TRÊS PROBLEMAS SOBRE RECORRÊNCIAS NA OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Juan López Linares

Universidade de São Paulo - Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos

jlopez@usp.br

Alexys Bruno-Alfonso

Universidade Estadual Paulista - Faculdade de Ciências - Campus de Bauru

alexys.bruno-alfonso@unesp.br

Grazielle Feliciani Barbosa

Universidade Federal de São Carlos - Departamento de Matemática

grazielle@dm.ufscar.br

RESUMO

Se discutem detalhadamente três problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), onde o foco está em lidar com recorrências. No primeiro, a recorrência é uma igualdade de segunda ordem, linear e não homogênea e pede-se mostrar a validade de determinada propriedade. No segundo a lei de recorrência é definida usando uma desigualdade de segunda ordem linear e homogênea e deve-se mostrar que vale outra desigualdade para os termos da sequência correspondente. No terceiro problema a recorrência é de primeira ordem, porém não linear, e se requer encontrar uma fórmula fechada para os termos da sequência relacionada. Os desafios permitem treinar o uso de várias técnicas como somas e produtos telescópicos, soma de uma progressão aritmética e geométrica e demonstração por contradição.

ABSTRACT

Three problems proposed for the International Mathematical Olympiad (IMO) are discussed in detail, where the focus is on dealing with recurrences. In the first, recurrence is a second order equality, linear and inhomogeneous, and it is requested to show the validity of a given property. In the second, the recurrence law is defined using a second-order linear and homogeneous inequality and it must be shown that another inequality is valid for the terms of the corresponding sequence. In the third problem, recurrence is first order, but not linear, and it is necessary to find a closed formula for the terms of the related sequence. The challenges make it possible to train the use of various techniques such as telescopic sums and telescopic products, the sum of an arithmetic and geometric progression and demonstration by contradiction.

Palavras-chave: Olimpíada Internacional de Matemática, Sequências, Ensino Médio, Ensino Universitário, Recorrências.

1 INTRODUÇÃO

É comum que os valores ou as propriedades de sequências numéricas sejam expressos mediante uma relação entre o termo n-ésimo da sequência e os anteriores. Usar recorrências pode ser a forma mais simples de formular matematicamente um problema da vida real. Porém, no Ensino Médio o estudo das mesmas usualmente é restrito a recorrências de primeira ordem, lineares e homogêneas, tais como as progressões aritméticas e geométricas. Uma excelente introdução ao estudo de relações de recorrência pode ser encontrada em [1] e [2].

Neste artigo detalhamos a resolução de três problemas da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), visando incentivar estudantes e professores do Ensino Médio. Embora úteis e proveitosas, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas da IMO não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos temos conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas resoluções se encontram somente em inglês.

Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que se preparam para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas no artigo usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor. Iniciamos com uma introdução dos conceitos básicos sobre recorrências.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Sequência é uma função em que os elementos do domínio são números naturais. Limitaremos nosso estudo a sequências com contradomínio real. Usaremos as notações (a_n), $a = f(n)$ ou simplesmente a_n para referirmos a sequência $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

Definição 2.1 (Ordem m de lei de recorrência): *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. A lei de recorrência*

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-m}),\ \forall n > m,$$

é chamada de ordem m.

Exemplo 2.1: *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$ e*

$$a_n = 7a_{n-1},\ \forall n > 1,$$

$$b_n = n^5 - b_{n-2},\ \forall n > 2,$$

$$c_n = nc_{n-2} + 5c_{n-3},\ \forall n > 3,$$

$$d_n = d_{n-2}^5 - 11d_{n-4},\ \forall n > 4.$$

A leis de recorrência para as sequências a_n, b_n, c_n e d_n são de ordem 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

Definição 2.2 (Homogeneidade de lei de recorrência): *Uma lei de recorrência será chamada homogênea quando a função que define a mesma não tem somandos que não dependam de outro elemento da mesma sequência. Caso contrário é dita não homogênea.*

Exemplo 2.2: *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$ e*

$$a_n = 7a_{n-1}^2,\ \forall n > 1,$$

$$b_n = nb_{n-1} + 5b_{n-2},\ \forall n > 2,$$

$$c_n = n + c_{n-3}^5,\ \forall n > 3,$$

$$d_n = n^2 d_{n-4} - 1,\ \forall n > 4.$$

As leis de recorrência para as sequências a_n e b_n são homogêneas e para as sequências c_n e d_n são não homogêneas.

Definição 2.3 (Linearidade de lei de recorrência): *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $\{k(n), p_1(n), \cdots, p_m(n)\}$ um conjunto de $m+1$ funções com domínio natural e contradomínio real. A lei de recorrência de ordem m para a sequência (a_n) é linear quando:*

$$a_n = k(n) + p_1(n)\, a_{n-1} + \ldots + p_m(n)\, a_{n-m},\ \forall n > m.$$

No caso em que $k(n)$ é zero para todo n, a lei de recorrência será também homogênea.

Exemplo 2.3: *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$ e*

$$a_n = 7a_{n-1}^2,\ \forall n > 1,$$

$$b_n = \sqrt{n}b_{n-1} + 5b_{n-2},\ \forall n > 2,$$

$$c_n = nc_{n-3} - n,\ \forall n > 3,$$

$$d_n = d_{n-1}d_{n-4},\ \forall n > 4.$$

As leis de recorrência para as sequências b_n e c_n são lineares e para as sequências a_n e d_n não lineares.

A lei de recorrência de ordem m permite calcular todos os termos da sequência (a_n) em função dos iniciais $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$. Os problemas sobre leis de recorrência usualmente fornecem os valores iniciais e requerem a obtenção do termo geral a_n. Este deve ser dado por uma fórmula explícita (fechada) em n, sem conter o próprio a_n, termos anteriores da mesma sequência ou de outras sequências auxiliares.

2.1 RESOLUÇÃO DE RECORRÊNCIA LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM E HOMOGÊNEA

Como modelo de lei de recorrência linear e homogênea de primeira ordem iremos resolver uma progressão geométrica (PG). Sejam $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b, q \in \mathbb{R}$, $a_1 = b$ e

$$a_n = qa_{n-1},\ \forall n \geq 2. \tag{1}$$

Queremos encontrar uma fórmula fechada (explícita). Isto é, escrever a_n como uma função de n e não do termo anterior. Para tal escrevemos (1) para valores decrescentes de n até 2:

$$a_n = q \cdot \cancel{a_{n-1}},$$

$$\cancel{a_{n-1}} = q \cdot \cancel{a_{n-2}},$$

$$\cancel{a_{n-2}} = q \cdot \cancel{a_{n-3}},$$

$$\vdots$$

$$\cancel{a_3} = q \cdot \cancel{a_2},$$

$$\cancel{a_2} = q \cdot a_1.$$

Multiplicando todas as equações anteriores temos um produto telescópico:

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1,$$

$$a_n = q^{n-1} \cdot b,\ \forall n \geq 1.$$

Esta última equação é a fórmula fechada de uma PG de razão q e valor inicial b.

2.2 RESOLUÇÃO DE RECORRÊNCIA LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM E NÃO HOMOGÊNEA

Para exemplificar leis de recorrência lineares não homogêneas de primeira ordem, restringimos nosso estudo a coeficientes constantes. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b, q, r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ e $q \notin \{0, 1\}$. Iremos considerar dois casos: $a_n = 1 \cdot a_{n-1} + r$ (progressão aritmética ou PA) e $a_n = q \cdot a_{n-1} + r$ (progressão aritmética-geométrica ou PAG).

2.2.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma progressão aritmética (PA) é definida como $a_1 = b$ e

$$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + r, \ \forall n \geq 2. \tag{2}$$

Escrevemos (2) para valores decrescentes de n, até $n = 2$, para por em evidência uma soma telescópica:

$$\begin{aligned} a_n &= \cancel{a_{n-1}} + r, \\ \cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} + r, \\ \cancel{a_{n-2}} &= \cancel{a_{n-3}} + r, \\ &\vdots \\ \cancel{a_3} &= \cancel{a_2} + r, \\ \cancel{a_2} &= a_1 + r. \end{aligned}$$

Somando todas as equações anteriores encontramos

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

$$a_n = b + (n-1)r, \ \forall n \geq 1.$$

Esta última equação é a fórmula fechada de uma PA de passo ou razão r e valor inicial b.

2.2.2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA-GEOMÉTRICA

A lei de recorrência de uma progressão aritmética-geométrica (PAG) é da forma:

$$a_n = q \cdot a_{n-1} + r, \ \forall n \geq 2. \tag{3}$$

Quando $q = 0$ a recorrência está resolvida e se $q = 1$ resulta em uma PA. Quando $r = 0$ temos uma PG. Logo consideramos $q \notin \{0, 1\}$ e $r \neq 0$. Primeiro, procuramos uma solução da equação homogênea correspondente de (3):

$$c_n = q \cdot c_{n-1}, \ \forall n \geq 2.$$

Temos que (c_n) é uma progressão geométrica de razão q, logo uma solução é

$$c_n = q^{n-1}, \ \forall n \geq 2.$$

Segundo, escrevemos (a_n) como produto de (c_n) e uma nova sequência (d_n):

$$a_n = c_n \cdot d_n = q^{n-1} \cdot d_n, \tag{4}$$

$$a_{n-1} = c_{n-1} \cdot d_{n-1} = q^{n-2} \cdot d_{n-1}.$$

Substituindo as duas equações anteriores em (3) encontramos:

$$q^{n-1} \cdot d_n = q \cdot q^{n-2} \cdot d_{n-1} + r,$$

$$d_n = d_{n-1} + \frac{r}{q^{n-1}}, \ \forall n \geq 2. \tag{5}$$

Substituindo $n = 1$ e $a_1 = b$ em (4) teremos $d_1 = b$.

Terceiro, escrevemos (5) para valores decrescentes de n, até $n = 2$, para por em evidência uma soma telescópica:

$$\begin{aligned}
d_n &= \cancel{d_{n-1}} + \frac{r}{q^{n-1}},\\
\cancel{d_{n-1}} &= \cancel{d_{n-2}} + \frac{r}{q^{n-2}},\\
\cancel{d_{n-2}} &= \cancel{d_{n-3}} + \frac{r}{q^{n-3}},\\
&\vdots\\
\cancel{d_3} &= \cancel{d_2} + \frac{r}{q^2},\\
\cancel{d_2} &= d_1 + \frac{r}{q}.
\end{aligned}$$

Somando todas as equações anteriores encontramos:

$$d_n = b + r\left[\frac{1}{q^{n-1}} + \frac{1}{q^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}\right]. \tag{6}$$

A expressão entre colchetes no lado direito da equação (7) é a soma de uma PG de razão $\frac{1}{q}$ e termo inicial 1. Sua soma é:

$$d_n = b + r\left[\frac{1 - q^{n-1}}{(1-q)q^{n-1}}\right]. \tag{7}$$

Finalmente, o resultado de (7) é substituído em (4):

$$a_n = q^{n-1}\left(b + r\left[\frac{1 - q^{n-1}}{(1-q)q^{n-1}}\right]\right),$$

$$a_n = q^{n-1}b + r\left[\frac{1 - q^{n-1}}{(1-q)}\right].$$

Esta última equação é a fórmula fechada de uma PAG.

3 Recorrência de Segunda Ordem-I. SL da IMO 1984 P6

Problema 1: *Seja c um inteiro positivo. A sequência (f_n) se define como: $f_1 = 1$, $f_2 = c$, e*

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2). \tag{8}$$

Mostre que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f_k f_{k+1} = f_r$.

A IMO 1984 foi realizada na cidade de Praga, antiga Checoslováquia, atualmente República Checa. O problema acima foi proposto pela delegação do Canadá [3].

3.1 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

A relação de recorrência (8) pode ser reescrita como

$$f_{n+1} - f_n = f_n - f_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2).$$

Vamos escrever agora a recorrência para diferentes valores de n para por em evidência uma soma telescópica:

$$\begin{aligned} \cancel{f_3 - f_2} &= f_2 - f_1 + 2, \\ \cancel{f_4 - f_3} &= \cancel{f_3 - f_2} + 2, \\ f_5 - f_4 &= \cancel{f_4 - f_3} + 2, \\ &\vdots \\ f_{n+1} - f_n &= \cancel{f_n - f_{n-1}} + 2. \end{aligned}$$

Somando todas as equações anteriores encontramos

$$f_{n+1} - f_n = f_2 - f_1 + 2(n-1). \tag{9}$$

Escrevendo de forma explícita a equação (9) para diferentes valores de n fica em evidência outra soma telescópica

$$\begin{aligned} \cancel{f_3} - f_2 &= (c-1) + 2 \cdot 1, \\ \cancel{f_4} - \cancel{f_3} &= (c-1) + 2 \cdot 2, \\ \cancel{f_5} - \cancel{f_4} &= (c-1) + 2 \cdot 3, \\ &\vdots \\ f_n - \cancel{f_{n-1}} &= (c-1) + 2 \cdot (n-2). \end{aligned}$$

Somando todas as equações anteriores encontramos

$$f_n - f_2 = (n-2)(c-1) + 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + (n-2)),$$

$$f_n = c + (n-2)(c-1) + (n-1)(n-2),$$

$$f_n = n^2 + (c-4)n + (4-c).$$

Chamando $b = c - 4$ temos uma fórmula explícita para a sequência (f_n):

$$f_n = n^2 + bn - b. \tag{10}$$

Trocando n por k e $k+1$ em (10) escrevemos:

$$f_k f_{k+1} = \left(k^2 + bk - b\right)\left((k+1)^2 + b(k+1) - b\right),$$

$$f_k f_{k+1} = k^4 + 2(b+1)k^3 + (b^2 + b + 1)k^2 - (b^2 + b)k - b. \tag{11}$$

Queremos encontrar um número natural r tal que $f_k f_{k+1} = f_r$. De (11) sabemos que $f_k f_{k+1}$ é um polinômio de grau 4 em k e de (10) temos que f_r é um polinômio de grau 2 em r. Logo devemos fazer r um polinômio de grau 2 em k. Isto é,

$$r = k^2 + pk + q, \tag{12}$$

onde p e q são inteiros a serem determinados. De (10) e (12) segue que

$$f_r = f_{k^2+pk+q} = \left(k^2 + pk + q\right)^2 + b\left(k^2 + pk + q\right) - b,$$

$$f_r = k^4 + 2pk^3 + \left(p^2 + 2q + b\right) k^2 + p(2q + b)k + \left(q^2 + bq - b\right). \tag{13}$$

Igualando os coeficientes respectivos de cada potência de k em (11) e (13) chegamos a um sistema de equações com variáveis p e q:

$$p = b + 1, \tag{14}$$

$$p^2 + 2q = b^2 + 1, \tag{15}$$
$$p(2q + b) = -(b^2 + b),$$

$$q^2 + bq = 0. \tag{16}$$

Substituindo $p = b + 1$ de (14) em (15) encontramos $q = -b$. O valor de $q = 0$, solução de (16), não satisfaz o sistema.

Logo, voltando em (12), o valor de r procurado é

$$r = k^2 + (b + 1)k - b. \tag{17}$$

ou, usando que $b = c - 4$,

$$r = k^2 + (c - 3)k - c + 4.$$

Temos que r é o resultado da soma e produto de inteiros, logo r será um número inteiro. Como c e k são inteiros e no mínimo 1 teremos que r é no mínimo 2:

$$r = k^2 + (c - 3)k - (c - 4),$$

$$r = [(k - 1) + 1]^2 + [(c - 1) - 2][(k - 1) + 1] - [(c - 1) - 3],$$
$$r = (k - 1)^2 + 2(k - 1) + 1 + (c - 1)(k - 1) + (c - 1) - 2(k - 1) - 2 - (c - 1) + 3,$$
$$r = (k - 1)^2 + (c - 1)(k - 1) + 2 \geq 2.$$

De (10) a equação (17) também pode ser escrita como

$$r = f_k + k$$

e a propriedade da sequência reescrita como

$$f_k f_{k+1} = f_{f_k + k}.$$

4 RECORRÊNCIA DE SEGUNDA ORDEM-II. SL DA IMO 1975 P4

Problema 2: *Seja $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ uma sequência de números reais tais que*

$$0 \leq a_n \leq 1 \tag{18}$$

e

$$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0 \tag{19}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \cdots$. Mostrar que

$$0 \leq (n + 1)\left(a_n - a_{n+1}\right) \leq 2 \tag{20}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \cdots$.

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Sófia, Bulgária. O problema acima foi proposto pela delegação da Suécia [3].

4.1 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Inicialmente notamos que a relação de recorrência (19) pode ser escrita de forma mais simétrica como

$$a_n - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_{n+2}. \tag{21}$$

A desigualdade anterior e a que queremos provar sugerem definir a variação Δa_n como

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}.$$

Usando a definição anterior reescrevemos (21) e (20) como

$$\Delta a_n \geq \Delta a_{n+1} \tag{22}$$

e

$$0 \leq (n+1)\Delta a_n \leq 2.$$

Notamos que o fato da desigualdade (22) ser válida para todo número natural implica que se j e l são números naturais, com $j < l$, então

$$\Delta a_j \geq \Delta a_l. \tag{23}$$

Temos duas desigualdades para provar em todo $n \in \mathbb{N}$: i) $0 \leq (n+1)\Delta a_n$ e ii) $(n+1)\Delta a_n \leq 2$.
i) $0 \leq (n+1)\Delta a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Como $n+1$ é um número positivo basta provar que $\Delta a_n \geq 0$ para todo n. Suponhamos, por absurdo, que exista algum número natural $n = n_0$ tal que

$$\Delta a_{n_0} < 0. \tag{24}$$

Segue de (23) que para todo número natural $k \geq n_0$ teremos

$$\Delta a_{n_0} \geq \Delta a_k. \tag{25}$$

Seja m um número natural. Vamos procurar uma relação entre a diferença $a_{n_0} - a_{n_0+m}$ e a variação Δa_{n_0}:

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} = (a_{n_0} - a_{n_0+1}) + (a_{n_0+1} - a_{n_0+2}) + \cdots + (a_{n_0+m-1} - a_{n_0+m}),$$

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} = \Delta a_{n_0} + \Delta a_{n_0+1} + \cdots + \Delta a_{n_0+m-1}.$$

Por (25) os m somandos no lado direito da equação anterior são menores ou iguais a Δa_{n_0}:

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} \leq \Delta a_{n_0} + \Delta a_{n_0} + \cdots + \Delta a_{n_0},$$

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} \leq m\Delta a_{n_0}.$$

Por (24) sempre podemos escolher um valor de $m = m_0$ suficientemente grande tal que $m_0 \Delta a_{n_0} < -1$. Segue que para todo $m \geq m_0$ teremos

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} < -1.$$

Esta última desigualdade é um absurdo pois por (18) devemos ter que

$$-1 \leq a_{n_0} - a_{n_0+m} \leq 1.$$

Concluímos que $\Delta a_n \geq 0$ e vale que $0 \leq (n+1)\Delta a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
ii) $(n+1)\Delta a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Inicialmente vamos estudar a soma

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

De (18) temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1 + 1 + \cdots + 1 = n. \tag{26}$$

A seguir vamos estudar outra soma usando as variações Δa_k:

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots + (n-1)(a_{n-1} - a_n) + n(a_n - a_{n+1}),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_{n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1}.$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k + na_{n+1}. \tag{27}$$

Juntando (26) e (27) obtemos a desigualdade

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k + na_{n+1} \leq n. \tag{28}$$

Notamos agora que

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \leq \sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k + na_{n+1}$$

pois na_{n+1} é um número não negativo. De (28) e a desigualdade anterior segue que

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \leq n. \tag{29}$$

Por outro lado, temos

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = \Delta a_1 + 2\Delta a_2 + \cdots + n\Delta a_n.$$

Neste ponto usamos a relação de recorrência (23) que determina que se $k \leq n$ então $\Delta a_k \geq \Delta a_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \geq \Delta a_n + 2\Delta a_n + \cdots + n\Delta a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \geq (1 + 2 + \cdots + n)\Delta a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \geq \frac{n(n+1)}{2}\Delta a_n. \tag{30}$$

Juntas as desigualdades (29) e (30) garantem o que queríamos demonstrar:

$$\frac{n(n+1)}{2}\Delta a_n \leq \sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \leq n,$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\Delta a_n \leq n.$$

Concluímos que vale $(n+1)\Delta a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5 RECORRÊNCIA NÃO LINEAR. SL DA IMO 1981 P9

Problema 3: *A sequência* (a_n) *está definida pela relação de recorrência* $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16}. \tag{31}$$

Encontre uma fórmula explícita para a_n.

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga Alemanha Ocidental [3].

5.1 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Primeiramente observamos que $a_n > 0$ implica $a_{n+1} > 0$. Como $a_1 > 0$, o princípio de indução finita garante que a_n seja um número real positivo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para eliminar a raiz quadrada, definimos a sequência (b_n) tal que

$$b_n = \sqrt{1 + 24a_n} > 0. \tag{32}$$

Segue que

$$a_n = \frac{b_n^2 - 1}{24}. \tag{33}$$

Substituindo (33) em (31) e simplificando encontramos

$$\frac{2}{3}b_{n+1}^2 = \frac{3}{2} + \frac{b_n^2}{6} + b_n,$$

$$b_{n+1}^2 = \frac{b_n^2}{4} + \frac{3}{2}b_n + \frac{9}{4} = \left(\frac{b_n + 3}{2}\right)^2.$$

Logo teremos

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}, \tag{34}$$

uma recorrência linear e não homogênea para (b_n). Quando $a_1 = 1$ usando (32) encontramos $b_1 = 5$.

Neste ponto seguimos os procedimentos para resolver recorrências lineares não homogêneas visto anteriormente. No caso hipotético em que o coeficiente que acompanha b_n em (34) tivesse sido 1 usaríamos diretamente uma soma telescópica. Como isto não acontece, primeiro procuramos uma solução da equação homogênea correspondente:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n.$$

Temos que (c_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, logo uma solução é $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Segundo, seja $b_n = c_n \cdot d_n$ ou

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot d_n. \tag{35}$$

Como $b_1 = 5$ teremos $d_1 = 5$.

Substituindo a equação (35) em (34) e simplificando encontramos

$$d_{n+1} = d_n + 3 \cdot 2^{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

Isto é, a sequência (d_n) é linear e não homogênea como a sequência (b_n), porém agora o coeficiente que acompanha d_n é 1.

Reescrevendo a equação anterior para valores do subíndice variando entre 1 e $n - 1$:

$$\cancel{d_2} = d_1 + 3 \cdot 1,$$

$$\cancel{d_3} = \cancel{d_2} + 3 \cdot 2,$$
$$\cancel{d_4} = \cancel{d_3} + 3 \cdot 2^2,$$
$$\vdots$$
$$d_n = \cancel{d_{n-1}} + 3 \cdot 2^{n-2}$$

e somando todas as equações anteriores (soma telescópica) encontramos

$$d_n = d_1 + 3\left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}\right) \quad \forall\, n \geq 2.$$

A soma entre parênteses na linha anterior é de uma progressão geométrica de razão 2, logo

$$d_n = 5 + 3\left(2^{n-1} - 1\right) \quad \forall n \geq 1.$$

Substituindo o resultado anterior em (35) e simplificando encontramos

$$b_n = 3 + 4 \cdot 2^{-n} \quad \forall n \geq 1. \tag{36}$$

Juntando as fórmulas em (36) e (33) obtemos:

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2^n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

6 COMENTÁRIOS FINAIS

Neste artigo foram discutidos três problemas sobre recorrências propostos para olimpíadas internacionais de Matemática. No primeiro desafio a recorrência foi de segunda ordem, linear e não homogênea e se mostrou a validade de determinada propriedade satisfeita por todos os termos da sequência associada. No segundo a lei de recorrência foi definida usando uma desigualdade de segunda ordem linear e homogênea e se mostrou a validade de outra desigualdade para os termos da sequência correspondente. No terceiro problema a recorrência foi de primeira ordem, porém não linear e se encontrou uma fórmula fechada para os termos da sequência relacionada. Os mesmos permitiram treinar o uso de várias técnicas como somas e produtos telescópicos, soma de uma progressão aritmética e geométrica e demonstração por contradição.

REFERÊNCIAS

[1] A. C. Morgado e P. C. P. Carvalho, *Matemática discreta*. Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 2015.

[2] M. V. Pereira, "Recorrências – problemas e aplicações," Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2014. [Online]. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/17255

[3] D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic, e D. Djuki', *The IMO Compendium*. Springer-Verlag GmbH, May 2011. [Online]. Disponível em: https://www.ebook.de/de/product/14636976/dusan_djukic_vladimir_jankovic_ivan_matic_nikola_petrovic_du_an_djuki_the_imo_compendium.html