$C_0 = \frac{P(1-(1+i)^{-n})}{i}, \tag{6}$$

em que P é o valor do pagamento periódico, i é a taxa de juros por período e n é o número total de períodos.

Tal equação deriva do conceito de capital inicial de fluxos de caixa futuros descontados. A denominação "descontado" se deve à aplicação da taxa de juros por período, os fluxos de caixa postecipados projetados e então descontados pela taxa i.

De (2), sabemos que:

$$C_0 = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

Ou seja,

$$C_0 = P \cdot \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right].$$

É fácil notar que, nos colchetes, encontramos a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (PG), cujo primeiro termo e razão são iguais a $\frac{1}{(1+i)}$. A soma S_n dos n primeiros termos é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q},$$

Em que q é a razão e a_n é o termo de ordem n da progressão geométrica.

Portanto:

$$C_0 = P \cdot \left[\frac{\frac{1}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{1}{1+i}}{1 - \frac{1}{1+i}} \right] = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

A fórmula nos permite determinar o capital inicial de uma série de pagamentos uniformes quando os pagamentos são feitos no final de cada período. Essa ferramenta pode ser utilizada para avaliar o valor atual de fluxos de caixa futuros, auxiliando na tomada decisões financeiras adequadas.

Após tratarmos das equações relativas a capital inicial C_0, brevemente tratemos do cálculo do valor futuro C_n de séries. A seguinte fórmula determina o valor futuro C_n de uma série de capitais uniformes postecipados:

$$C_n = P \cdot \frac{((1+i)^n - 1)}{i}$$

A partir da expressão para C_0 obtida acima e utilizando a equação (2), podemos deduzir uma expressão para C_n do seguinte modo:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow C_0 = C_n \cdot (1+i)^{-n}.$$

Substituindo-a na equação, encontramos:

$$C_n \cdot (1+i)^{-n} = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

$$C_n = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

2.5.3 Fórmula para Séries de Capitais Uniformes Antecipadas

Agora, tratemos das séries antecipadas, em que os pagamentos ocorrem no início de cada período. A equação para calcular o capital inicial (C_0) de uma série uniforme antecipada é dada por:

$$C_0 = P \cdot (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \tag{7}$$

Em que C_0 representa o capital inicial, P é o valor do pagamento periódico, i é a taxa de juros por período e n é o número total de períodos. Para calcular o capital inicial de uma série de pagamentos uniformes antecipados, pode-se utilizar uma série de pagamentos uniformes postecipados, deslocando todos os pagamentos P um período em direção à data zero. Isso significa que o valor do pagamento deslocado para a data anterior será igual ao valor original dividido pelo fator $(1+i)$.

Portanto, a fórmula nos permite determinar o capital inicial de uma série de pagamentos uniformes quando os pagamentos são feitos no início de cada período.

2.5.4 Perpetuidade de séries Postecipadas e Antecipadas

Uma perpetuidade, também conhecida como fluxo de caixa perpétuo, é um conceito financeiro que se refere a uma série infinita de pagamentos periódicos que ocorrem indefinidamente no futuro. Esses pagamentos são constantes em valor e têm um intervalo regular entre eles.

A perpetuidade é usada em finanças para modelar situações em que se espera que os pagamentos continuem indefinidamente, como os dividendos pagos por uma empresa aos acionistas ou os juros pagos em títulos perpétuos.

Pela equação (6), tem-se que:

$$\begin{aligned} C_0 &= \lim_{n\to\infty} P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{P}{i}[1-(1+i)^{-n}] = \frac{P}{i}. \end{aligned}$$

Desde que $1+i > 1$, temos que o limite $\lim\limits_{n\to\infty}(1+i)^{-n} = 0$, visto que $(1+i)^{-n}$ é uma função exponencial decrescente.

Logo, a fórmula básica para calcular o capital inicial de uma perpetuidade para séries postecipadas é dada por:

$$C_0 = \frac{P}{i}.$$

Em se tratando das séries antecipadas, existem alterações significativas no capital inicial. Neste caso, a fórmula para calcular C_0, apresentada abaixo, segue a mesma lógica aplicada à perpetuidade de séries postecipadas. Assim, calcula-se o limite da equação das séries antecipadas para n tendendo ao infinito. Ou seja, aplicando o limite na expressão (7), encontramos:

$$C_0 \quad = \quad P \cdot \frac{1+i}{i}.$$

3 A gestão do Lucro e a Análise Marginal

A *gestão do lucro*, em sua essência, envolve o controle e a maximização dos ganhos financeiros de uma organização. Trata-se de um processo contínuo que abrange desde a identificação de oportunidades para aumentar a receita até a eficiência na redução de custos. Portanto, compreender como gerenciar o lucro adequadamente é vital para o sucesso a longo prazo de qualquer empreendimento.

Por outro lado, a *análise marginal* é uma abordagem analítica que se concentra nas mudanças incrementais nas variáveis econômicas, permitindo uma avaliação de como pequenas alterações afetam os resultados financeiros. Nesse sentido, desempenha um papel crucial na determinação de decisões ótimas de produção, precificação de produtos e serviços, alocação de recursos e muito mais. Ao quantificar os efeitos marginais das decisões, a análise marginal oferece uma base sólida para decisões racionais e eficazes.

Nesse sentido, serão exploradas a gestão do lucro e a análise marginal, tratando dos conceitos matemáticos que auxiliarão na tomada de decisão que maximize a geração de resultados.

3.1 Análise Marginal

A *análise marginal* concentra-se nas variações incrementais das variáveis pertinentes. Conforme Krugman (KRUGMAN e WELLS, 2015), a análise marginal responde não a questões relativas a "quanto" transcende o escopo das decisões mutuamente excludentes. Em sua essência, a análise marginal envolve a avaliação do custo-benefício associado a aumentos ou reduções em uma variável primária e o subsequente impacto resultante sobre uma segunda variável.

Nesse contexto, à semelhança da derivada na matemática, que representa o estudo da taxa de variação, podemos afirmar que, no campo da economia e da administração, a aplicação das derivadas encontra sua expressão no conceito de marginalidade.

3.1.1 Custo Marginal

O *custo marginal* diz respeito ao incremento nos custos totais tomando por princípio a produção de uma unidade adicional (BARROS, 2013). Considere $C = C(q)$ a função custo total da produção de um certo produto. Supondo que C seja diferenciável, a função custo marginal é a derivada da função custo total $C(q)$, pois fornece justamente a variação dos custos em relação à quantidade produzida q.

Vamos determinar o *custo médio de produção*, dividindo o custo total pela quantidade produzida, ou seja:

$$C_m(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

Consideremos a taxa média de variação de $C(q)$ em relação à variação de q, no intervalo $[q_1, q_2]$. Suponha que $q_2 = q_1 + h$, isto é, h é a variação sofrida no intervalo $[q_1, q_2]$. Dessa forma, a taxa média de variação de C em

$[q_1, q_2]$ é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{C(q_1+h)-C(q_1)}{h}.$$

Ao aplicarmos o limite de $h \to 0$ na expressão anterior, obtemos a derivada de C em q_1, isto é:

$$C'(q_1) = \lim_{h\to 0} \frac{C(q_1+h)-C(q_1)}{h}.$$

Com isto, podemos dizer que:

$$C'(q_1)h \approx C(q_1+h)-C(q_1).$$

Fazendo $h = 1$ na equação anterior, temos que o custo marginal para uma certa quantidade q produzida é dada por:

$$C'(q) \approx C(q+1)-C(q). \tag{8}$$

A equação (8) pode ser ilustrada no gráfico abaixo.

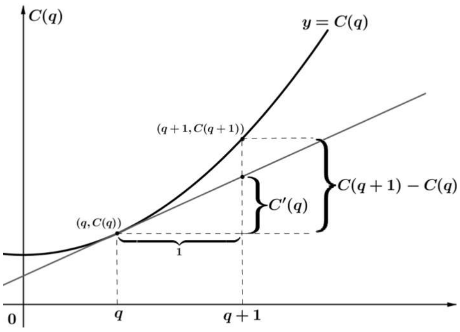

Figura 4: Interpretação da derivada de C.
Fonte: (BARROS, 2013).

Baseado nas considerações anteriormente tratadas a respeito do custo marginal, é possível chegar a algumas conclusões sobre a função custo médio C_m. Se C é uma função de classe $\mathcal{C}^1$, temos que:

(a) Se $C'(q) > C_m(q)$, então $C_m(q)$ é crescente;

(b) Se $C'(q) < C_m(q)$, então $C_m(q)$ é decrescente;

(c) q_0 é ponto crítico de C_m (ou seja, $C'_m(q_0) = 0$) se, e somente se, $C_m(q_0) = C'(q_0)$.

De fato, o custo médio de q unidades é dado por:

$$C_m(q) = \frac{C(q)}{q}. \tag{9}$$

Como $C'(q) > C_m(q)$ e $q > 0$, temos:

$$C'(q) > \frac{C(q)}{q}.$$

Assim,

$$C'(q)q - C(q) > 0.$$

Por outro lado, usando a regra do quociente (veja (GUIDORIZZI, 2008)), a derivada da função custo médio (9) é dada por:

$$C'_m(q) = \frac{C'(q)q - C(q)}{q^2} > 0$$

Assim, C_m é crescente.

O item (b) é demonstrado de forma análoga. Já no item (c), observe que:

$$C'_m(q_0) = \frac{C'(q_0)q_0 - C(q_0)}{q_0^2} = 0 \Longleftrightarrow C'(q_0)q_0 - C(q_0) = 0.$$

E, isto é equivalente a dizer que $C'(q_0) = C_m(q_0)$.

Observação 3.1

Supondo que C é uma função de classe $\mathcal{C}^2$, temos que a segunda derivada da função custo médio $C_m(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ é dada por

$$C''_m(q) = \frac{C''(q)q^3 - (C'(q)q - C(q))2q}{q^4}.$$

Se q_0 é ponto crítico de C_m e $C''(q_0) > 0$, segue do item (c) que:

$$C''_m(q_0) = \frac{C"(q_0)}{q_0} > 0.$$

Assim, q_0 é ponto de mínimo, ou seja, o custo médio é mínimo em q_0.

Exemplo 3.1

Em uma indústria de móveis, são fabricadas q unidade de mesas, no qual o custo de produção é expresso por $C(q) = 3q^4 - 16q^3 + 18q^2$, em centenas de reais. Quanto deve-se produzir para atingir um custo médio mínimo?

O primeiro passo é derivar a função acima, que fora reescrita da seguinte forma: $C(q) = q^2(3q^2 - 16q + 18)$. Logo, $C'(q) = 12q^3 - 48q^2 + 36q$.

Assim, para encontrarmos o custo médio mínimo, devemos realizar o cálculo da função do custo médio, isto é:

$$C_m(q) = \frac{3q^4 - 16q^3 + 18q^3}{q} = 3q^3 - 16q^2 + 18q^2.$$

Se q_0 é ponto de mínimo, então pelo que vimos anteriormente, $C_m(q_0) = C'(q_0)$. Dessa forma, concluímos que

$$q(9q^2 - 32q + 18) = 0.$$

Assim, $q = 0$ ou $q = 0,7$ ou $q = 2,85$.

Desde que $C''(q) = 36q^2 - 96q + 36$, temos que $C''(0,7) = -13,56$ e $C''(2,85) = 54,81$.

Logo, produzindo aproximadamente 3 unidades, a fábrica de móveis terá o menor custo médio possível, de R$ 5400,81.

3.1.2 Receita Marginal

A *receita marginal*, descreve a variação na receita que ocorre quando consideramos o acréscimo de uma única unidade adicional vendida (BARROS, 2013). A *receita total* R é expressa da seguinte forma:

$$R(q) = q \cdot p,$$

Em que p denota o preço do produto e q representa a quantidade total produzida. A derivada desta função nos permite determinar a *receita marginal*, semelhante ao cálculo do custo marginal abordado anteriormente. Para uma compreensão mais clara desse processo, apresentaremos a seguir um exemplo ilustrativo.

Exemplo 3.2

Uma indústria produz cimento para venda em diversos pontos de distribuição. A função $R(q) = 4q + 3q^2/1 + q^2$ define a receita do negócio para venda de cimento. Nesse sentido, calculemos a quantidade incremental a ser produzida. Sendo que, $q \geq 0$:

$$R'(q) = \frac{4 + 6q - 4q^2}{(1 + q^2)^2}.$$

É importante notar que $(1 + q^2)^2$ jamais poderá ser igual a zero. Assim, basta que encontremos as raízes para expressão $4 + 6q - 4q^2$, que são aproximadamente $-0,375$, que não pertence ao conjunto, e $1,125$ toneladas de cimento, resposta correta para o exemplo.
A próxima etapa é calcular a segunda derivada, para que possamos provar que $1,125$ toneladas produzidas incrementalmente, gerem um resultado saudável de faturamento para a empresa. Assim:

$$R''(q) = \frac{6 - 24q - 18q^2 + 8q^3}{(1 + q^2)^3}.$$

Substituindo q por $1,125$, econtramos:

$$R''(1,125) = -2,78519$$

Assim, pelo fato de $-2,78519$ ser menor que zero, o ponto será de máximo, indicando que a produção incremental de $1,125$ toneladas, conforme a função dada, representa a produção ideal para o faturamento máximo.

3.1.3 Lucro Marginal

Já que examinamos o custo marginal e a receita marginal, é natural abordar o conceito de *lucro marginal* para uma compreensão mais completa do processo decisório em economia e gestão. Nesse contexto, suponha que L seja a função que descreve o lucro total. A partir das funções C (custo total) e R (receita total), podemos definir o *lucro total* como (BARROS, 2013):

$$L(q) = R(q) - C(q).$$

Nesse contexto, o *lucro marginal*, representado por $L'(q)$, corresponde à derivada da função de lucro total anterior. Isso nos permite quantificar de maneira precisa a variação do lucro decorrente da venda de uma unidade adicional do produto. Desse modo, o lucro marginal pode ser expresso como:

$$L'(q) = R'(q) - C'(q).$$

O lucro marginal desempenha um papel crucial na análise de decisões de produção e preços, fornecendo informações valiosas sobre como a lucratividade da empresa é afetada por mudanças incrementais na quantidade vendida. Analogamente ao que foi feito com o custo médio, temos os seguintes resultados sobre a função lucro:

(a) Se $R'(q) > C'(q)$, então L é crescente;

(b) Se $R'(q) < C'(q)$, então L é decrescente;

(c) q_0 é ponto crítico de L se, e somente se, $R'(q_0) = C'(q_0)$.

Observe que:

$$L'(q) = R'(q) - C'(q) = 0 \iff R'(q) = C'(q).$$

A maximização do lucro depende da minimização dos custos e da maximização das receitas, assim podemos descrever:

$$R''(q_0) < 0 \text{ e } C''(q_0) > 0.$$

Dessa forma, $L''(q_0) < 0$. De qualquer maneira, para que seja maximizado o lucro, temos a seguinte condição:

$$R''(q_0) < C''(q_0).$$

O lucro total está intrinsecamente ligado ao custo total, uma vez que o ponto de lucro máximo coincide com o ponto em que os custos atingem seu pico. Em outras palavras, o momento de maior lucro é também o ponto em que os custos totais são mais altos. Essa relação fundamental entre lucro e custo reflete a essência do equilíbrio econômico: se os custos superam a receita, não há lucro a ser obtido.

Exemplo 3.3

Em uma locadora de veículos, a receita é dada pela seguinte expressão $R(q) = -0,2q^2 + 200q$. Já os custos, são expressos por $C(q) = 40q + 14000$. Quanto se deve produzir para alcançarmos o lucro máximo?
O primeiro passo, é relacionar as duas funções da seguinte forma:

$$L(q) = R(q) - C(q).$$

Assim: $L(q) = -0,2q^2 + 160q - 14000$.
Calculemos o ponto crítico de L:

$$L'(q) = -0,4q + 160.$$

Logo, $q = 400$. Tendo em vista que $L''(400) < 0$, podemos afirmar que $q = 400$ é ponto de máximo.

Referências

BARROS, Luiz Eduardo Wanderley Buarque de (2013). **Cálculo: um Estudo de suas Aplicações às áreas Financeira e Econômica**. Dissertação de Mestrado. UFPB-PROFMAT.

FARO, Clovis de (2006). **Fundamentos da Matemática Financeira: Uma Introdução ao Cálculo Financeiro e à Análise de Investimento de Risco**. 1ª ed. Vol. 1. Saraiva.

FEIJÓ, Ricardo (2015). **Matemática financeira com conceitos econômicos e cálculo diferencial: utilização da HP-12C e planilha eletrônica**. 2ª ed. Vol. 1. Atlas.

GOLDSTEIN, Larry J., LAY, David C. e SCHNEIDER, David I. (2000). **Matemática aplicada: economia, administração e contabilidade**. 8ª ed. Vol. 1. Bookman.

GUIDORIZZI, H. L. (2008). **Um Curso de Cálculo**. 5ª ed. Vol. 1. LTC.

KRUGMAN, Paul e WELLS, Robin (2015). **Introdução à Economia**. 3ª ed. Vol. 1. Campus.