Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco
Volume 9 - Número 1
Agosto 2022

Artigo de Pesquisa

Imersão de Anéis Associativos

Edilson Soares Miranda
Universidade Estadual de Maringá
esmiranda@uem.br

Valdinei Cezar Cardoso
Universidade Federal do Espírito Santo
v13dinei@gmail.com

Johan Gaigher Zabini
Universidade Federal do Espírito Santo
johangaigherzabini@gmail.com

Resumo

Neste trabalho verificamos que qualquer anel associativo primo sem elemento identidade pode ser considerado como um ideal de um anel associativo primo com elemento identidade. Este resultado facilita a solução de alguns problemas na teoria de anéis primos sem identidade. Em particular, utilizando este resultado verificamos algumas equivalências usuais de ideais primos em anéis associativos sem identidade.

Palavras-chaves: Anel Associativo. Sem Identidade. Imersão.

Abstract

In this work we verify that any prime associative ring without identity element can be considered as an ideal of a prime associative ring with an identity element. This result facilitates the solution of some problems in the theory of prime rings without identity. In particular, using this result we verify some usual equivalences of prime ideals in associative rings without identity.

Keywords: Associative Ring. Without identity. Embedding.

1 Introdução

Uma das características da matemática do último século foi a sua tendência para a abstração, a teoria de anéis é um dos frutos dessa abstração, sendo um sistema algébrico que funciona como uma das pedras fundamentais para estruturas que compreendem o campo de estudos denominado Álgebra Moderna. Existem muitos resultados que são válidos para anéis com identidade e não se verificam para anéis sem identidade, por exemplo, todo ideal maximal de um anel com identidade é um ideal primo, este resultado não é válido para anéis sem identidade. Um exemplo importante de anéis sem identidade são os anéis nil, ou seja, anéis cujos elementos são nilpotentes. Existe uma famosa conjectura, na teoria de anéis nil, que atualmente é denominada como o problema de Köthe, que estabelece a seguinte questão: *A soma de dois ideais à direita nil é também um ideal à direita nil?* Este problema foi introduzido por G. Köthe em 1930 e continua em aberto até o presente momento. Uma longa lista de questões relacionadas com a conjectura de Köthe aparece na literatura, todas abordando questões de nilidade. Algumas questões envolvendo nilidade de anéis podem ser encontradas em (FERRERO e WISBAUER, 2003). Neste trabalho, estudamos algumas propriedades de anéis associativos não necessariamente com elemento identidade. Na seção 2 apresentaremos alguns conceitos básicos na teoria de anéis associativos não necessariamente com elemento identidade, para mais detlhes ver (DOMINGUES e IEZZI, 2003), (GONÇALVES, 1979), (MCCOY, 1969) e (MILLES, 1972). Na seção 3 apresentamos o resultado principal deste trabalho. Assumimos que o leitor tenha uma razoável familiaridade com as noções básicas da teoria de grupos.

2 Noções Básicas na Teoria de Anéis

Definição 2.1

Um conjunto não vazio R é dito um anel associativo ou simplesmente um anel, se em R estão definidas duas operações binárias, que indicaremos por $+$ e $\cdot$, chamadas de adição e multiplicação, respectivamente, tais que, para todos a, b, $c \in R$, verifica-se:

$i)$ $(a+b)+c = a+(b+c)$, a operação de adição é associativa.

$ii)$ $a+b = b+a$, a operação de adição é comutativa:.

$iii)$ Existe um elemento neutro $0 \in R$, tal que $a+0 = 0+a = a$.

$iv)$ Existe o elemento simétrico $-a \in R$, tal que $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

$v)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, a operação de multiplicação é associativa.

$vi)$ $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$, as operações de multiplicação e adição satisfazem as leis distributivas.

Observação 2.1

Sejam R um anel e a, b elementos quaisquer de R. Se a operação multiplicação em R é comutativa, isto é, $a \cdot b = b \cdot a$, dizemos tratar-se de um anel comutativo. Se a operação multiplicação em R tem um elemento neutro, isto é, existe um elemento $e \in R, e \neq 0$, tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$, dizemos que o anel R tem elemento identidade.

Por simplicidade de notação eliminaremos, de agora em diante, o ponto de $a.b$ e indicaremos este produto simplesmente por ab. A seguir listamos alguns exemplos de anéis.

Exemplo 2.1

O conjunto $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem n sobre os números reais com as operações usuais de adição e multiplicação é um anel não comutativo com identidade.

Exemplo 2.2

O conjunto $2\mathbb{Z} = \{2n$ tal que $n \in \mathbb{Z}\}$ com as operações usuais de $\mathbb{Z}$ é um anel comutativo sem identidade.

Exemplo 2.3

Considere os anéis R_1 e R_2. No produto cartesiano

$$R_1 \times R_2 = \{(a,b) \text{ tal que } a \in R_1,\ b \in R_2\}$$

definimos as operações de adição e multiplicação respectivamente, por

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b)(c,d) = (ac, bd).$$

Com estas operações $R_1 \times R_2$ é um anel, chamado anel produto de R_1 e R_2 ou simplesmente, produto direto de R_1 por R_2.

Definição 2.2

Seja R um anel. Um subconjunto S de R é chamado um subanel de R, se S é um anel em relação as operações induzidas por restrição das operações de R.

Exemplo 2.4

$i)$ O conjunto $2\mathbb{Z}$ é um subanel sem identidade $\mathbb{Z}$.

$ii)$ O conjunto $\mathbb{Z}$ é um subanel de $\mathbb{R}$ e ambos têm a mesma identidade.

$iii)$ Considere o produto direto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ com as operações usuais. O conjunto $\{0\}\times\mathbb{Z}$ é um subanel de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. A identidade do anel $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ é o elemento $(1,1)$ e a identidade de $\{0\}\times\mathbb{Z}$ é o elemento $(0,1)$.

Proposição 2.1

Sejam R um anel e S um subconjunto não vazio de R. O conjunto S é um subanel de R, se e somente se, $a-b\in S$ e $ab\in S$ para cada a, $b\in S$.

Demonstração: Sejam S é um subanel de R e a, $b\in S$. Como S é um anel, claramente $a-b\in S$ e $ab\in S$. Reciprocamente, considere $a-b\in S$ e $ab\in S$ para cada a, $b\in S$. Temos que, $0=a-a\in S$, assim o elemento neutro da adição está em S, o que mostra a condição $iii)$ da definição de anéis. Como $a+(-a)=0\in S$, então $-a\in S$, que mostra a condição $iv)$ da definição de anéis. Além disso, $a+b=a-(-b)\in S$. As condições $i)$, $ii)$, $v)$ e $vi)$ da definição de anéis seguem do fato que $S\subseteq R$. Portanto S é um anel com as operações induzidas de R. ■

Definição 2.3

Sejam R um anel e I um subgrupo de R com relação à adição. Então

$i)$ I é um ideal à direita de R, se $ba\in I$ para cada $a\in R$ e $b\in I$.

$ii)$ I é um ideal à esquerda de R, se $ab\in I$ para cada $a\in R$ e $b\in I$.

$iii)$ I é um ideal de R, se I é simultaneamente um ideal à esquerda e um ideal à direita de R.

Exemplo 2.5

Sejam R um anel e $a\in R$.

$i)$ O subconjunto $aR=\{ab$ tal que $b\in R\}$ é um ideal à direita de R.

$ii)$ O subconjunto $Ra=\{ba$ tal que $b\in R\}$ é um ideal à esquerda de R.

$iii)$ O subconjunto $(a)=\{na+sa+at+\sum s_iat_i$ tal que $n\in\mathbb{Z},\ s,\ t,\ s_i,\ t_i\in R\}$ é um ideal de R, chamado de ideal gerado por a.

Proposição 2.2

Sejam I e J ideais de um anel R. Então

$i)$ A interseção, $I\cap J=\{x\in R$ tal que $x\in I$ e $x\in J\}$ é um ideal em R.

$ii)$ A soma, $I+J=\{x+y\in R$ tal que $x\in I$ e $y\in J\}$ é um ideal em R.

$iii)$ O produto, $IJ=\{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\in R$ tal que $x_i\in I$ e $y_i\in J\}$ é um ideal em R.

Demonstração: Temos que $0\in I$ e $0\in J$, assim $0\in I\cap J$, $0=0+0\in I+J$ e $0=00\in IJ$. É fácil verificar que, $I\cap J$, $I+J$ e IJ são subgrupos aditivos de R.

i) Sejam $x \in I \cap J$ e $a \in R$. Então $x \in I$ e $x \in J$. Como I e J são ideais, então ax, $xa \in I$ e ax, $xa \in J$. Portanto ax, $xa \in I \cap J$. Então $I \cap J$ é um ideal de R.

ii) Sejam $b \in I + J$ e $a \in R$. Então $b = x + y$ com $x \in I$ e $y \in J$. Como I e J são ideais, então $ba = (x + y)a = xa + ya$ com $xa \in I$, $ya \in J$. Portanto $ba \in I + J$. Analogamente, $ab \in I + J$. Então $I + J$ é um ideal de R.

ii) Sejam $b \in IJ$ e $a \in R$. Então $b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ com $x_i \in I$ e $y_i \in J$. Como I e J são ideais, então $ba = (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)a = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i a)$ com $x_i \in I$, $y_i a \in J$. Portanto $ba \in IJ$. Analogamente, $ab \in IJ$. Então IJ é um ideal de R. ■

Sejam R um anel e I um ideal de R. Definimos em R uma relação da seguinte forma:

$$a \equiv b \text{ se, e somente se, } a - b \in I.$$

A relação definida acima é uma relação de equivalência. De fato, como $0 = a - a \in I$, então $a \equiv a$. Se $a \equiv b$, então $a - b \in I$. Assim $b - a = -(a - b) \in I$, logo $b \equiv a$. Se $a \equiv b$ e $b \equiv c$, então $a - b \in I$ e $b - c \in I$. Logo $a - c = (a - b) + (b - c) \in I$, assim, $a \equiv c$. Portanto é uma relação de equivalência.

Denotamos por R/I o conjunto das classes de equivalência, onde a classe do elemento $a \in R$ é o subconjunto

$$\overline{a} = a + I = \{a + b \text{ tal que } b \in I\}$$

No conjunto R/I definimos as operações de adição e multiplicação, a partir das operações de R, da seguinte forma

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \text{ isto é, } (a + I) + (b + I) = (a + b) + I.$$

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} \text{ ou seja, } (a + I)(b + I) = (ab) + I.$$

As operações definidas acima não dependem da escolha de representantes em R/I. De fato, se

$$a + I = a' + I \text{ e } b + I = b' + I,$$

então

$$a - a' \in I \text{ e } b - b' \in I.$$

Na soma,

$$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in I.$$

Então

$$(a + b) + I = (a' + b') + I, \text{ isto é, } (a + I) + (b + I) = (a' + I) + (b' + I).$$

No caso da multiplicação, temos que

$$b(a - a') \in I \text{ e } (b - b')a' \in I.$$

Então

$$ba - b'a' = ba - ba' + ba' - b'a' = b(a - a') + (b - b')a' \in I.$$

Então

$$ba + I = b'a' + I, \text{ isto é, } (b + I)(a + I) = (b' + I)(a' + I).$$

Proposição 2.3

Sejam R um anel e I um ideal de R. O Conjunto R/I com as operações de soma e multiplicação definidas anteriormente é um anel, chamado anel quociente R por I.

Demonstração: $i)$ Associatividade da adição,

$$[(a+I)+(b+I)]+(c+I) = [(a+b)+I]+(c+I) = (a+b)+c+I$$

$$= a+(b+c)+I = (a+I)+[(b+c)+I] = a+I+[(b+I)+(c+I)].$$

$ii)$ Comutatividade da adição,

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I = (b+a)+I = (b+I)+(a+I).$$

$iii)$ $0+I$ é o elemento neutro de R/I, onde 0 é o elemento neutro de R, pois $(a+I)+(0+I) = (a+0)+I = a+I$.
$iv)$ $-a+I$ é o elemento simétrico do elemento $a+I$ de R/I, onde $-a$ é o elemento simétrico de a em R. De fato, $a+I+(-a)+I = a+(-a)+I = 0+I$.
$v)$ A operação de multiplicação é associativa, pois

$$[(a+I)(b+I)](c+I) = (ab+I)(c+I) = (ab)c+I$$

$$a(bc)+I = (a+I)(bc+I) = (a+I)[(b+I)(c+I)].$$

$vi)$ As operações de multiplicação e adição satisfazem as leis distributivas, pois

$$(a+I)[(b+I)+(c+I)] = (a+I)(b+c+I) = a(b+c)+I$$

$$= (ab+ac)+I = (ab+I)+(ac+I) = (a+I)(b+I)+(a+I)(c+I).$$

A outra lei,

$$[(b+I)+(c+I)](a+I) = (b+I)(a+I)+(c+I)(a+I)$$

pode ser verificada de forma análoga. ■

Proposição 2.4

Sejam R um anel e I um ideal de R. Se J é um ideal de R/I, então existe um ideal H de R que contém I tal que $J = H/I$.

Demonstração: Seja J um ideal de R/I. Considere $H = \{a \in R \text{ tal que } a+I \in J\}$. Se $a \in I$, então $a+I = 0+I \in J$, logo $I \subseteq H$. Dados $a, b \in H$ e $r \in R$, por definição $a+I \in J$, $b+I \in J$ e $r+I \in R/I$. Como J é ideal de R/I, segue que $(-b+I) \in J$, $(a+I)+(-b+I) = (a-b)+I \in J$ e $(a+I)(b+I) = ab+I \in J$. Então $a-b \in H$ e $ab \in H$. Portanto H é um subgrupo aditivo de R. Além disso, $(a+I)(r+I) = ar+I \in J$ e $(r+I)(a+I) = ra+I \in J$, então ar, $ra \in H$. Portanto H é um ideal de R. Temos que, $J = H/I$. De fato, seja $a \in J$, então $a = b+I$. Assim $b \in H$, logo $a = b+I \in H/I$. Portanto $J \subseteq H/I$. Para outra inclusão considere $a \in H/I$, assim $a = b+I$ com $b \in H$. Então pela definição de H temos que $a = b+I \in J$, assim $H/I \subseteq J$. Portanto $J = H/I$. ■

Definição 2.4

Dados os anéis R e S, uma função $f : R \to S$ é chamada de um homomorfismo de anéis se para todo $a, b \in R$, vale:

$i)$ $f(a+b) = f(a) + f(b)$

$ii)$ $f(ab) = f(a)f(b)$

Exemplo 2.6

Sejam R um anel e I um ideal de R. A função $f : R \to R/I$ dada por, $f(a) = \overline{a}$ é um homomorfismo de anéis.

Definição 2.5

Seja $f : R \to S$ um homomorfismo de anéis.

$i)$ f é chamado monomorfismo se f é injetor.

$ii)$ f é chamado epimorfismo se f é sobrejetor.

$iii)$ f é chamado isomorfismo se f é injetor e sobrejetor. Nesse caso, dizemos que R e S são isomorfos e denotamos por $R \simeq S$.

3 Imersão de Anéis sem Identidade

Seja R um anel não necessariamente com elemento identidade. Nesta seção denotaremos por $S = \mathbb{Z} \times R$ o produto do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ por R com as seguintes operações de adição e multiplicação. Se m e n estão em $\mathbb{Z}$ e a, b estão em R, definimos a adição e a multiplicação em S por

$$(m, a) + (n, b) = (m + n, a + b)$$

$$(m, a)(n, b) = (mn, mb + na + ab),$$

onde na e mb denota $(a + a + ... + a)$ n-vezes e $(b + b + ...b)$ m-vezes respectivamente. Se n é um inteiro negativo, o elemento na denota $((-a) + (-a) + ... + (-a))$ $(-n)$-vezes. No caso $n = 0$, $0a$ denota o elemento neutro 0 de R.

Proposição 3.1

Seja R um anel qualquer. O conjunto $S = \mathbb{Z} \times R$ é um anel com identidade, com as operações de adição e multiplicação definidas acima.

Demonstração: Sejam (m, a), (n, b) e $(o, c) \in S$.

(i) vale a associatividade da adição, pois

$$(m, a) + [(n, b) + (o, c)] = (m, a) + (n + o, b + c) = (m + [n + o], a + [b + c])$$

$$= ([m + n] + o, [a + b] + c) = [(m, a) + (n, b)] + (o, c).$$

(ii) O elemento neutro da adição é $(0, 0)$, pois

$$(0, 0) + (m, a) = (0 + m, 0 + a) = (m + 0, a + 0) = (m, a) + (0, 0) = (m, a).$$

(iii) A soma é comutativa, pois

$$(m, a) + (n, b) = (m + n, a + b) = (n + m, b + a) = (n, b) + (m, a).$$

(iv) O elemento simétrico da adição de (m, a) é o elemento $(-m, -a)$, pois

$$(m, a) + (-m, -a) = (m - m, a - a) = (0, 0).$$

(v) Vale a associatividade da multiplicação, pois

$$(m,a)[(n,b)(o,c)] = (m,a)(no, nc+ob+bc)$$

$$= (mno, m(nc+ob+bc)+noa+a(nc+ob+bc))$$

$$= (mno, mnc+mob+mbc+noa+anc+aob+abc)$$

$$= (mno, mnc+omb+ona+oab+mbc+nac+abc)$$

$$= (mno, mnc+o(mb+na+ab)+(mb+na+ab)c)$$

$$= (mn, mb+na+ab)(o,c) = [(m,a)(n,b)](o,c).$$

(vi) vale a distributividade, pois

$$(m,a)[(n,b)+(o,c)] = (m,a)(n+o, b+c) = (mn+mo, mb+mc+an+ao+ab+ac)$$

$$= (mn, mb+an+ab)+(mo, mc+ao+ac) = (m,a)(n,b)+(m,a)+(o,c).$$

Além disso, $(1,0)$ é o elemento identidade de S. Pois,

$$(1,0)(m,a) = (1m, 1a+m0+0a) = (m,a)$$

$$(m,a)(1,0) = (m1, m0+1a+a0) = (m,a).$$

Portanto S é um anel com identidade. ■

A próxima proposição mostra que qualquer anel sem identidade pode ser considerado como um ideal de um anel com identidade.

Proposição 3.2

Sejam R um anel qualquer e $S = \mathbb{Z} \times R$. Então existe um ideal de S isomorfo a R como anel.

Demonstração: Seja R um anel qualquer. Considere o conjunto $B = \{(0,r)$ tal que $r \in R\}$. Basta mostrar que B é um ideal de $S = \mathbb{Z} \times R$, isomorfo a R, como um anel. Temos que B é um subanel de S. De fato, Sejam $(0,a) \in B$ e $(0,b) \in B$. Então

$$(0,a)-(0,b) = (0, a-b) \in B$$

e

$$(0,a)(0,b) = (00, 0b+0a+ab) = (0,ab) \in B.$$

Portanto B é um subanel de S. Sejam $(m,a) \in S$ e $(0,b) \in B$. Então,

$$(0,b)(m,a) = (0m, 0a+bm+ba) \in B$$

$$(m,a)(0,b) = (m0, mb+a0+ab) = (0, mb+ab) \in B.$$

Portanto, B é um ideal de S. Considere a aplicação $\varphi : R \to B$, dada por $\varphi(r) = (0,r)$. Para cada r_1, $r_2 \in R$, temos que

$$\varphi(r_1+r_2) = (0, r_1+r_2) = (0,r_1)+(0,r_2) = \varphi(r_1)+\varphi(r_2)$$

$$\varphi(r_1r_2) = (0, r_1r_2) = (0,r_1)(0,r_2) = \varphi(r_1)\varphi(r_2)$$

Assim φ é um homomorfismo de anéis. Claramente φ é um homomorfismo sobrejetor. Além disso, se $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$, então $(0,r_1) = (0,r_2)$, assim $r_1 = r_2$. Então, φ é homomorfismo injetor. Portanto φ é isomorfismo, ou seja, $R \simeq B$. ■

Observação 3.1

Sejam R um anel qualquer e $S = \mathbb{Z} \times R$. Pela proposição anterior, existe um ideal de S isomorfo a R. Para simplificar as notações podemos considerar $R \subseteq S$.

Definição 3.1

Um ideal P de um anel R é chamado ideal primo se para quaisquer ideais I, J de R com $IJ \subseteq P$, então $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. Um anel R é dito primo se (0) é um ideal primo de R, isto é se $IJ = 0$, então $I = 0$ ou $J = 0$.

Exemplo 3.1

$R = 2\mathbb{Z}$ é um anel primo e $S = \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ não é um anel primo.

Para anéis primos R, estudamos a construção de um anel R^* com as mesmas propriedades de S e preservando algumas propriedades de R.

Lema 3.1

Sejam R um anel qualquer e $S = \mathbb{Z} \times R$. O conjunto anulador $A_{nn}S(R)$, definido por

$$A_{nn}S(R) = \{s \in S \text{ tal que } Rs = 0\}$$

é um ideal de S.

Demonstração: Sejam (m, a), $(n, b) \in A_{nn}S(R)$ e $(o, c) \in S$. Temos que

$$R((m, a) - (n, b)) \subseteq R(m, a) - R(n, b) = 0 \text{ e } R(m, a)(n, b) = 0,$$

assim $(m, a) - (n, b) \in A_{nn}S(R)$ e $(m, a)(n, b) \in A_{nn}S(R)$. Portanto, $A_{nn}S(R)$ é um subanel de S. Temos que $R(m, a)(o, c) = 0$, então $(m, a)(o, c) \in A_{nn}S(R)$. Assim $A_{nn}S(R)$ é um ideal à direita de S. Agora vamos mostrar que $A_{nn}S(R)$ é um ideal à esquerda de S. De fato, para cada $r \in R$, $(0, r) \in S$,

$$(0, r)(o, c)(m, a) = (0, ro + rc)(m, a) \subseteq R(m, a) = 0.$$

Logo $R(o, c)(m, a) = 0$, então $(o, c)(m, a) \in A_{nn}S(R)$. ■

Sejam R um anel sem identidade e $S = \mathbb{Z} \times R$. Definimos o anel com identidade R^* como o anel quociente

$$R^* = S/A_{nn}S(R).$$

Note que, $(1, 0) + A_{nn}S(R)$ é o elemento identidade de R^*, onde $(1, 0)$ é o elemento identidade de S.

Proposição 3.3

Se R é um anel primo qualquer, então o anel $R^* = S/A_{nn}S(R)$ é um anel primo com identidade.

Demonstração: Sejam U e V ideais de R^* tal que $UV = 0$. A Proposição 2.1 implica que $U = U_1 + A_{nn}S(R)$ e $V = V_1 + A_{nn}S(R)$ onde U_1 e V_1 são ideais de S. Como $U_1V_1 + A_{nn}S(R) \subseteq UV = 0$, então $U_1V_1 \subseteq A_{nn}S(R)$. Assim $RU_1V_1 = 0$, logo $RU_1RV_1 = 0$. Como R é um anel primo, então $RU_1 = 0$ ou $RV_1 = 0$. Portanto $U_1 \subseteq A_{nn}S(R)$ ou $V_1 \subseteq A_{nn}S(R)$. Portanto $U = 0$ ou $V = 0$. Então R^* é um anel primo. ■

A seguir apresentamos o resultado principal deste trabalho, o qual mostra que todo anel primo sem identidade pode ser considerado como um ideal de um anel primo com identidade.

Proposição 3.4

Sejam R um anel primo qualquer, $S = \mathbb{Z} \times R$ e $R^* = S/A_{nn}S(R)$. Então o anel R é isomorfo a um ideal de R^*.

Demonstração: Considere o conjunto $B = \{r + A_{nn}S(R) \in R^* \text{ tal que } r \in R\}$. Claramente B é um subanel de R^*. Vamos mostrar que B é um ideal de R^*. De fato, sejam $a + A_{nn}S(R) \in R^*$ e $b + A_{nn}S(R) \in B$. Temos que $a \in S$ e $b \in R$. Como R é um ideal de S, então, $ab \in R$ e $ba \in R$. Assim,

$$(a + A_{nn}S(R))(b + A_{nn}S(R)) = ab + A_{nn}S(R) \in B$$

$$(b + A_{nn}S(R))(a + A_{nn}S(R)) = ba + A_{nn}S(R) \in B.$$

Portanto B é um ideal de R^*. A aplicação φ de R em B, dada por $\varphi(r) = r + A_{nn}S(R)$ para cada $r \in R$ é um homomorfismo sobrejetor de anéis. Se $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$, então $r_1 + A_{nn}S(R) = r_2 + A_{nn}S(R)$. Portanto $r = r_1 - r_2 \in R \cap A_{nn}S(R)$, assim $Rr = 0$. Portanto $RSrS = 0$, pois $RS \subseteq R$. Como R é um anel primo, então $SrS = 0$. Portanto $r = 0$, ou seja $r_1 = r_2$. Então φ um homomorfismo injetor. Portanto $R \simeq B \subseteq R^*$. ■

No estudo de anéis associativos primos sem identidade é interessante considerar o anel R^*, pois este anel tem identidade e ainda é um anel primo. A Proposição 10.2 em (LAM, 1991), estabelece equivalências mais usuais de ideais primos em anéis com elemento identidade. O próximo resultado mostra que este resultado também é satisfeito para anéis sem identidade, na demonstração utilizamos o anel R^* seguindo a mesma idéia de (LAM, 1991).

Proposição 3.5

Sejam R um anel qualquer e P um ideal de R. As seguintes condições são equivalentes:

$i)$ P é um ideal primo de R.

$ii)$ Se I e J são ideais à direita (ou à esquerda) de R tais que $IJ \subseteq P$, então $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$.

$iii)$ Para $a, b \in R$, se $aRb \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.

Demonstração: $i) \Rightarrow ii)$ Sejam P um ideal primo de R, I, J ideais à direita de R com $IJ \subseteq P$. Então RI e RJ são ideais de R com $(RI)(RJ) \subseteq IJ \subseteq P$. Como P é primo, então $RI \subseteq P$ ou $RJ \subseteq P$. Se R tem elemento identidade, então $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. Se R não tem elemento identidade, considere o anel primo R^*. Temos que R é um ideal de R^*, assim R^*I e R^*R são ideais de R. Se $RI \subseteq P$, então $RR^*I \subseteq RI \subseteq P$. Como P é primo, segue que $R^*I \subseteq P$. Portanto, $I \subseteq P$, pois R^* tem elemento identidade. Analogamente, se $RJ \subseteq P$, então $J \subseteq P$. O caso à esquerda é análogo.
$ii) \Rightarrow iii)$ Se $aRb \subseteq P$, então $aRbR \subseteq P$. Como aR e bR são ideais à direita de R, então aR ou bR estão em P. Se $aR \subseteq P$, e R tem identidade, segue que $a \in P$. Se $aR \subseteq P$ e R não tem identidade, temos que $aR^*R \subseteq P$. Como aR^* e R são ideais à direita, segue que $aR^* \subseteq P$. Então $a \in P$. Se $bR \subseteq P$, analogamente temos que $b \in P$.
$iii) \Rightarrow i)$ Considere I e J ideais de R tais que $IJ \subseteq P$. Se I não está contido em P, então existe $a \in I$ com $a \notin P$. Seja $b \in J$. Então $aRb \subseteq IJ \subseteq P$ e por hipótese $b \in P$. Portanto, $J \subseteq P$. Logo P é um ideal primo. ■

Referências

DOMINGUES, Hygino H. e IEZZI, Gelson (2003). **Álgebra Moderna**. 2ª ed. Ed. Saraiva.

FERRERO, Miguel e WISBAUER, Robert (2003). **Unitary Strongly Prime Rings and Related Radicals**. Em: *J.Pure Appl. Algebra*, pp. 209–226.

GONÇALVES, Adilson (1979). **Introdução a Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA.

LAM, Tsit-Yuen (1991). **A First Course in Noncommutative Rings**. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

MCCOY, Neal Henry (1969). **The Theory of Rings**. The Macmillan Conpany.

MILLES, Francisco Cesar Polcino (1972). **Anéis e Módulos**. Publicaçoes do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.