LEI DOS EXPOENTES ENVOLVENDO DERIVADAS E INTEGRAIS FRACIONÁRIAS SEGUNDO RIEMANN-LIOUVILLE

Rafael Antônio Rossato
Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática
rafaelrossato@ufu.br

Vitor Vieira Ferreira
Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica
vitorferreira.vf43@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho estudamos as composições envolvendo derivadas e integrais fracionárias segundo Riemann-Liouville. Diferentemente do cálculo usual de ordem inteira, as chamadas Leis dos Expoentes para Derivadas nem sempre são válidas, quando as ordens das derivadas envolvidas podem ser qualquer número real. Para esse estudo, iniciamos apresentando as definições de Função Gama, das derivadas e integrais fracionárias segundo Riemann-Liouville, para depois introduzir as Leis dos Expoentes analisadas.

ABSTRACT

In this work we study the compositions involving derivatives and fractional integrals according to Riemann-Liouville. Unlike usual calculus, the so-called Laws of Exponents for Derivatives are not always true, when the orders of the derivatives involved can be any real number. For this study, we begin by presenting the definitions of the gamma function, derivatives and fractional integrals according to Riemann-Liouville, and then introduce the analyzed Laws of Exponents.

Palavras-chave: Função Gama, derivada segundo Riemann-Liouville, integral fracionária segundo Riemann-Liouville, lei dos expoentes..

1 INTRODUÇÃO

O cálculo de ordem não inteira é quase tão antigo quanto o cálculo de ordem inteira usual, porém por não ter interpretações físicas e geométricas evidentes, não foi difundido da mesma forma que o cálculo usual. A denominação clássica deste estudo é Cálculo Fracionário, no entanto a ordem da derivada estudada pode ser um número mais geral que racional. Neste trabalho consideraremos derivadas e integrais de ordem real, porém na literatura alguns trabalhos fazem tais definições onde a ordem é um número complexo (ver [1] e [3]).

O cálculo de ordem arbitrária, teve sua origem em 1695, a partir de uma pergunta formulada numa troca de correspondências entre Leibniz e l'Hôpital. Em uma dessas cartas, Leibniz formulou uma questão envolvendo a generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária. A resposta de l'Hôpital foi questionando Leibniz sobre o caso particular em que a ordem fosse igual a meio, ou seja, qual deveria ser a interpretação de derivar uma função $y(x)$ meia vez: "É possível estender o conceito de uma derivada de ordem inteira

$$D^n y = \frac{d^n}{dx^n} y$$

quando n for igual a $\frac{1}{2}$?"

Em sua resposta, Leibniz assegurou que para $y(x) = x$, a igualdade

$$d^{\frac{1}{2}} x = x\sqrt{dx : x}$$

aparentemente um paradoxo, "algum dia gerará muitas consequências frutíferas."

Este é considerado o primeiro registro do cálculo fracionário. Em verdade, tudo leva a crer que, Leibniz foi o primeiro a tentar estender o significado da derivada de uma função y de ordem não inteira q, possivelmente, substituindo n, um número inteiro positivo, por q um número racional.

Daí em diante brilhantes matemáticos contribuíram para a construção do Cálculo Fracionário. A chamada Lei dos Expoentes, apresentada por Lagrange em 1772, foi fundamental para a extensão do cálculo fracionário, mesmo não sendo válida para toda função y quando m e n são arbitrários. Esta lei consiste em

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y.$$

Neste trabalho estudamos sob quais condições a lei acima é válida, em que as ordens das derivadas m e n são números reais. Para tal, será necessário estudar as principais definições do Cálculo Fracionário. Consideraremos as definições de derivadas e integrais fracionárias no sentido de Riemann-Liouville, que decorrem da Fórmula de Cauchy para integração repetida. Assim o texto que segue, além de analisar a Lei dos Expoentes acima citada, também serve como uma introdução do leitor ao Cálculo Fracionário sem exigir muitos pré requisitos, possibilitando que esse riquíssimo assunto alcance desde estudantes de graduação, bem como pesquisadores que se interessam pelo tema.

Na literatura é possível encontrar outras definições de derivadas e integrais fracionárias, por exemplo segundo Caputo, ou Grünwald-Letnikov, entre outras. Cada um dos conceitos possui suas particularidades. Para estudar diversos desses conceitos do cálculo fracionário, citamos [3], [7] e [5].

No artigo [4], os autores fazem um estudo envolvendo a derivada de Caputo, mais especificamente exploram a modelagem matemática de problemas diferenciais, como oscilador harmônico e problema logístico. Para isso utilizam a taxa de variação fracionária segundo Caputo, e comparam os resultados aos modelos usando a taxa de variação usual, obtendo infomações relevantes que contribuem para entender o significado físico da derivação de ordem não inteira.

As referências utilizadas na elaboração desse trabalho, bem como sugestão de materiais para busca de mais informações do assunto, são [1], [3], [7], [5] e [9].

2 DEFINIÇÃO DAS DERIVADAS E INTEGRAIS FRACIONÁRIAS SEGUNDO RIEMANN-LIOUVILLE

No que segue, introduzimos as definições de integrais e derivadas de ordem fracionárias no sentido de Riemann-Liouville, bem como outros conceitos que são utilizados ao longo do texto. A ordem em que esses conceitos são definidos é a inversa da ordem tradicional abordada nos cursos de cálculo de ordem inteira. Aqui definimos primeiramente a integral e depois a derivada fracionária. Isso ocorre, pois a derivada segundo Riemann-Liouville, depende da integral.

Para introduzir essas primeiras definições do cálculo fracionário, precisamos de alguns conceitos preliminares. Desta forma, esta seção está subdividida em 4 subseções. Nas duas primeiras apresentamos os conceitos de Função Gama e Função Beta, que são preliminares para as subseções seguintes que contém as definições de Integral e Derivada de

Riemann-Liouville. Para mais informações sobre Função Gama e Função Beta, pode-se consultar [6] ou [2].

2.1 FUNÇÃO GAMA

A Função Gama, também conhecida como Função Gama de Euler de segunda espécie, $\Gamma(x)$, é indiscutivelmente a função básica do Cálculo Fracionário, considerada uma generalização do conceito de fatorial para números reais positivos.

Esta função pode ser definida pela integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \tag{1}$$

que é convergente quando $x > 0$. Notemos que para $x = 0$, a integral acima é divergente (De fato, é possível provar que se $x \to 0^+$, então $\Gamma(x) \to \infty$). A primeira propriedade da Função Gama, enunciada na proposição abaixo, diz que se x for um número natural, a Função Gama resulta no fatorial de $n-1$.

Proposição 2.1: *Se $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = (n-1)!. \tag{2}$$

Demonstração

A prova é feita por indução sobre n. Assim temos

$i)$ Para $n = 1$, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0!$.

$ii)$ Supondo válida a equação (2), para n, isto é, $\Gamma(n) = (n-1)!$, mostraremos que também vale para $n+1$, ou seja, $\Gamma(n+1) = n!$. De fato, temos por integração por partes, que

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = [-e^{-t} t^n]_{t=0}^{t=\infty} + n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

Logo, de $i)$ e $ii)$ segue, pelo Princípio de Indução, que $\Gamma(n) = (n-1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Generalizando esta propriedade para x real positivo, temos

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{3}$$

Para verificá-la, basta partir da definição e utilizar integração por partes, obtendo

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_{t=0}^{t=\infty} + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x),$$

uma vez que $[-e^{-t} t^x]_{t=0}^{t=\infty} = -\lim_{t\to\infty} e^{-t} t^x = 0$.

Segue de (3), que

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$

se $x > 0$. Notemos que a expressão do lado direito está bem definida não somente para $x > 0$, mas também para $-1 < x < 0$. Portanto, podemos definir o lado esquerdo, $\Gamma(x)$ a partir do valor obtido no lado direito. Assim temos uma extensão da definição da Função Gama definida também para valores $-1 < x < 0$. Repetindo o argumento, podemos estender a definição também para $-2 < x - 1$. Procedendo desta maneira, concluímos que a definição da Função Gama pode ser aplicada para todo x real não nulo, exceto os inteiros negativos.

2.1.1 FUNÇÃO BETA

A função Beta, denotada por $B(p,q)$, é definida pela seguinte integral:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \tag{4}$$

para $p, q > 0$. Observemos que pela mudança de variável $t = sen^2(\theta)$, $B(p,q)$ pode ser escrito em função da variável θ, da seguinte forma:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} sen^{2p-1}(\theta)cos^{2q-1}(\theta)d\theta. \tag{5}$$

Uma importante relação entre as funções Gama e Beta é dada pela proposição a seguir.

Proposição 2.2: *Para todo $p, q > 0$, temos*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{6}$$

Demonstração

Primeiramente, vamos considerar o produto

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du \int_0^\infty e^{-v}v^{q-1}dv.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = x^2$ e $v = y^2$, segue

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x^2}2x^{2p-1}dx \int_0^\infty e^{-y^2}2y^{2q-1}dy = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy.$$

Agora, passando para coordenadas polares no plano, isto é, $x = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$, teremos

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[e^{-(r^2cos^2(\theta)+r^2sen^2(\theta))}(rcos(\theta))^{2p-1}(rsen(\theta))^{2q-1}\right]rd\theta dr\\ &= 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-1}dr\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2p-1}(\theta)sen^{2q-1}(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

E usando (5), obtemos

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2B(p,q)\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-1}dr.$$

Agora, fazendo mais uma mudança de variável na integral acima, a saber $t = r^2$, segue

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\int_0^\infty e^{-t}r^{p+q-1}dt.$$

Por fim, pela definição da função Gama (ver (1)), temos $\Gamma(p+q) = \int_0^\infty e^{-t}t^{p+q-1}dt$, concluindo que $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q)$, e portanto está provada a proposição. ■

2.2 INTEGRAL DE RIEMANN-LIOUVILLE

A fim de definir a integral de ordem não inteira no sentido de Riemann-Liouville, vamos analisar uma integral de ordem inteira $n > 0$. Para isso, introduzimos o operador integral I, definido por

$$If(t) = \int_0^t f(t_1)dt_1.$$

Sendo assim, segue

$$I^2 f(t) = I[If(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2)dt_2dt_1.$$

Sucessivamente, a integral de ordem inteira n é

$$I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} ... \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_ndt_{n-1}dt_{n-2}...dt_3dt_2dt_1.$$

Utilizaremos o seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

Lema 2.1: *Se $G(x,t)$ é uma função contínua em um intervalo $[c,b]$ com $c < x < b$, então temos que*

$$\int_c^x \int_c^{x_1} G(x_1,t)dtdx_1 = \int_c^x \int_t^x G(x_1,t)dx_1dt.$$

Em particular, para $G(x_1,t) = f(t)$ segue que

$$\int_c^x \int_c^{x_1} f(t)dtdx_1 = \int_c^x \int_t^x f(t)dx_1dt.$$

O teorema abaixo, que prova uma fórmula geral para a integração de ordem n de uma função, servirá como motivação para a definição da integral fracionária de Riemann-Liouville.

Teorema 2.1: *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável. A integral de ordem $n \in \mathbb{N}$ é dada por*

$$I^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(n-1)}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau. \tag{7}$$

A expressão acima é conhecida como Fórmula de Cauchy para integração repetida.

Demonstração

A prova será feita por indução matemática.

$i)$ Para o caso em que $n = 1$, temos

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(1-1)}}{(1-1)!} f(\tau)d\tau.$$

$ii)$ Consideremos a tese válida para n, isto é, $I^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(n-1)}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau$. Assim, pelo Lema 2.1, segue

$$I^{n+1} f(t) = I[I^n f(t)] = \int_0^t \int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau du = \int_0^t \int_\tau^t \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)dud\tau.$$

Calculando a primeira integral, obtemos

$$I^{n+1} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} f(\tau)d\tau.$$

Portanto, de $i)$ e $ii)$, segue pelo Princípio de Indução que

$$I^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(n-1)}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada uma função f integrável em todo intervalo finito (a,t), definimos a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $p \in (0,+\infty)$ de f, e denotada por ${}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t)$, como sendo,

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)} f(\tau)d\tau. \tag{8} $$

Essa definição da Integral Fracionária segundo Riemann Liouville utiliza a extensão do fatorial dada pela Função Gama, e da Fórmula de Cauchy para integral repetida.

É possível demonstrar que se f for contínua em todo intervalo (a,t), então $\lim\limits_{p\to 0^+} {}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t) = f(t)$. A prova desse limite pode ser encontrada em [7] (ver página 65). Esse resultado nos motiva a definir ${}_a\mathbf{D}_t^{0}f(t) = f(t)$, quando f é contínua.

A fim de ilustrar o cálculo de uma integral de ordem fracionária de Riemann-Liouville, vejamos nesse exemplo como fica a integral de ordem $p>0$ de $f(t)=(t-a)^\nu$, com $\nu > -1$. Consideremos primeiro o caso em que $\nu = 0$, isto é, calcularemos a integral de ordem $p>0$ da função constante 1. Temos por (8) e (3)

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}d\tau = -\left.\frac{(t-\tau)^p}{\Gamma(p)p}\right|_{\tau=a}^{\tau=t} = \frac{(t-a)^p}{\Gamma(p+1)}. \tag{9} $$

Analisemos agora o caso mais geral, em que $\nu > -1$. Por definição, temos

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}(\tau-a)^\nu d\tau. $$

Fazendo a mudança de variável $\tau = a+\xi(t-a)$, temos $d\tau = (t-a)d\xi$, e assim

$$ (t-\tau)^{p-1}(\tau-a)^\nu = [t-a-\xi(t-a)]^{p-1}\xi^\nu(t-a)^\nu = (t-a)^{p-1}(1-\xi)^{p-1}\xi^\nu(t-a)^\nu = (t-a)^{\nu+p-1}\xi^\nu(1-\xi)^{p-1}. $$

Logo, pela definição de Função Beta e (6), temos

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}(t-a)^{\nu+p}\int_0^1 \xi^\nu(1-\xi)^{p-1}d\xi = \frac{(t-a)^{\nu+p}}{\Gamma(p)}B(\nu+1,p) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(p+\nu+1)}(t-a)^{\nu+p}. \tag{10} $$

2.3 DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

Para definir a Derivada de Riemann-Liouville de ordem fracionária, utilizaremos a definição da integral vista anteriormente. Seja p um número real positivo, e considerando n o menor inteiro maior que p, isto é, $n-1 \le p < n$ e $\nu = n-p$, temos então que $0<\nu\le 1$. Logo, a derivada de Riemann-Liouville de ordem p de $f(t)$, contínua e integrável em todo intervalo (a,t), será denotada por ${}_a\mathbf{D}_t^{p}$, e definida como

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{p}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-\nu}f(t)\right). \tag{11} $$

Podemos observar pela definição acima, que diferente da derivada clássica, o valor da derivada fracionária no ponto t depende da escolha de $a<t$, e por esse motivo esta derivada é dita não local (quando p não é um inteiro).

Notemos que devido a integrabilidade da função f, a integral que aparece na definição acima existe e pode ser diferenciada n vezes (mais detalhes pode ser visto na seção 2.3 de [7]).

Para exemplificar um cálculo de uma derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, calculamos a seguir a derivada de ordem $p>0$ (p não inteiro) de $f(t)=(t-a)^\nu$, com $\nu>-1$. Para isto, suponhamos que $n-1\le p<n$. Consideremos primeiro a derivada de ordem $p>0$ da função constante (caso $\nu=0$). Segue por definição e (9) que

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{p}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-(n-p)}f(t)\right) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{(t-a)^{n-p}}{\Gamma(n-p+1)}\right) = \frac{(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}. \tag{12} $$

Para demonstrar a última igualdade da expressão acima, basta calcular a n-ésima derivada e utilizar a propriedade (3) da Função Gama.

Agora vamos ao caso geral em que $\nu > -1$. Por definição, temos

$$
{}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-(n-p)}\left((t-a)^\nu\right)\right).
$$

Substituindo (10) na expressão acima, obtemos

$$
{}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1+\nu+n-p)}(t-a)^{\nu+n-p}\right) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1+\nu-p)}(t-a)^{\nu-p} \tag{13}
$$

Tal como na diferenciação de ordem inteira, a derivada fracionária também trata-se de um operador linear. Na proposição abaixo apresentamos esta propriedade.

Proposição 2.3: *Sejam f e g funções contínuas e integráveis em todo intervalo (a, t). Para qualquer $p > 0$, tal que $n-1 < p \leq n$, temos*

$$
{}_a\mathbf{D}_t^p\left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) = \lambda\, {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) + \mu\, {}_a\mathbf{D}_t^p g(t). \tag{14}
$$

Demonstração

Por definição, temos

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_t^p\left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}\left(\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)\right)d\tau \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)d\tau + \frac{\mu}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} g(\tau)d\tau \\
&= \lambda\, {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) + \mu\, {}_a\mathbf{D}_t^p g(t).
\end{aligned}
$$

■

3 COMPOSIÇÃO DE DERIVADAS E INTEGRAIS FRACIONÁRIAS SEGUNDO RIEMANN-LIOUVILLE

Nesta seção apresentamos algumas propriedades envolvendo composições de derivadas e integrais fracionárias. O principal objetivo é demonstrar as chamadas Leis dos Expoentes, para derivadas e integrais fracionárias no sentido de Riemann-Liouville. Para o caso de integrais, o resultado possuí uma demonstração mais simples. Ele é apresentado na primeira subseção que segue. Na segunda subseção, abordamos as composições mistas, isto é envolvendo derivadas e integrais fracionárias simultaneamente. Por fim, na última subseção, apresentamos a Lei dos Expoentes para a derivada fracionária.

3.1 LEI DOS EXPOENTES PARA INTEGRAIS FRACIONÁRIAS

A chamada Lei dos expoentes para integrais fracionárias, é demonstrada na proposição a seguir.

Proposição 3.1: *Seja $f(t)$ uma função contínua para $t \geq a$. Vale a propriedade*

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{-q}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{-p}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{-p-q} f(t), \tag{15}
$$

para todo $p > 0$ e $q > 0$.

Demonstração

Pela definição da Integral de Riemann-Liouville (8) e aplicando o Lema 2.1, segue que

$$\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_t^{-q}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}\,{}_a\mathbf{D}_\tau^{-p}f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}\int_a^\tau (\tau-\varepsilon)^{p-1}f(\varepsilon)d\varepsilon d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)\Gamma(p)}\int_a^t f(\varepsilon)\int_\varepsilon^t (t-\tau)^{q-1}(\tau-\varepsilon)^{p-1}d\tau d\varepsilon. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Para a primeira integral da equação anterior faremos uma substituição de variáveis, em que $\tau = tu+\varepsilon$ e $d\tau = tdu$, assim ficaremos com

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^t (t-\tau)^{q-1}(\tau-\varepsilon)^{p-1}d\tau &= \int_0^{\frac{t-\varepsilon}{t}} (t-tu-\varepsilon)^{q-1}(tu+\varepsilon-\varepsilon)^{p-1}tdu \\
&= \int_0^{\frac{t-\varepsilon}{t}} (t(1-u)-\varepsilon)^{q-1}t^{p-1}u^{p-1}tdu \\
&= t^p\int_0^{\frac{t-\varepsilon}{t}} (t(1-u)-\varepsilon)^{q-1}u^{p-1}du.
\end{aligned}$$

Fazendo outra substituição, $u = \frac{t-\varepsilon}{t}x$, e assim $du = \frac{t-\varepsilon}{t}dx$, segue que

$$\begin{aligned}
t^p\int_0^{\frac{t-\varepsilon}{t}} (t(1-u)-\varepsilon)^{q-1}u^{p-1}du &= t^p\int_0^1 \frac{(t-\varepsilon)^{p-1}}{t^{p-1}}x^{p-1}\left(t\left(1-\frac{t-\varepsilon}{t}x\right)-\varepsilon\right)^{q-1}\frac{(t-\varepsilon)}{t}dx \\
&= (t-\varepsilon)^p\int_0^1 x^{p-1}(t-\varepsilon)^{q-1}(1-x)^{q-1}dx \\
&= (t-\varepsilon)^{p+q-1}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.
\end{aligned}$$

Logo, voltando em (16), e pela definição da Função Beta e (6), ficamos com

$$\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_t^{-q}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t)\right) &= \frac{B(p,q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t (t-\varepsilon)^{p+q-1}f(\varepsilon)d\varepsilon \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_a^t (t-\varepsilon)^{p+q-1}f(\varepsilon)d\varepsilon \\
&= {}_a\mathbf{D}_t^{-p-q}f(t).
\end{aligned}$$

Obviamente podemos trocar p por q e obter a fórmula de integração na ordem contrária. ■

3.2 COMPOSIÇÃO DE DERIVADAS E INTEGRAIS FRACIONÁRIAS

Nesta seção analisamos as composições mistas, isto é, envolvendo derivadas e integrais fracionárias simultaneamente. As proposições que veremos aqui serão necessários para discutirmos a lei dos expoentes para derivadas. Antes de apresentar os resultados, notemos que vale a seguinte identidade

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{k-\alpha}f(t) = \frac{d^k}{dt^k}\,{}_a\mathbf{D}_t^{-\alpha}f(t), \qquad (17)$$

onde $\alpha > 0$ e k é um inteiro qualquer positivo tal que $k-\alpha > 0$. Para mostrar a igualdade acima, sejam $p = k-\alpha$ e n um número inteiro positivo tal que $n-1 \le p < n$. Assim por (11) e (15), segue

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_t^{k-\alpha} f(t) &= {}_a\mathbf{D}_t^{p} f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\, {}_a\mathbf{D}_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{d^k}{dt^k}\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\, {}_a\mathbf{D}_t^{-(n-k)-\alpha} f(t) \\
&= \frac{d^k}{dt^k}\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\, {}_a\mathbf{D}_t^{-(n-k)}\, {}_a\mathbf{D}_t^{-\alpha} f(t) = \frac{d^k}{dt^k}\, {}_a\mathbf{D}_t^{-\alpha} f(t).
\end{aligned}
$$

Outra observação importante, é que na definição (11), se $p = k$ é um número inteiro positivo e a função f admite derivada de ordem k, então a derivada fracionária de Riemann-Liouville coincide com a derivada convencional de ordem k. De fato,

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{k} f(t) = {}_a\mathbf{D}_t^{(k+1)-1} f(t) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-1} f(t)\right) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t). \tag{18}
$$

A proposição a seguir apresenta resultados a respeito da composição de derivada e integral de Riemann Liouville ambas de uma mesma ordem p.

Proposição 3.2: *Sejam $p > 0$, k um número inteiro tal que $k - 1 \leq p < k$, e f contínua e integrável em todo intervalo (a,t). Assim*

i) a derivada fracionária é um operador inverso a esquerda para a integral de Riemann-Liouville de mesma ordem, isto é

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{p}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t)\right) = f(t); \tag{19}
$$

ii) se a derivada fracionária ${}_a\mathbf{D}_t^{p} f(t)$ é contínua e integrável em todo intervalo (a,t), então

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{-p}\left({}_a\mathbf{D}_t^{p} f(t)\right) = f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}. \tag{20}
$$

Demonstração

Para provar essa propriedade do item $i)$, começamos considerando o caso inteiro $p = n \geq 1$. Assim, temos por (18) e a Fórmula de Cauchy para integral repetida (7) , que

$$ {}_a\mathbf{D}_t^n \left({}_a\mathbf{D}_t^{-n} f(t)\right) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{(n-1)} f(\tau)d\tau\right] = \frac{(n-1)!}{(n-1)!}\frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau = f(t). $$

Tomando agora $k-1 \leq p < k$, por definição, (15) e a equação anterior, segue

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t)\right) = \frac{d^k}{dt^k}\left[{}_a\mathbf{D}_t^{-(k-p)}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t)\right)\right] = \frac{d^k}{dt^k}\left[{}_a\mathbf{D}_t^{-k} f(t)\right] = f(t), \tag{21} $$

concluindo a prova de (19).
Para o item $ii)$, observemos que

$$ \begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_t^{-p}\left({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}\, {}_a\mathbf{D}_\tau^p f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t \frac{d}{dt}\frac{(t-\tau)^p}{p}\, {}_a\mathbf{D}_\tau^p f(\tau)d\tau \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\, {}_a\mathbf{D}_\tau^p f(\tau)d\tau\right]. \end{aligned} \tag{22} $$

Mas,

$$ \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\, {}_a\mathbf{D}_\tau^p f(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p \frac{d^k}{dt^k}\left[{}_a\mathbf{D}_\tau^{-(k-p)} f(\tau)\right]d\tau. $$

Integrando por partes, segue que

$$ \begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\, {}_a\mathbf{D}_\tau^p f(\tau)d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p+1)}(t-a)^p \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left[{}_a\mathbf{D}_\tau^{(k-p)} f(a)\right] \\ &+ \frac{p}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left({}_a\mathbf{D}_\tau^{-(k-p)} f(\tau)\right)d\tau. \end{aligned} $$

Repetindo esse processo de integração k vezes,

$$ \begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\, {}_a\mathbf{D}_\tau^p f(\tau)d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-k}\left[{}_a\mathbf{D}_\tau^{-(k-p)} f(\tau)\right]d\tau \\ &- \sum_{j=1}^{k}\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-(k-p)} f(a)\right)\frac{(t-a)^{p-j-1}}{\Gamma(2+p-j)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-k}\left[{}_a\mathbf{D}_\tau^{-(k-p)} f(\tau)\right]d\tau \\ &- \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\ &= {}_a\mathbf{D}_t^{-(p-k+1)}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-(k-p)} f(t)\right) \\ &- \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\ &= {}_a\mathbf{D}_t^{-1} f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)}. \end{aligned} \tag{23} $$

A existência dos termos na expressão (23) é garantida pela integrabilidade de ${}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(t)$ que implica que os termos ${}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(t)$ para $j = 1, 2, \ldots, k$, são todos limitados em $t = a$. Substituindo a expressão acima em (22), obtemos a equação (20).

A equação (19) obtida acima é um caso particular da propriedade mais geral dada pela proposição abaixo.

Proposição 3.3: *Seja f contínua em $t \geq a$. Vale a igualdade*

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t) \right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p-q} f(t). \tag{24}$$

Caso $0 \leq q < p$, devemos também supor que existe a derivada ${}_a\mathbf{D}_t^{p-q} f(t)$.

Demonstração

Dois casos devem ser considerados. Primeiro quando $0 \leq p \leq q$, e depois $0 \leq q < p$. Para o caso em que $0 \leq p \leq q$, basta aplicar as propriedades (15) e (19), obtendo

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t) \right) &= {}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-p}\, {}_a\mathbf{D}_t^{-(q-p)} f(t) \right) \\ &= {}_a\mathbf{D}_t^{-(q-p)} f(t) = {}_a\mathbf{D}_t^{p-q} f(t). \end{aligned}$$

Agora, considerando o caso em que $0 \leq q < p$, e denotando por $n \leq m$ inteiros, tais que, $0 \leq m-1 \leq p < m$ e $0 \leq n-1 \leq p-q < n$, temos por (15)

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t) \right) &= \frac{d^m}{dt^m} \left[{}_a\mathbf{D}_t^{-(m-p)} \left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t) \right) \right] \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left[{}_a\mathbf{D}_t^{p-q-m} f(t) \right] \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left[{}_a\mathbf{D}_t^{p-q-n} f(t) \right] = {}_a\mathbf{D}_t^{p-q} f(t). \end{aligned}$$

■

Para a ordem inversa, isto é, aplicar a integral de ordem p da derivada de ordem q, temos a propriedade abaixo. Observemos que ela é uma generalização da equação (20).

Proposição 3.4: *Se f é contínua em $t \geq a$, então*

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{-p} \left({}_a\mathbf{D}_t^{q} f(t) \right) = {}_a\mathbf{D}_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(a) \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}. \tag{25}$$

Demonstração

Nesta demonstração, utilizamos (15) caso $q \leq p$, ou (24) se $p \leq q$. Em ambos os casos, combinamos com (20), obtendo

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_t^{-p} \left({}_a\mathbf{D}_t^{q} f(t) \right) &= {}_a\mathbf{D}_t^{q-p} \left[{}_a\mathbf{D}_t^{-q} \left({}_a\mathbf{D}_t^{q} f(t) \right) \right] \\ &= {}_a\mathbf{D}_t^{q-p} \left[f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(a) \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \right] \\ &= {}_a\mathbf{D}_t^{-p} \left({}_a\mathbf{D}_t^{q} f(t) \right) = {}_a\mathbf{D}_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(a) \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}. \end{aligned}$$

■

3.3 LEI DOS EXPOENTES PARA DERIVADAS

No que segue, analisamos a chamada Lei dos Expoentes para Derivadas Fracionárias segundo Riemann-Liouville é verdadeira. Em verdade, no caso fracionário esta lei nem sempre é verdadeira. A fim de ilustrar este fato, vejamos um exemplo em que ${}_a\mathbf{D}_t^{\alpha}\left({}_a\mathbf{D}_t^{\beta}f(t)\right) \neq {}_a\mathbf{D}_t^{\beta}\left({}_a\mathbf{D}_t^{\alpha}f(t)\right)$. Para isso sejam $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{3}{2}$. Nos cálculos a seguir utilizamos $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (pode ser demonstrada por cálculos elementares a partir da definição da Função Gama), e também $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (consequência da propriedade (3)).
Segue de (13), que

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{\alpha}f(t) = {}_a\mathbf{D}_t^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\right)}t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},
$$

e

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{\beta}f(t) = {}_a\mathbf{D}_t^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1-\frac{3}{2}\right)}t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(0)}t^{-1} = 0.
$$

Portanto ${}_a\mathbf{D}_t^{\alpha}\left({}_a\mathbf{D}_t^{\beta}f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{\frac{1}{2}}\left({}_a\mathbf{D}_t^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}}\right) = 0$. Por outro lado, pela Proposição 2.3 e (12), temos

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_t^{\beta}\left({}_a\mathbf{D}_t^{\alpha}f(t)\right) &= {}_a\mathbf{D}_t^{\frac{3}{2}}\left({}_a\mathbf{D}_t^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,{}_a\mathbf{D}_t^{\frac{3}{2}}(1) &(26)\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{3}{2}\right)}t^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{4}. &(27)
\end{aligned}
$$

O exemplo acima mostra que a derivada de ordem fracionária não é, em geral, comutativa. A pergunta é sob quais hipóteses (se existem) a derivada seria comutativa? Para responder essa pergunta, vamos primeiramente considerar a n-ésima derivada de uma derivada de Riemann-Liouville de ordem $p > 0$ e sua operação inversa. Denotando $p = k - \alpha$, para $0 < \alpha \leq 1$, temos por definição

$$
\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a\mathbf{D}_t^{k-\alpha}f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau = {}_a\mathbf{D}_t^{n-k-\alpha}f(t),
$$

isto é

$$
\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a\mathbf{D}_t^{p}f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{n+p}f(t). \tag{28}
$$

Para fazer a operação na ordem inversa, primeiro devemos observar que

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{-n}f^{(n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f^{(n)}(\tau)d\tau = f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}, \tag{29}
$$

e além disso

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{p}g(t) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+n}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-n}g(t)\right). \tag{30}
$$

Utilizando (29), (30), (13) e (14), temos

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_t^{p}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) &= {}_a\mathbf{D}_t^{p+n}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-n}f^{(n)}(t)\right)\\
&= {}_a\mathbf{D}_t^{p+n}\left(f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}\right)\\
&= {}_a\mathbf{D}_t^{p+n}f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(j-p-n+1)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, o operador derivada de Riemann-Liouville ${}_a\mathbf{D}_t^p$ comuta com $\frac{d^n}{dt^n}$, isto é,

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^p\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+n} f(t), \tag{31}$$

apenas se $f^{(k)}(a) = 0$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Voltemos agora nosso estudo para analisar a composição de duas derivadas de ordem reais p e q. O resultado é enunciado a seguir.

Teorema 3.1: *Sejam f contínua para $t \geq a$, $m-1 \leq p < m$ e $n-1 \leq q < n$. Assim*

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p\left({}_a\mathbf{D}_t^q f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+q} - \sum_{j=1}^{m} {}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(a) \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}, \tag{32}$$

$$ {}_a\mathbf{D}_t^q\left({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+q} - \sum_{j=1}^{m} {}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(a) \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)}. \tag{33}$$

Demonstração

Para demonstrar a igualdade (32), utilizamos definição da derivada de Riemann-Liouville e as fórmulas (25) e (28), de onde segue que

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_t^p\left({}_a\mathbf{D}_t^q f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left[{}_a\mathbf{D}_t^{-(m-p)}\left({}_a\mathbf{D}_t^q f(t)\right)\right] \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{ {}_a\mathbf{D}_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{j=1}^{n} {}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(a) \frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma(1+m-p-j)}\right\} \\ &= {}_a\mathbf{D}_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{n} {}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(a) \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}. \end{aligned}$$

A equação (33), é consequência imediata de (32).

Observação 3.1: *Observando as expressões (32) e (33), podemos dizer que se $q = p$, então os operadores ${}_a\mathbf{D}_t^q$ e ${}_a\mathbf{D}_t^p$ comutam. Se $p \neq q$, então vale a comutativa*

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p\left({}_a\mathbf{D}_t^q f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^q\left({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+q} f(t), \tag{34}$$

apenas se os somatórios das equaçõs (32) e (33) se anulam. Uma forma disso acontecer é impor simultaneamente as condições

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, m, \tag{35}$$

e

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{36}$$

No Teorema 3.2, mostramos que se $f(t)$ possui uma quantidade suficiente de derivadas contínuas, então as condições (35) e (36) são equivalentes a

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \tag{37}$$

e

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{38}$$

Assim, podemos dizer que (34) é verdadeiro se

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, r-1, \tag{39}$$

onde $r = \max\{m, n\}$.

A fim de provar a equivalência anunciada na observação acima, demonstramos o lema abaixo, que consiste num resultado técnico que será necessário mais adiante. Em resumo, ela apresenta uma fórmula para a derivada fracionária de ordem $p > 0$, tendo como hipótese algumas condições de regularidade da função f.

Lema 3.1: *Seja f derivável $(n-1)$ vezes num intervalo $[a, T]$, com $f^{(n)}$ integrável no intervalo $[a, T]$. Se $0 \leq m-1 \leq p < m \leq n$, então para $a < t < T$ temos*

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p-m+1}}. \tag{40} $$

Demonstração

Em virtude das hipóteses de regularidade da função f, observemos que o lado direito da equação pode ser reescrita como

$$ \frac{d^m}{dt^m} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p-2m+1}} \right\}. \tag{41} $$

Utilizando uma integração por partes em que adotamos $u = (t-\tau)^{2m-p-1}$ e $dv = f^{(m)}(\tau)d\tau$, segue

$$ \begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau &= \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \left[(t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m-1)}(\tau) \right]_{\tau=a}^{\tau=t} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (2m-p-1)(t-\tau)^{2m-p-2} f^{(m-1)}(\tau)d\tau \\ &= \frac{-(t-a)^{2m-p-1} f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(2m-p)} \\ &+ \frac{2m-p-1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-2} f^{(m-1)}(\tau)d\tau. \end{aligned} $$

Repetindo esse processo de integração m vezes, obtemos

$$ \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau = -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau. $$

Substituindo em (41) e observando que os somatórios se anulam, concluímos que o lado direito da equação (40) é

$$ \frac{d^m}{dt^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau \right\} = \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a\mathbf{D}_t^{-(m-p)} f(t) \right\} = {}_a\mathbf{D}_t^p f(t), $$

o que conclui a prova.

Observação 3.2: *Um caso particular da equação (40) bastante utilizado em aplicações, é quando $0 < p < 1$. Neste caso, se $f(t)$ for contínua e $f'(t)$ for integrável num intervalo $[a, T]$, então a derivada de Riemann-Liouville existe e é dada por*

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau)d\tau. $$

Claramente, a derivada dada na expressão acima é integrável.

Segue como consequência de (40), o seguinte resultado.

Teorema 3.2: *Sob as mesmas hipóteses do Lema 3.1, a condição*

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p f(a) = 0 \tag{42}$$

é equivalente a

$$ f^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \tag{43}$$

Demonstração

Se a condição (43) for satisfeita, quando fizermos $t \to a$ em (40), imediatamente obteremos (42).

Por outro lado, suponhamos que a condição (42) seja verdadeira. Ao multiplicarmos ambos os lados da equação (40) por $(t-a)^p$, obtemos

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p f(t)(t-a)^p = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{(t-a)^p}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p-m+1}}. $$

Tomando $t \to a$, o lado esquerdo tende a zero, uma vez que $p > 0$, enquanto que no lado direito resta apenas a parcela do somatório em que $j = 0$, ou seja, $\frac{f(a)}{\Gamma(1-p)}$, implicando que $f(a) = 0$. Com esse fato, repetimos o raciocínio agora multiplicando ambos os lados de (40) por $(t-a)^{p+1}$. Fazendo $t \to a$, é possível obter $f'(a) = 0$. Subsequentemente, repetindo o processo (m vezes no total) concluímos que $f^{(j)}(t) = 0$, para $j = 0, 1, \ldots, m-1$. ■

Concluímos pelo teorema acima que se f satisfaz as hipóteses do Lema 3.1 e, para algum $p > 0$, a derivada de ordem p de f for igual a zero em $t = a$, a equivalência de (42) e (43), implica que todas as derivadas de ordem $0 < q < p$ são iguais a zero em $t = a$, isto é, ${}_a\mathbf{D}_t^q f(a) = 0$, para todo $q \in (0, p)$.

REFERÊNCIAS

[1] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira: *Cálculo Fracionário*. Livraria Da Física, 2015.

[2] K. Diethelm: *The analysis of fractional differential equations*, vol. 2004 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava e J. J. Trujillo: *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204 de *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[4] L. K. B. Kuroda, A. V. Gomes, R. Tavoni, P. F. d. A. Mancera, N. Varalta e R. d. F. Camargo: *Unexpected behavior of Caputo fractional derivative*. Computational & Applied Mathematics, 36(3):1173–1183, 2017.

[5] K. S. Miller e B. Ross: *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

[6] E. C. de Oliveira: *Funções especiais com aplicações*. Livraria Da Física, 2005.

[7] I. Podlubny: *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Elsevier Science, 1998.

[8] J. Stewart: *Cálculo*, vol. 2. Pioneira Thomson Learning, 2006.

[9] N. Varalta: *Das Transformadas Integrais ao Cálculo Fracionário Aplicado à Equação Logística*. Tese de Mestrado, UNESP - Botucatu, 2014.