Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco
Volume 10 - Número 1
Dezembro 2023

Artigo de Pesquisa

Ruth Moufang e Um Pouco de Estruturas Não Associativas

Dylene Agda Souza de Barros
Universidade Federal de Uberlândia
dylene@ufu.br

Victor Cruz Borges
Universidade Federal de Uberlândia
victor.cruz@ufu.br

Resumo

No século XX a Matemática se desenvolveu por vários cantos do mundo, em especial na Alemanha. Vale ressaltar que tudo foi concomitante com dois eventos que assolaram o país: O nazismo e a Segunda Guerra Mundial. Nesse país uma geômetra desenvolveu um conceito que se desenrolou numa área de pesquisa presente desde então. Aqui falaremos um pouco sobre a história de Ruth Moufang, loops e um resultado dela.

Palavras-chaves: Moufang. Loops. quasigrupo.

Abstract

In the 20th century Mathematics developed in many corners of the world, especially in Germany. It is noteworthy that everything was concomitant with two events that devastated the country: nazism andThe Second World War. In this country, a geometer developed a concept that has developed into an area of research that has been present ever since. Here we will discuss a little about the story of Ruth Moufang, loops and an outcome of it.

Keywords: Moufang. Loops. Quasigroup.

1 A História de Ruth Moufang.

Ruth Moufang [ver (O'CONNOR e ROBERTSON, 2023)] nasceu em 1905 na cidade de Darmstadt, localizada no estado de Heese, na Alemanha. Seu pai Eduard Moufang era químico, e sua mãe era Else Fecht e tinha duas irmãs mais velhas.

Na época do colégio, as capacidades intelectuais de Ruth foram bem incentivadas pela sua família tendo em vista que eles faziam parte da classe média alemã e essa cultura era comum por lá. Ruth Moufang e sua irmã foram alunas de Wilhelm Schwan, que publicou um livro de Geometria por volta de 1920. Ruth ficou encantada com a Matemática através do ensino desse docente, o qual concluiu seu doutorado pela Universidade de Frankfurt em 1923, sob orientação de Max Wilhelm Dehn, que futuramente também orientou o doutorado de Ruth Moufang.

Em 1924, Moufang iniciou seus estudos na graduação pela Universidade Johann Wolfgang Goethe em Frankfurt am Main, que foi fundada em 1913 e sempre admitiu alunas em seu ambiente. Em 1929 ela se tornou professora de uma escola, mas continuou com os estudos em Frankfurt. Em 1931, obteve seu título de Doutora em Matetimática pela Universidade de Koenigsberg com ênfase em Geometria Projetiva. Concomitantemente, foi no ínicio da década de 1930 que Álgebra, Geometria (Euclidiana e não-Euclidiana) e Topologia começaram a ganhar forma entre os Alemães.

Mesmo que tenha tido um caminho acadêmico celebrável, a vida de Ruth Moufang tomou um novo curso após concluir seu doutorado. Após retornar para Frankfurt com o intuito de lecionar na universidade de lá e seguir carreira acadêmica, o Ministro de Educação do Terceiro Reich [ver (**nazismo**)] a avisou que, por ser uma mulher, ela não poderia ensinar numa universidade predominantemente masculina, mas poderia seguir com sua pesquisa individualmente. Em 1937, Ruth Moufang, induzida a se distanciar das pesquisas, começou a atuar na indústria Krupp Corporation e ficou por lá até o final da Segunda Guerra Mundial.

Por mais que ela tenha ficado esse período de tempo todo sem publicar artigos científicos, o nome dela seguiu sendo utilizado por conta dos *loops de Moufang*, uma estrutura algébrica que será abordada mais adiante. Além desse conceito seu nome se disseminou pelos matemáticos também por conta dos Planos de Moufang, Simetrias de Moufang e Polígonos de Moufang, objetos abordados predominantemente em geometria.

2 Loops e Loops de Moufang.

Assim como Issac Newton, Galileu Galilei e outros vários cientistas provaram que é possível abrir portas para o conhecimento em várias áreas diferentes, Ruth Moufang, uma geômetra, abriu um leque que se estende até hoje nos estudos em álgebras não associativas. Vejamos algumas noções básicas.

Definição 2.1

Um quasigrupo é um par $(L,\cdot)$ onde L é um conjunto não vazio e $(a,b)\longmapsto a\cdot b$ é uma operação binária em L tal que as equações $a\cdot x=b$ e $y\cdot a=b$ têm únicas soluções em L. Um *loop* é um quasigrupo com um elemento $1\in L$ tal que $1\cdot x=x\cdot 1=x$, para todo $x\in L$.

Observação 2.1

Segue da definição o elemento 1 em um loop L é único.

Num loop não necessariamente tem-se as propriedades *associativa* e *comutativa*. Contudo, sabemos que, para $a,b,c\in L$, $a\cdot b,\ b\cdot a,\ b\cdot c\in L$ e disso temos que $a\cdot(b\cdot c),\ (a\cdot b)\cdot c\in L$ e, por definição, existe uma única solução $x,y\in L$ para as equações $[a\cdot(b\cdot c)]x=(a\cdot b)\cdot c$ e $(a\cdot b)y=b\cdot a$. Assim sendo:

Definição 2.2

Denotaremos por (a,b,c) o elemento que satisfaz a igualdade $[a\cdot(b\cdot c)](a,b,c)=(a\cdot b)\cdot c$, o qual chamaremos de *associador* de a,b e c.

Definição 2.3

Denotaremos por $[a,b]$ o elemento que satisfaz a igualdade $a\cdot b=(b\cdot a)\cdot[a,b]$, o qual chamaremos de *comutador* de a e b.

Por sua vez, as propriedades de cancelamento à direita e à esquerda são atendidias: Se $a_1\cdot b=a_2\cdot b$, da unicidade do elemento y solução de $y\cdot b=a_2\cdot b$, segue que $a_1=a_2$ e o outro caso segue analogamente.

Observe que, para todo a em um loop L, as equações $a\cdot x=1$ e $y\cdot a=1$ têm únicas soluções as quais chamaremos $x=a^{\rho_a}$ de *inverso à direita* de a e $y=a^{\lambda_a}$ de *inverso à esquerda* de a.

Definição 2.4

Um quasigrupo $(L,\cdot)$ tem a *propriedade inversa à esquerda* (e é chamado de quasigrupo L.I.P.) se para cada $x,a\in L$ temos $a^{\lambda_a}\cdot(a\cdot x)=x$. Similarmente, um quasigrupo $(L,\cdot)$ tem a *propriedade inversa à direita* (e é chamado de quasigrupo R.I.P.) $(x\cdot a)\cdot a^{\rho_a}$=x. para todos $x,a\in L$.

Definição 2.5

Um quasigrupo $(L,\cdot)$ que tem as propriedades inversas à direita e à esquerda é dito que tem a propriedade do inverso (e é chamado de quasigrupo I.P.).

Apresentamos a Tábua de Cayley de um loop não associativo:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	1	2	3	4	5
2	2	1	4	5	3
3	3	5	1	2	4
4	4	3	5	1	2
5	5	4	3	2	1

Definição 2.6

Seja $(L, \cdot)$ um quasigrupo e a um elemento fixado de L. As *funções de translação* $L[a]$ e $R[a]$ são definidas por

$$L[a](x) = a \cdot x \quad \text{e} \quad R[a](x) = x \cdot a$$

para todos $x \in L$. Ambas funções tem domínio e contradomínio L e, pela definição de quasigrupo, as translações são funções bijetoras.

Definição 2.7

Seja $(L, \cdot)$ um quasigrupo e a um elemento fixado de L. Define-se a função $R[x, y]$ por

$$R[x, y](a) = R_{xy}^{-1} R_y R_x(a) = R_{xy}^{-1}((a \cdot x) \cdot y)$$

Observação 2.2

Se L for associativo, a função acima será igual a função identidade.

Definição 2.8

Um subconjunto não vazio H de L é um subquasigrupo (ou subloop) de um quasigrupo $(L, \cdot)$ significa que $(H, \cdot)$ é um quasigrupo (ou loop).

Agora que conhecemos alguns conceitos iniciais, vamos ver o que foi definido como base por *loop de Moufang*, pela própria Ruth Moufang:

Definição 2.9

Um quasigrupo $(L^*, \cdot)$ é um loop de Moufang se, para $x, y \in L^*$:
(M_1) Para quaisquer dois elementos $x, y \in L^*$ existe um único produto $x \cdot y \in L^*$;
(M_2) Existe um elemento identidade $1 \in L^*$ tal que, para qualquer $x \in L^*$, existe único $x^{-1} \in L^*$ tal que $x^{-1} \cdot x = 1 = x \cdot x^{-1}$;
(M_3) Para cada x, $y \in L^*$: $x \cdot (x^{-1} \cdot y) = (x \cdot x^{-1}) \cdot y$ e $(y \cdot x^{-1}) \cdot x = y(x^{-1}x)$;
(M_4) Para $z \in L^*$: $[x \cdot (z \cdot x)]y = x \cdot [z \cdot (x \cdot y)]$.

Se esse quasigrupo L^* satisfaz

(M_5) $(x \cdot y) \cdot (z \cdot x) = x \cdot [(y \cdot z) \cdot x]$,

Moufang chama esse quasigrupo de L^{**}. Além disso, ela mesma mostrou que (M_4) é equivalente às duas propriedades que seguem:

(M_6) $[(x \cdot z) \cdot x] \cdot y = x \cdot [z \cdot (x \cdot y)]$,

(M_7) $[(y \cdot x) \cdot z] \cdot x = y \cdot [x \cdot (z \cdot x)]$.

Existe também outra propriedade que é equivalente às propriedades (M_4) até (M_7), conhecidas por identidades de Moufang:

(MI) $(x \cdot y) \cdot (z \cdot x) = [x \cdot (y \cdot z)] \cdot x$.

Mais tarde, Gerrit Bol e Richard Hubert Bruck provaram as equivalências entre as identidades de Moufang, as quais "utilizam como ponte" a propriedade (MI), que podem ser encontradas na demonstração do teorema a seguir. Assim, os quasigrupos L^* e L^{**} representam a mesma estrutura algébrica.

Observação 2.3

A partir daqui denotaremos um loop de Moufang por $(M, \cdot)$

Teorema 2.1

Um loop de Moufang $(M, \cdot)$ é um loop com a propriedade do inverso. Além disso, são válidas as seguintes identidades, para todo $x, y \in L$:

- $(x \cdot x) \cdot y = x \cdot (x \cdot y)$ (identidade alternativa à esquerda);
- $(x \cdot y) \cdot y = x \cdot (y \cdot y)$ (identidade alternativa à direita);
- $(x \cdot y) \cdot x = x \cdot (y \cdot x)$ (identidade flexível).

Demonstração: Dividiremos a demonstração em nove passos:

1. $y^\lambda \cdot (y \cdot x) = x$ onde $y^\lambda \cdot y = 1$ (propriedade do inverso à esquerda) e $y^\lambda = y^\rho = y^{-1}$;
2. $(x \cdot y) \cdot x = x \cdot (y \cdot x)$ (propriedade flexível);
3. (M_5) e(MI) são equivalentes;
4. $(x \cdot y) \cdot y^{-1} = x$ onde $y \cdot y^{-1} = 1$ (propriedade do inverso à direita);
5. (M_7) e(MI) são equivalentes;
6. (M_6) e(M_7) são equivalentes;
7. $(x \cdot x) \cdot y = x \cdot (x \cdot y)$;
8. $(x \cdot y) \cdot y = x \cdot (y \cdot y)$;
9. (M_4) e (MI) são equivalentes;

1. Seja $y^\lambda \cdot y = 1$ e substitua x por y^λ em (MI) para obter $(y^\lambda \cdot y)(z \cdot y^\lambda) = y^\lambda \cdot (y \cdot z) \cdot y^\lambda$. Então $z \cdot y^\lambda = [y^\lambda .(y \cdot z)] \cdot y^\lambda$ o que implica que $y^\lambda \cdot (y \cdot z) = z$, ou seja, a propriedade do inverso à esquerda.

   Se $y \cdot y^\rho = 1$, então $y^\lambda = y^\lambda .(y \cdot y^{\rho)} = y^\rho = y^{-1}$ tal que $y \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot y = 1$
2. Colocando $y = 1$ em (MI), obtemos imediatamente que $x \cdot (z \cdot x) = (x \cdot z) \cdot x$.
3. Aplicando (2), encontramos os lados direitos de (M_5) e (MI) equivalentes, logo (M_5) e (MI) são equivalentes.
4. A R.I.P. pode ser obtida de (M_5) com $z = x^{-1}$:

   $$x \cdot y = (x \cdot y) \cdot (x^{-1} \cdot x) = x \cdot [(y \cdot x^{-1}) \cdot x], \text{ ou } (y \cdot x^{-1}) \cdot x = y.$$

   A L.I.P e a R.I.P. juntas implicam na propriedade do inverso de $(M, \cdot)$
5. A equivalência (M_7) e (MI) é demonstrada na seção 3 do capítulo 3 de [(PFLUGFELDER, 1991)] usando a ideia de autotopismo em Loops de Moufang. O leitor pode consultar a referência para mais detalhes.
6. Tomando inversos dos dois lados de (M_7) e substituindo x^{-1}, y^{-1}, z^{-1} por x, y, z, têm-se (M_7) e (M_6) equivalentes.

7. (M_6) com $z = 1$ nos dá $y \cdot (y \cdot x) = (y \cdot y) \cdot x$, a propriedade alternativa à esquerda.

8. A propriedade alternativa à direita provém de (7) tomando inversos de ambos os lados da igualdade e trocando x^{-1} e y^{-1} por x e y, respectivamente.

9. Aplicando a propriedade flexível do lado esquerdo de (M_4), obtemos (M_4) equivalente à (M_6).

■

Definição 2.10

Seja $(M, \cdot)$ um loop de Moufang. Um *semi-endomorfismo* de $(M, \cdot)$ é uma função $\theta : M \to M$ tal que, $\theta(1) = 1$ e, para todo $x, y \in M$

$$\theta(x \cdot y \cdot x) = \theta(x) \cdot \theta(y) \cdot \theta(x). \tag{1}$$

Se θ é uma bijeção em $(M, \cdot)$ então θ é chamada de *semi-automorfismo*.

Teorema 2.2

Se θ é um semi-endomorfismo de $(M, \cdot)$ então $\theta(x^{-1}) = \theta(x)^{-1}$ para todo $x \in M$.

Demonstração: Colocando $y = x^{-1}$ em (1) temos que $\theta(x \cdot x^{-1} \cdot x) = \theta(x) = \theta(x) \cdot \theta(x^{-1}) \cdot \theta(x)$, o que implica que, pela propriedade do cancelamento, $\theta(x^{-1}) \cdot \theta(x) = 1$, isto é, $\theta(x^{-1}) = \theta(x)^{-1}$. ■

O Teorema de Moufang

O objetivo dessa seção é provar um dos teoremas fundamentais para os loops de Moufang: O Teorema de Moufang. Inicialmente, vamos utilizar vários lemas, cujas demonstrações se encontram em [ver (PFLUGFELDER, 1991), Chapter IV.2].

Lema 2.1

Seja $(M, \cdot)$ um loop de Moufang, $E \neq \emptyset$ um conjunto dos semi-endomorfismos de $(M, \cdot)$, F o conjunto de todos os elementos $f \in M$ que permanecem fixos sob todos os semi-endomorfismos de E e, finalmente, seja H o conjunto de todos os elementos $h \in M$ tais que $hF \subset F$. Então

1. $H \subset F$,

2. $F^{-1} = F$ e $fFf = F$,

3. H é um subloop de $(M, \cdot)$.

Demonstração:

1. Já que $hF \subset F$, $\theta(h \cdot f) = h \cdot f$ para quaisquer $h \in H$, $f \in F$ e $\theta \in E$. Seja 1 o elemento identidade de $(M, \cdot)$, então, de $\theta(1) = 1$, segue que $1 \in F$. Então $\theta(h) = \theta(h \cdot 1) = h \cdot 1 = h$, o que significa que $h \in F$, ou $H \subset F$.

2. Do Teorema (2.2) com $x = f^{-1}$, $f \in F$, obtemos $\theta(f^{-1}) = (\theta(f))^{-1} = f^{-1}$ e $F^{-1} = F$. Ainda, desse mesmo teorema,
$$\theta(fFf) = \theta(f)\theta(f)\theta(f) = fFf \text{ ou } fFf \subset F.$$
Por outro lado, para todo $f \in F$, $f = 1 \cdot f \cdot 1 \in fFf$, logo $fFf = F$.

3. Temos que $1 \in H$ já que $1 \cdot f = f$. Então, de (1) e (2), segue que F contém a expressão $h_1 \cdot [h_2 \cdot (h_1 \cdot f)^{-1}] \cdot h_1$, que pela identidade de Moufang (MI), é igual a $(h_1 \cdot h_2) \cdot (h_1 f^{-1} h_1)$. Então $(h_1 \cdot h_2) \cdot f \in F$, e então $h_1 \cdot h_2 \in H$.

Para mostrar que $h^{-1} \in H$ para todo $h \in H$, considere o elemento $f.(h \cdot f)^{-1} f$ de F : $f \cdot (h \cdot f)^{-1} \cdot f = f \cdot (f^{-1} \cdot h^{-1}) \cdot f = (f \cdot f^{-1}) \cdot (h^{-1} \cdot f) = h^{-1} \in F$, ou $h^{-1} \in H$. Isso completa a prova de que H é um subloop.

■

Lema 2.2

Em um loop de Moufang, se $(a, b, c) = 1$, então qualquer permutação entre a, b, c e seus respectivos inversos satisfarão a associatividade do produto do loop.

Demonstração: De $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, segue que $R[b, c](a) = R_{bc}^{-1} R_c R_b(a) = a$. Agora $R[b \cdot c]$ é um mapeamento interno e, como tal, é um semi-endomorfismo. Então, $R[b, c](a^{-1}) = (R[b, c](a))^{-1}$, ou $R_{bc}^{-1} R_c R_b(a^{-1}) = a^{-1}$, e $(a^{-1} \cdot b) \cdot c = a^{-1} \cdot (b \cdot c)$. Daí, $(a, b, c) = 1$ implica que $(a^{-1}, b, c) = 1$. Da mesma forma, pode-se mostrar que $(a, b, c) = 1$ implica que $(a, b, c^{-1}) = 1$ e $(a, b^{-1}, c) = 1$. Nesse caso, em vez de usar $R[b, c]$ aplicado em a, deve-se usar os mapeamentos internos $L[b, a]$ e $R_{c^{-1}} L_{a^{-1}} R_c L_a$ aplicados em c e b, respectivamente. Como consequência, tem-se também $(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}) = 1$ ou $(a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot c^{-1} = a^{-1} \cdot (b^{-1} \cdot c^{-1})$. Tomando inversos em ambos os lados desta equação, obtemos $c \cdot (b \cdot a) = (c \cdot b) \cdot a$, ou $(c, b, a) = 1$. A partir de $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ tem-se

$$(b \cdot c) \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot [(a \cdot b) \cdot c] \cdot a^{-1} = [a^{-1} \cdot (a \cdot b)] \cdot (c \cdot a^{-1}) = b \cdot (c \cdot a^{-1}),$$

ou $(b, c, a^{-1}) = 1$ e $(b, c, a) = 1$.

Desde que as permutações

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

geram todo o grupo de permutações do conjunto $\{a, b, c\}$, segue que $(a, b, c) = 1$ implica que $(a', b', c') = 1$, onde a', b', c' representa qualquer permutação de $\{a, b, c\}$. ■

Lema 2.3

Se a, b, c, d são quatro elementos de um loop de Moufang dos quais sempre que tomamos três deles a equação $(x, y, z) = 1$, então as seguintes sentenças são equivalentes:

1. $(a \cdot b, c, d) = 1$
2. $((a \cdot b)^2, c, d) = 1$
3. $([a, b], c, d) = 1$
4. $(c \cdot d, a, b) = 1$
5. $(b \cdot c, d, a) = 1$

Demonstração:

1. (1)⇒(2): A equação (1) pode ser escrita na forma $((a \cdot b) \cdot c) \cdot d = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$ ou $a \cdot b = R_{cd}^{-1} R_d R_c(a \cdot b) = R[c, d](a \cdot b)$. Agora $R[c, d]$ é um mapeamento interno e, assim, é um semi-automorfismo θ tal que $\theta(a \cdot b) = a \cdot b$. Podemos agora usar o Lema (2.1) com $\theta = R[c, d]$ e $E = \{\theta\}$. Então $a \cdot b \in F$. E $\theta((a \cdot b)^2) = \theta((a \cdot b) \cdot 1 \cdot (a \cdot b)) = \theta(a \cdot b) \cdot \theta(a \cdot b) = (a \cdot b)^2$ ou $(a \cdot b)^2 \in F$. Já que $\theta = R[c, d]$, $\theta((a \cdot b)^2) = R[c, d]((a \cdot b)^2) = (a \cdot b)^2$, e segue que $((a \cdot b)^2, c, d) = 1$

2. (2)⇒(3): Denote $[a, b] = (a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot b)$ por p. Então $a \cdot b = (b \cdot a) \cdot p$ ou $(a \cdot b) \cdot a = ((b \cdot a) \cdot p) \cdot a$. Aplicando a Identidade de Moufang (M_7) do lado direito, obtemos $(a \cdot b) \cdot a = b \cdot (a \cdot (p \cdot a))$. Multiplicando os dois lados

por b à direita nos dá $((a \cdot b) \cdot a) \cdot b = b \cdot (a \cdot (p \cdot a)) \cdot b$. Mas

$$((a \cdot b) \cdot a) \cdot b = ((a \cdot b) \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot (a \cdot b)) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^2.$$

Assim, $(a \cdot b)^2 = b \cdot (a \cdot (p \cdot a)b)$. Aplicando $\theta = R[c, d]$ dos dois lados, obtemos

$$\theta((a \cdot b)^2) = \theta(b) \cdot \theta(a \cdot (p \cdot a)) \cdot \theta(b).$$

Como (2) é válido, então $\theta((a \cdot b)^2) = (a \cdot b)^2 = b \cdot (a \cdot (p \cdot a)) \cdot b$ ou $\theta(b) \cdot \theta(a \cdot (p \cdot a)) \cdot \theta(b) = b \cdot (a \cdot (p \cdot a)) \cdot b$. Já que $\theta(b) = b$ pela hipótese desse Lema, $\theta(a \cdot (p \cdot a)) = a \cdot (p \cdot a)$. Analogamente, já que $\theta(a) = a$, segue que $\theta(p) = p$ e $(p, c, d) = 1$, ou $([a, b], c, d) = 1$, que é (3).

3. (3)⇒(4): Considere o pseudo-automorfismo $V = R[a, b]$ com companhia à direita $p = (a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot b)$. Aplicando V ao produto $c \cdot d$, temos que $V(c \cdot d) \cdot p = V(c) \cdot (V(d) \cdot p)$.

   Por conta de $(c, a, b) = 1$ e $(d, a, b) = 1$, $V(c) = c$ e $V(d) = d$, agora obtemos que $V(c \cdot d) \cdot p = c \cdot (d \cdot p)$. Como vale (3), então $(p, c, d) = 1$ ou $c \cdot (d \cdot p) = (c \cdot d) \cdot p$, e $V(c \cdot d) \cdot p = (c \cdot d) \cdot p$, que pode ser reescrito como (4)

4. (4)⇒(5): De $(a, b, c) = 1$ e (1), temos que $(a \cdot (b \cdot c))d = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$. De $(b, c, d) = 1$ e (4), tem-se $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = a \cdot (b \cdot (c \cdot d)) = a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)$. Então $(a \cdot (b \cdot c)) \cdot d$ ou, na vista do Lema (2.2), $(b \cdot c, d, a) = 1$ que é (5)

5. (5)⇒(1): Para completar a prova, observe que (1) pode ser obtido de (5) trocando b, c, d, a, por a, b, c, d.

■

Definição 2.11

Sejam A um subconjunto de M e seja H um subloop de $(M, \cdot)$ que contenha A. Seja A' o subconjunto de H consistindo de todos os $a' \in H$ tais que $(A, a', H) = 1$. Então A' é chamado de adjunto de A em relação a H. O subconjunto $A^* = (A')'$ é chamado de fecho de A em relação a H.

Nesse caso, quando $H = M$, A' e A^* são chamados respectivamente de "adjunto" e "fecho" de A sem mencionar a expressão "com respeito a M". Note que, como $(a, a', h) = 1$ implica que $(a', a, h) = 1$, $A \subset A^*$.

Lema 2.4

O fecho e o adjunto de um conjunto A não vazio com respeito a um subloop H são subloops de $(M, \cdot)$. Mais ainda, $(A, A, H) = 1$ implica que $(A^*, A^*, H) = 1$.

Demonstração: Denote A' por B. Então $(A, B, H) = 1$. Pelo Lema (2.2), $B^{-1} \subset B$. Também é claro que $1 \in B$. Para mostrar que $B = A'$ é um subloop, apenas temos que mostrar que $b_1 \cdot b_2 \in B$. Considere a expressão $[(a \cdot (b_1 \cdot b_2)) \cdot x] \cdot b_2$ sendo $x \in H$ qualquer.

Usando a Definição (2.11), a identidade de Moufang (M_7) e o Lema (2.2) temos que

$$\begin{aligned}[(a \cdot (b_1 \cdot b_2)) \cdot x] \cdot b_2 &= [((a \cdot b_1) \cdot b_2) \cdot x] \cdot b_2 = (a \cdot b_1) \cdot (b_2 \cdot (x \cdot b_2)) \\ &= a \cdot [b_1 \cdot (b_2 \cdot (x \cdot b_2))] = a \cdot [((b_1 \cdot b_2) \cdot x) \cdot b_2] = [a \cdot ((b_1 \cdot b_2) \cdot x)] \cdot b_2\end{aligned}$$

Portanto $(a \cdot (b_1 \cdot b_2)) \cdot x = a \cdot ((b_1 \cdot b_2) \cdot x)$, isto é, $b_1 \cdot b_2 \in B$, e $A' = B$ é um subloop de $(M, \cdot)$. Desde que A^* é o adjunto de $A' = B$, A^* é também um subloop de $(M, \cdot)$. Agora, seja $(A, A, H) = 1$. Isso significa que $A \subset A'$, e de $(A', A^*, H) = 1$ segue que $(A, A^*, H) = 1$ ou $A^* \subset A'$, então $(A^*, A^*, H) = 1$. ■

Corolário 2.1

Se $(A, A, H) = 1$ então A^* é associativo.

Demonstração: Já que $A^* \subset H$, $(A^*, A^*, H) = 1$ implica que $(A^*, A^*, A^*) = 1$, então A^* é um subloop associativo, ou seja, um grupo. ∎

Definição 2.12

Um subloop $A \leq (M, \cdot)$ que satisfaz $(A, A, M) = 1$ é chamado de subloop autoadjunto.

Por fim, vamos ao Teorema de Moufang:

Teorema 2.3: Moufang

Se $(a, b, c) = 1$ para alguns $a, b, c \in M$, então a, b, c geram um subgrupo de $(M, \cdot)$.

Demonstração: Seja $(a, b, c) = 1$, $a, b, c \in M$. Considere os seguintes subconjuntos de M:

$$D = \{a, b, c\},$$
$$F = \{x \in M | (D, D, x) = (a \cdot b, c, x) = 1\} \quad \text{e}$$
$$H = \{h \in M | hF \subset F\}.$$

Na sequência, iremos utilizar repetitivamente as propriedades alternativas (2.1) e o Lema (2.3) aplicados à quadrúplas de elementos de M:

De $(a \cdot b, c, c) = 1$, segue que $c \in F$. Usando c, a, b, b de $(b, b, c \cdot a) = 1$, obtemos $(a \cdot b, c, b) = 1$. Logo, $b \in F$. Usando a, a, b, c de $(a, a, b \cdot c) = 1$, temos $(a \cdot b, c, a) = 1$. Logo, $a \in F$ e assim $D \subset F$.

Desde que $D \subset F$, então $(D \cdot D, D, F) = 1$ implica que $(D \cdot D, D, D) = 1$. Agora aplicamos o Lema (2.3) em D, D, D, F. Então $(D \cdot D, D, F) = 1$ implica que o associador $(D, D, DF) = 1$. Usando $d, F, D \cdot D, d$, de $(d, d, F \cdot (D \cdot D)) = 1$, obtemos $(D \cdot D, d, d \cdot F) = 1$ para qualquer $d \in D$. Em particular, isso significa que $(a \cdot b, c, c \cdot F) = 1$. Logo, $c \cdot F \subset F$, e $c \in H$. Analogamente mostra-se que $a \in H$ e $b \in H$, ou melhor, $D \subset H$.

Consideremos agora o conjunto $E = E_1 \bigcup E_2$ dos semi-endomorfismos de $(M, \cdot)$, onde os conjuntos E_1 e E_2 são definidos por $E_1 = \{R(d_i, d_j) | d_i, d_j \in D\}$ e $E_2 = \{R(d_i \cdot d_j, d_k) | d_i, d_j, d_k \in D\}$.

Então os conjuntos F e H satisfazem as hipóteses do Lema (2.1) com respeito ao conjunto E. Então, por esse lema $H \subset F$ e H é um subloop de $(M, \cdot)$. Agora temos que mostrar que D é associativo, e faremos isso mostrando que ele está contido num subloop associativo de $(M, \cdot)$ De $(D, D, F) = 1$ e $H \subset F$, segue que $(D, D, H) = 1$. Podemos agora invocar o Lema (2.4), então $(D, D, H) = 1$ implica que $(D^*, D^*, H) = 1$, onde D^* é o fecho do conjunto D com respeito ao subloop H. Ainda por esse lema, D^* é um subloop de $(M, \cdot)$. Já que $D \subset D^*$, é claro que o subloop gerado por D também está contido em D^*. Pelo Corolário (2.1), D^* é associativo, e consequentemente o subloop gerado por D também é, ou seja, esse subloop gerado por D é um subgrupo de $(M, \cdot)$. A prova termina aqui. ∎

Corolário 2.2

Qualquer loop de Moufang $(M, \cdot)$ é di-associativo, isto é, quaisquer dois elementos $a, b \in M$ geram um grupo $\langle a, b \rangle$.

Demonstração: A demonstração é uma consequência direta do Teorema de Moufang considerando $D = \{a, b, b\}$. ∎

Corolário 2.3

Qualquer loop de Moufang $(M, \cdot)$ é associativo nas potências, isto é, qualquer elemento $a \in M$ gera um grupo $\langle a \rangle$.

Demonstração: Novamente, a prova segue diretamente do Teorema de Moufang considerando $D = \{a, a, a\}$. ■

Referências

O'CONNOR, John Joseph e ROBERTSON, Edmund Frederick (4 de set. de 2023). **Mactutor: Ruth Moufang**. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Moufang/ (acessado em: 28/8/2023).

PFLUGFELDER, Hala Orlik (1991). **Quasigroups and loops: Introduction.** 3ª ed. Heldermann Verlag.