TRIÂNGULO DE PASCAL: BREVE HISTÓRIA E UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO

Matheus Santos Lopes
Universidade Federal do Tocantins (UFT) e Centro de Ensino Médio Paulo Freire
matheussl@hotmail.com

Rogerio dos Santos Carneiro
Universidade Federal do Tocantins (UFT)
rogerioscarneiro@gmail.com

Raylson dos Santos Carneiro
Universidade Federal do Tocantins (UFT)
raylsonscarneiro@hotmail.com

RESUMO

O presente artigo objetivou a realização de um estudo multidimensional sobre o triângulo de Pascal, em nível da Educação Básica, e a formulação de uma proposta didática advinda das orientações metodológicas da Educação Matemática, fundamentadas nos dados obtidos através da pesquisa teórica, que foi desenvolvida no decorrer desta produção acadêmica. Parte dessa exploração dedicou-se à pesquisa bibliográfica onde constituímos, por meio de fontes da História da Matemática, uma apresentação da história do triângulo de Pascal. Além de realizarmos uma perscrutação epistemológica, empreendemos uma análise das propriedades e de algumas aplicações conceituais, com o intuito de trazermos uma correlação do triângulo de Pascal com outros conteúdos da Matemática. A propositura resultante desta pesquisa intenciona despertar o interesse nos alunos pelo que está sendo trabalhado. Os resultados foram expressos em termos de vislumbrar possibilidades de organização de métodos de ensino, baseados nas produções do campo da Educação Matemática a fim de produzir uma aprendizagem significativa.

ABSTRACT

This article aimed to conduct a multidimensional study of the Pascal triangle at the level of Basic Education, and the formulation of a didactic proposal from the methodological orientations of Mathematical Education, based on data obtained through theoretical research, which was developed in this academic production. Part of this exploration was devoted to bibliographic research where we constituted, through sources from the History of Mathematics, a presentation of the history of Pascal's triangle. In addition to conducting an epistemological scrutiny, we undertake an analysis of properties and some conceptual applications, in order to bring a correlation of the Pascal triangle with other Mathematical contents. The resulting proposition of this research intends to arouse interest in students for what is being worked on. The results were expressed in terms of glimpsing possibilities of organization of teaching methods, based on the productions of the field of Mathematical Education in order to produce meaningful learning.

Palavras-chave: Triângulo de Pascal. Proposta didática. Ensino de Matemática.

1 INTRODUÇÃO

Uma das ferramentas de estudo da Matemática, que está sendo usada no presente trabalho, é o triângulo de Pascal. Uma das dificuldades pode ser encontrada na prática do professor em sala de aula, que é trabalhar o conteúdo com uma didática diferente a das aulas ditas “tradicionais”. Portanto, a gênese deste artigo fundamenta-se na forma didática de explorar o conteúdo. Desse modo, procuramos, neste trabalho, a possibilidade de elaboração de uma proposta didática para o ensino de Matemática, com uma metodologia que possa contemplar diversos aspectos do conteúdo.

Objetivamos, neste trabalho, estudar e apresentar um pouco da abordagem histórica, as propriedades e a relação do triângulo de Pascal com outros conteúdos da Matemática, dando ênfase a uma proposta didática que possa ser desenvolvida com alunos da Educação Básica. Dessa forma, podemos contribuir para o professor no ponto de vista didático e, para o aluno, proporcionar uma aprendizagem mais significativa, ou seja, temos a pretensão de adequar a forma didática, com o intuito de melhorar o ensino do conteúdo e a sua forma de compreensão.

Tendo em vista que o triângulo de Pascal é formado por números binominais, ele possui muitas características especiais nas propriedades. Na antiguidade, os matemáticos usavam-no para calcular raízes e combinações, já na atualidade, é utilizado como uma nova maneira de resolver problemas de probabilidade.

Neste trabalho, também abordaremos algumas das aplicações do triângulo Pascal, com o objetivo de mostrar que esse conceito pode ser uma ferramenta de estudo para resolver questões relacionadas a outros conteúdos, dessa forma, analisamos que a Matemática está interligada a vários conteúdos.

2 TRIÂNGULO DE PASCAL: CONSTRUÇÃO HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA

O triângulo de Pascal é conhecido por triângulo aritmético, foi chamado por vários outros nomes, tais como: Triângulo de Yang Hui, Triângulo Combinatório e Triângulo de Tartaglia, visto que foi estudado por diversos matemáticos. Essas alterações constantes aconteceram já que o estudo foi sendo lapidado. Conforme Silva (2015), os primeiros registros de estudo são do indiano Pingala, que viveu por volta de 200 a.C., ou seja, o triângulo de Pascal já existia muito antes de Pascal, apesar disso, os matemáticos ao longo do tempo não deixaram de investigar as propriedades desse triângulo. Percebemos aqui que eles queriam saber mais sobre ele e quais seriam as aplicações na Matemática.

Como já citado, o triângulo aritmético teve os seus primeiros registros na Índia, pelo indiano Pingala, que tinha vários estudos na área da Matemática. Pingala utilizou o triângulo aritmético em um de seus estudos de análise combinatória, no estudo de métricas musicais na versificação. Segundo Rosadas (2016, p. 15), “o erudito Pingala (200 a.C.), em sua obra ‘Chandra Sutra’ que surge, pela primeira vez, o Triângulo Aritmético”, através das combinações de sílabas, que pode ser visto na Figura 1.

O triângulo aritmético, utilizado com a análise combinatória por Pingala, ficou conhecido como triângulo combinatório, onde ele estudava combinações métricas de uma, duas, três, ou mais sílabas, podiam ser dispostas sob a forma de um padrão numérico triangular, que corresponde ao triângulo aritmético e que ele denominou Meruprastara, em homenagem ao sagrado Monte Meru. Conforme Silvera (2001), a regra que Pingala criou para construção do triângulo aritmético é dada da seguinte maneira:

> Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenhe dois outros, de modo que se juntem no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim por diante. A seguir, escreva 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no do meio escreva a soma dos números acima dele. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas. Nessas linhas, a segunda dá as combinações com uma sílaba; a terceira dá as combinações com duas sílabas e assim por diante (SILVERA, 2001, on-line).

FIGURA 1: Primeiro Registro do Triângulo Aritmético (Fonte: AFFONSO (2014, p.14).

Como podemos observar, a forma da construção, com uso das sílabas em quadradinhos, tem, como resultado, um triângulo através da soma dos extremos com os elementos da linha, obtendo uma combinação na próxima linha.

A seguir, temos um quadro com os matemáticos indianos que dedicaram estudos e escreveram livros relacionados ao triângulo aritmético:

Matemático	Época	Livros associados ao triângulo
Desconhecido	300 AC	*Bhagabati Sutra*
Desconhecido	200 AC	*Sthananga Sutra*
Pingala	200 AC	*Chanda Sutra*
Mahavira	850 dC	*Ganita Sara Samgraha*
Halayudha	950 dC	*Mritasanjivani*

QUADRO 1: Matemáticos indianos associados ao triângulo. Fonte: Silveira (2001, on-line)

Continuando com a contextualização histórica, de acordo com Santiago (2016), o aparecimento do Triângulo de Pascal na China deu-se através do estudo das aproximações das raízes quadradas, cúbicas e as demais, tendo sido denominado sistema de tabulação para descobrir coeficientes binomiais. Esse estudo foi feito pelo chinês Yang Hui (1238-1298), que escreveu dois livros abordando o estudo do triângulo aritmético e suas aplicações, a saber: *Alfa e ômega de uma seleção de aplicações de métodos aritméticos* e *Uma análise detalhada dos métodos do livro "Nove Capítulos"*.

Dessa forma, o triângulo aritmético ficou conhecido também como triângulo de Yang Hui, por meio de cálculo dos coeficientes binominais, como podemos verificar na Figura 2.

Outros chineses também contribuíram no estudo do triângulo de Pascal, como o chinês Jiuzhang Suanshu, por exemplo, que escreveu o livro "Nove capítulos da Arte Matemática", um dos livros mais antigos dos chineses que utilizavam o triângulo aritmético para extração de raízes quadrada e cúbicas. Já Zhu Shijie escreveu o livro "Precioso espelho dos quatro elementos", em 1300 d.C. Conforme Silvera (2001), o livro escrito pelo chinês Zhu Shijie traz figuras de triângulos com até nove linhas e o seu autor denomina-os dia-

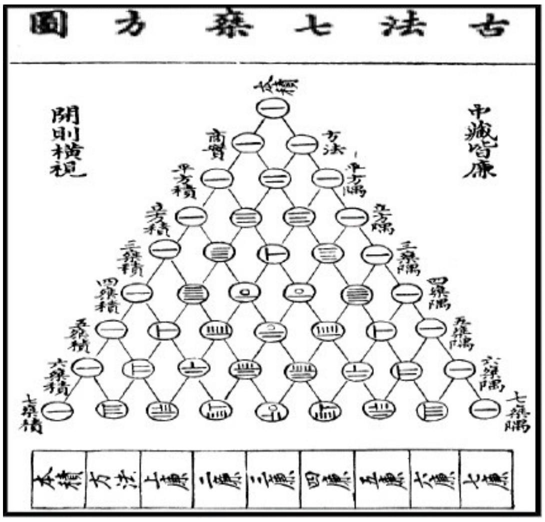


FIGURA 2: Configuração do Triângulo Aritmético, no século XIII. Fonte: AFFONSO (2014, p.16).

gramas do método antigo para calcular grandes e pequenas potências. No Quadro 2, há informações sobre todos os matemáticos chineses que escreveram livros envolvendo o triângulo aritmético.

Matemático	Época	Livros associados ao triângulo
Liu Hui	250 dC	Jiuzhangsuanshuzhu. (Comentários sobre os "Nove Capítulos da Arte Matemática").
Jia Xian	1 050 dC	Jia Xian suanjing. (Manual de Matemática de Jia Xian).
Yang Hui	1 250 dC	Xiangjiejiuzhangsuanfa. (Uma análise detalhada dos métodos do livro "Nove Capítulos"); Fasuanquyongbenmo. (Alfa e ômega de uma seleção de aplicações de métodos aritméticos).
Zhu Shijie	1 300 dC	Siyuanyujian. (Precioso espelho dos quatro elementos)

QUADRO 2: Matemáticos chineses associados ao triângulo. Fonte: Silveira (2001, on-line)

Na região da Europa, segundo Rosadas (2016, p.18), "na era mais próxima de Pascal, o matemático alemão Apianus (1495-1551) redigiu em 1527 o livro denominado "KauffmannsRechnung", que tratava de uma obra específica em aritmética comercial, nele o triângulo aritmético aparece no canto inferior esquerdo de uma das páginas". A Figura 3 mostra como o triângulo aritmético estava inserido nesse livro, que foi a primeira impressão, tratando dele na Europa.

Porém, o matemático que anunciou o triângulo aritmético na Europa foi Michel Stifel[1]. Ele estudou suas propriedades e criou a obra "Arithmetica Integra" em 1544, como na Figura 4.

Na Itália, temos o matemático Nicoló Fontana, mais conhecido como Tartaglia. De acordo com Guimarães (2006), Nicoló Fontana teve uma infância marcada por perdas e muito sofrimento, em 1512, quando os franceses saquearam a Brescia na Itália, a sua cidade natal, parte da população, inclusive mulheres e crianças, buscou refúgio na igreja, mas soldados invadiram o santuário e, diante de sua própria mãe, Nicoló foi gravemente ferido por golpes em todo o corpo, que lhe provocaram permanente dificuldades na fala,

[1]Michel Stifel (1486-1567) foi um matemático alemão que era considerado o maior algebrista do século XVI, além disso, foi um dos responsáveis a revelar os símbolos $+$ e $-$.

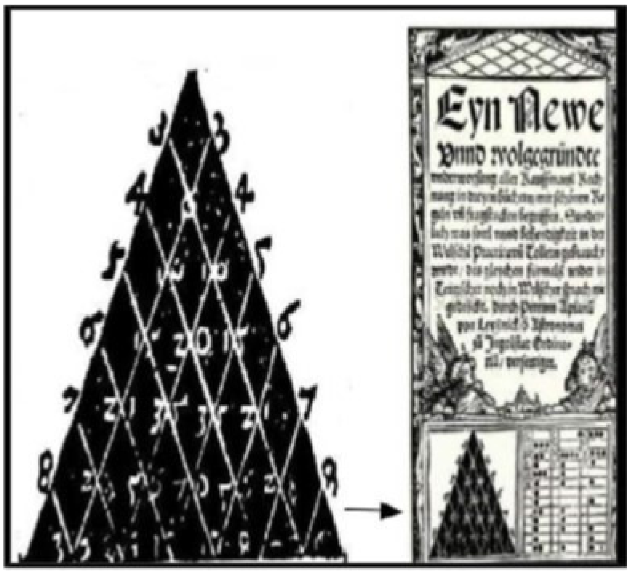
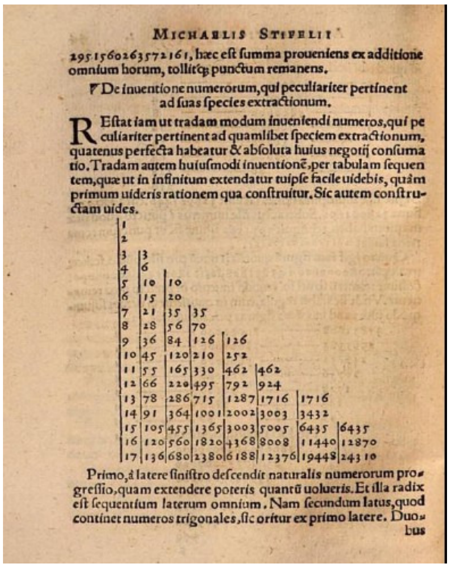


FIGURA 3: O Triângulo Aritmético em sua primeira tiragem na Europa, 1527. Fonte: AFFONSO (2014, p.18).



MICHAELIS STIFELII

295156026357216 1, hæc est summa prouenians ex additione omnium horum, tollitq; punctum remanens.

De inuentione numerorum, qui peculiariter pertinent ad suas species extractionum.

REstat iam ut tradam modum inueniendi numeros, qui peculiariter pertinent ad quamlibet speciem extractionum, quatenus perfecta habeatur & absoluta huius negotij consumatio. Tradam autem huiusmodi inuentionē, per tabulam sequentem, quæ ut in infinitum extendatur tuipse facile uidebis, quàm primum uideris rationem qua construitur. Sic autem constructam uides.

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Primo, à latere sinistro descendit naturalis numerorum progressio, quam extendere poteris quantū uolueris. Et illa radix est sequentium laterum omnium. Nam secundum latus, quod continet numeros trigonales, sic oritur ex primo latere. Duobus

FIGURA 4: "Arithmetica Integra", de Michel Stifel. Fonte: AFFONSO (2014, p.19).

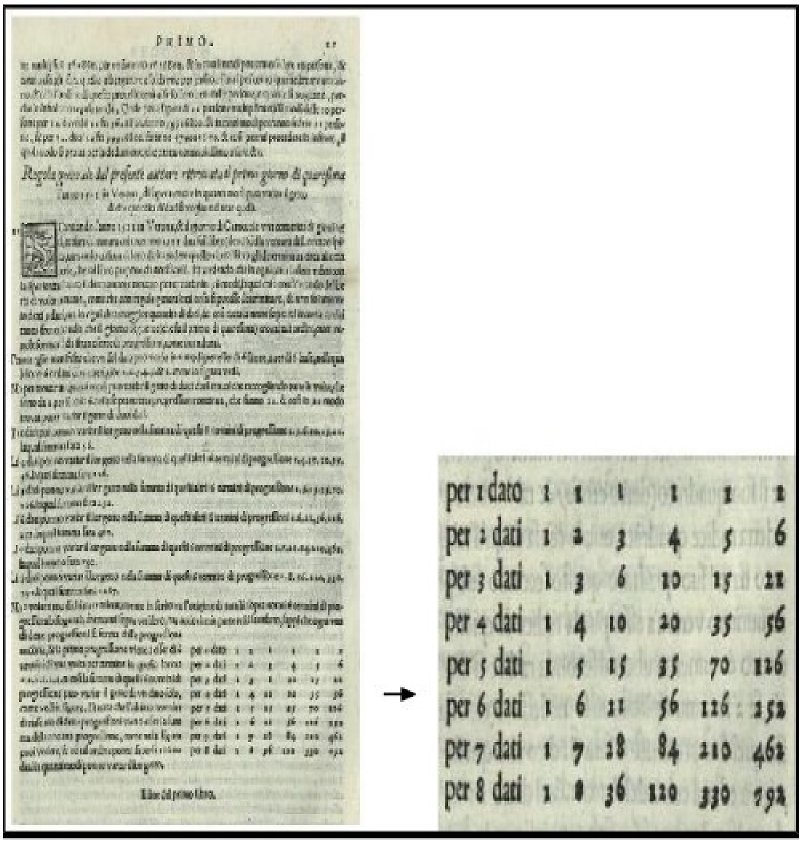
daí ele ganhou o seu apelido de Tartaglia, que significa "gago" em italiano.

> Um dos primeiros matemáticos ocidentais a confeccionar uma tabela contendo o número de combinações possíveis num lançamento de um dado foi o matemático italiano Nicola Fontana Tartaglia (1499-1559), sendo assim, Tartaglia reivindicou a criação do Triângulo Aritmético para ele, o que explica, o fato de que alguns países, até os dias de hoje, o Triângulo Aritmético é conhecido como Triângulo de Tartaglia (SILVA, 2013, p. 04).

Através dos seus estudos, Tartaglia escreveu um livro chamado de "General Trattatodinumeri et misure", em 1556, conforme a Figura 5, onde abordava diversos problemas e regras para cálculos combinatórios. Além disso, ele enfocava regras de aritmética, álgebra, geometria e física.

Como podemos ver, Tartaglia foi um dos primeiros a fazer a tabela contendo números e combinações, mas Blaise Pascal dedicou muito de seus estudos ao triângulo aritmético, que é chamado, nos dias de hoje, de triângulo de Pascal.

A Figura 5 mostra uma página antiga do livro de Tartaglia, que trata de vários problemas e regras para cálculos combinatórios. A parte destacada é o triângulo aritmético que passou



per 1 dato	1	1	1	1	1	1
per 2 dati	1	2	3	4	5	6
per 3 dati	1	3	6	10	15	21
per 4 dati	1	4	10	20	35	56
per 5 dati	1	5	15	35	70	126
per 6 dati	1	6	21	56	126	252
per 7 dati	1	7	28	84	210	462
per 8 dati	1	8	36	120	330	792

FIGURA 5: Página do livro "General Trattatodinumeri et misure" de Tartaglia. Fonte: AFFONSO (2014, p.20).

a ser chamado de triângulo de Tartaglia na Itália devido os estudos de Tartaglia sobre o triângulo.

No Quadro 3, temos os matemáticos europeus que contribuíram para os estudos do triângulo aritmético através dos livros que eles escreveram:

Matemático	Época	Livros associados ao triângulo
Apianus	1527	*Rechnung.* (Cálculo)
Stifel	1544	*Arithmetica Integra*
Tartaglia	1556	*General Tratatodinumeri et misure*
Peletier	1549	*Arithmétique*

QUADRO 3: Matemáticos europeus associados ao triângulo. Fonte: Silveira (2001, on-line).

Como podemos observar, o triângulo de Pascal recebeu vários nomes em diversos continentes e devido aos grandes matemáticos que estudaram as suas propriedades e aplicações. Os primeiros estudos foram realizados na Índia pelo matemático Pingala, quando o triângulo aritmético ficou conhecido como triângulo combinatório. Já na China, foi estudado pelo matemático Yang Hui, onde foi chamado de triângulo de Yang Hui e, por fim, na França, foi chamado de triângulo de Pascal, devido ao matemático, físico, inventor, filósofo e teólogo Blaise Pascal, que nasceu na França. Como aprofundou o seu estudo no triângulo aritmético, até hoje, o triângulo aritmético é conhecido como triângulo de Pascal, em homenagem a este matemático.

> O triângulo aritmético ficou conhecido como "Triângulo de Pascal" devido à monografia de cerca de sessenta páginas sobre este triângulo escrita por Blaise Pascal: "Trait du triangle arithmétique", a qual foi publicada só postumamente, em 1665. Nesta monografia, Pascal introduziu o triângulo de um modo bem complicado e usando uma notação estritamente geométrica (SILVA, 2010, p. 10).

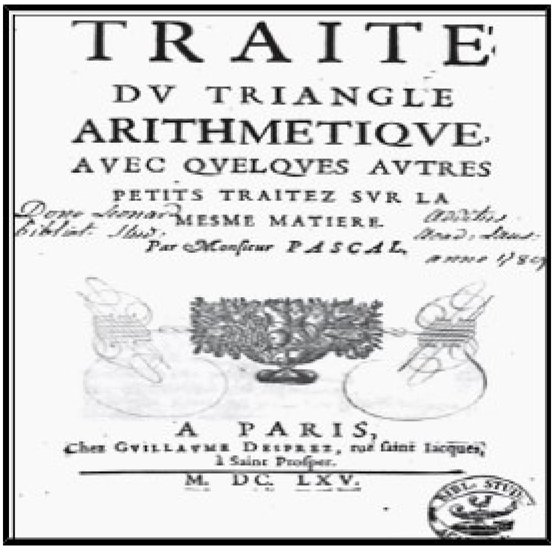


FIGURA 6: Trait du Triangle Arithmétique, obra de Pascal. Fonte: AFFONSO (2014, p. 21).

Segundo Rosadas (2016), Pascal ficou conhecido não apenas pelas análises do Triângulo Aritmético, mas por distintas contribuições na própria Matemática, como estudos sobre as cônicas, a cicloide e por ser desbravador nos estudos de probabilidade.

Desse modo, o matemático Blaise Pascal analisou as propriedades do triângulo aritmético fazendo a sua construção da seguinte maneira:

> Chamo Triângulo Aritmético uma figura que se constrói da seguinte maneira. De um ponto G, qualquer, desenho duas retas GV e Gζ, uma perpendicular a outra, e, sobre cada uma dessas, tomo tantas partes próximas iguais que se quiser, começando em G, nomeando-as 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente; esses números são os expoentes das divisões da reta. (PULSKAMP, 2009, p. 01, tradução nossa).

Observemos, na Figura 7, o triângulo aritmético que Pascal desenvolveu. Ao analisarmos, percebemos que o triângulo é formado por retas perpendiculares e linhas diagonais, onde cada quadrado tem a sua ordem numérica de acordo com o resultado das combinações.

Como podemos ver, a construção é feita de maneira simples: são duas retas perpendiculares, em que temos as células que correspondem aos quadradinhos onde serão dispostos os números. Assim, cumprindo a regra geral em todos os quadradinhos da primeira linha e coluna, vamos colocar o número 1, que é o gerador de todo o triângulo aritmético e o extremo do triângulo aritmético. Segundo Pulskamp (2009, p. 03), “o número de cada célula e igual ao número da célula que a precede na sua posição perpendicular, mais o número da célula que a precede na sua posição paralela. Portanto, a célula F é obtido pelo somatório da célula C e a célula E, e assim sucessivamente”.

Em outras palavras, o número de cada célula é dado pela soma de dois números consecutivos da mesma diagonal que resultará em um número da mesma linha do primeiro número que foi somado, como podemos ver na Figura 7. A partir disso, Pascal determinou as propriedades para o triângulo aritmético e, logo depois, resolveu aplicar em outros conteúdos da Matemática, como a ordem numérica e as combinações. Seus estudos e aplicações foram reconhecidos como “Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM”, verificar na Figura 8.

Conforme Rosadas (2016), o surgimento da expressão “Triângulo de Pascal” ocorreu em 1730, ano em que Abrahan de Moivre (1667-1754), em sua marcante e influente obra “Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis” (1730), usou a titulação “Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM” para dar referência ao Triângulo Aritmético. A partir dessa data, o Triângulo Aritmético ficou famoso com a denominação “Triângulo de Pascal”.

Hoje em dia, o triângulo de Pascal, que já foi chamado por vários nomes, está presente nos livros didáticos. Tal fato mostra que a sua contribuição foi altamente relevante

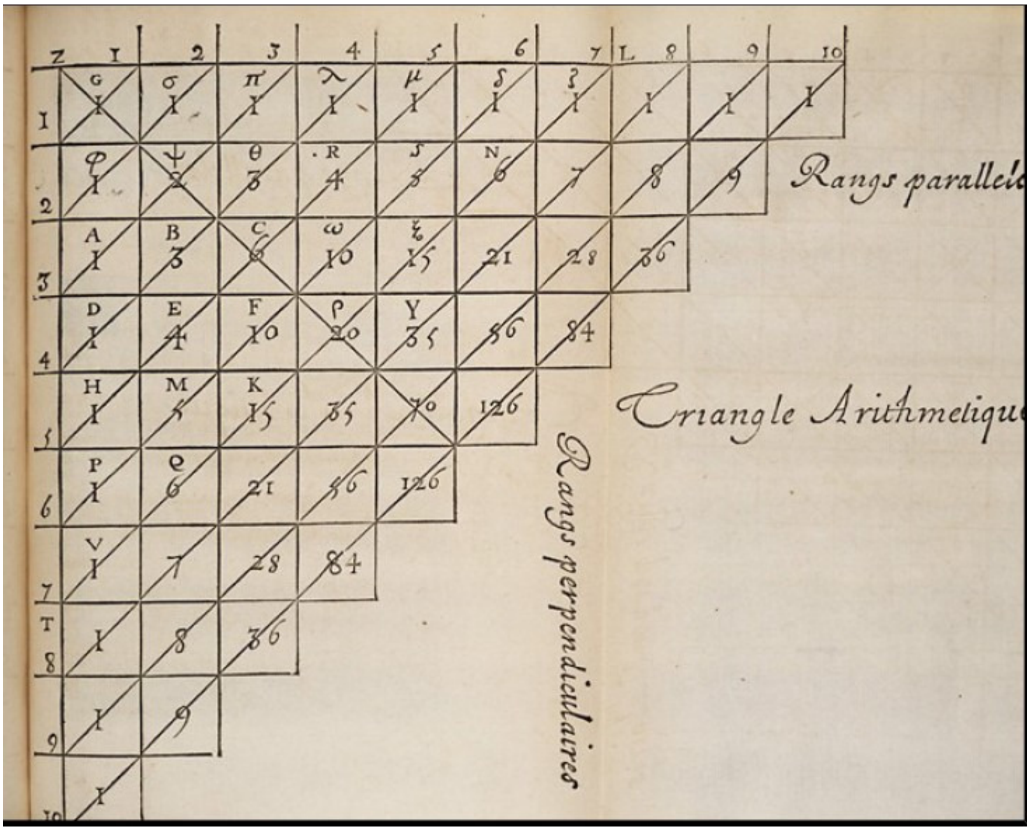
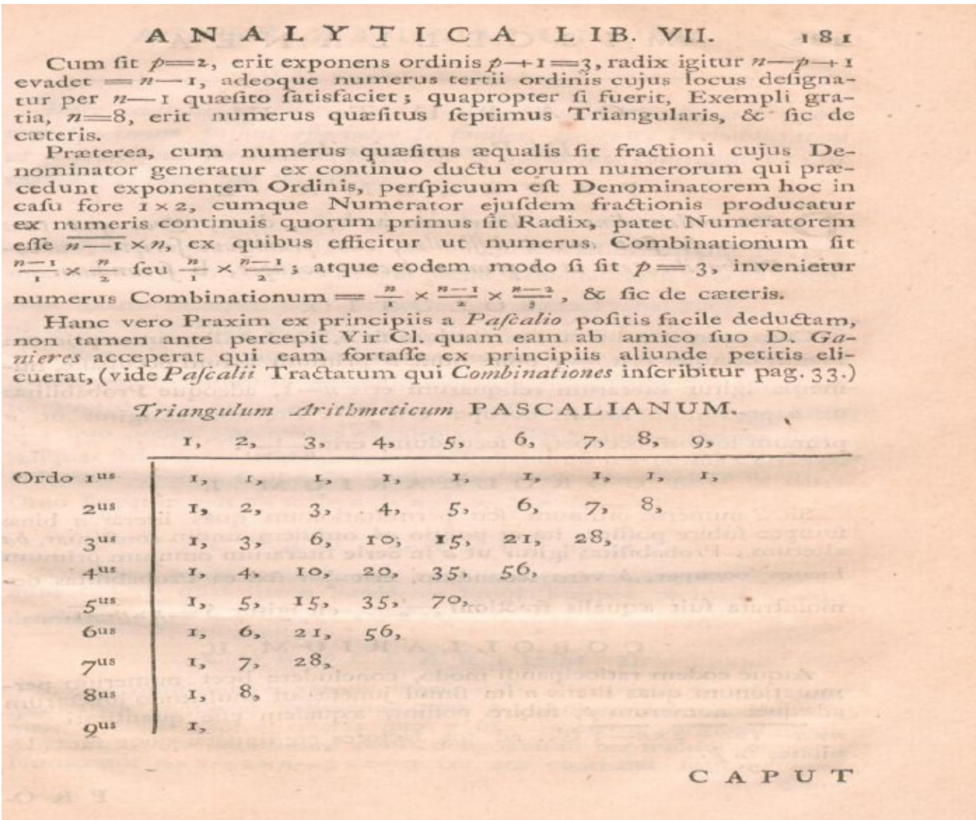


FIGURA 7: Construção do Triângulo, segundo Pascal. Fonte: AFFONSO (2014, p.22).



ANALYTICA LIB. VII. 181

Cum ſit $p=2$, erit exponens ordinis $p+1=3$, radix igitur $n-p+1$ evadet $=n-1$, adeoque numerus tertii ordinis cujus locus deſignatur per $n-1$ quæſito ſatisfaciet; quapropter ſi fuerit, Exempli gratia, $n=8$, erit numerus quæſitus ſeptimus Triangularis, & ſic de cæteris.

Præterea, cum numerus quæſitus æqualis ſit fractioni cujus Denominator generatur ex continuo ductu eorum numerorum qui præcedunt exponentem Ordinis, perſpicuum eſt Denominatorem hoc in caſu fore 1×2, cumque Numerator ejuſdem fractionis producatur ex numeris continuis quorum primus ſit Radix, patet Numeratorem eſſe $\overline{n-1}\times n$, ex quibus efficitur ut numerus Combinationum ſit $\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}$ ſeu $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$; atque eodem modo ſi ſit $p=3$, invenietur numerus Combinationum $=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$, & ſic de cæteris.

Hanc vero Praxim ex principiis a *Paſcalio* poſitis facile deductam, non tamen ante percepit Vir Cl. quam eam ab amico ſuo D. *Ganieres* acceperat qui eam fortaſſe ex principiis aliunde petitis elicuerat, (vide *Paſcalii* Tractatum qui *Combinationes* inſcribitur pag. 33.)

Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Ordo 1us	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
2us	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	
3us	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,		
4us	1,	4,	10,	20,	35,	56,			
5us	1,	5,	15,	35,	70,				
6us	1,	6,	21,	56,					
7us	1,	7,	28,						
8us	1,	8,							
9us	1,								

CAPUT

FIGURA 8: O Triângulo de Pascal. Fonte: AFFONSO (2014, p. 23).

para a Matemática em vários conteúdos como probabilidade, aplicações em aritmética, álgebra, geometria e outros. Entretanto, no ensino básico uma das principais utilidades do triângulo de Pascal, obviamente, é ser um dispositivo mecânico de fácil geração dos coeficientes de expansões do binômio de Newton do tipo $(a+b)^n$, com n inteiro e positivo.

3 ESTUDOS DAS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE PASCAL

Vimos anteriormente, a abordagem histórica do triângulo de Pascal, agora passamos às suas propriedades, que possuem muitas características especiais que devem ser apresentadas.

O triângulo de Pascal é formado por coeficientes binomiais ou números binomiais. Tais coeficientes são apresentados por dois números naturais n e p, tais que $n \geq p$, e são representados por $\binom{n}{p}$ em termos de notações, temos n, o numerador, que representa a linha, e p, o denominador, que representa a coluna, em que o coeficiente binomial encontra-se. Desse modo, temos:

$$\binom{\text{linha}}{\text{coluna}} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{1}$$

O fatorial é representado por:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1, \quad \text{sendo } n \in \mathbb{N}.$$

Para a construção do triângulo, os números ficam dispostos da seguinte forma:

$$\begin{array}{lccccccc}
 & \text{Coluna 0} & \text{Coluna 1} & \text{Coluna 2} & \text{Coluna 3} & \text{Coluna 4} & \cdots & \text{Coluna n} \\
\text{Linha 0} & \binom{0}{0} & & & & & & \\
\text{Linha 1} & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\text{Linha 2} & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\text{Linha 3} & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\text{Linha 4} & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\text{Linha n} & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Para calcular os elementos das linhas zero, um e dois, basta realizar os cálculos conforme a equação (1) assim, de $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, temos:

- $\binom{0}{0} = \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = 1$
- $\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} = \dfrac{1!}{0!(1-0)!} \quad \dfrac{1!}{1!(1-1)!} = 1 \quad 1$
- $\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} = \dfrac{2!}{0!(2-0)!} \quad \dfrac{2!}{1!(2-1)!} \quad \dfrac{2!}{2!(2-2)!} = 1 \quad 2 \quad 1$

O triângulo de Pascal possui alguns casos especiais que valem para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo eles:

(I) $\binom{n}{0} = 1$

(II) $\binom{n}{1} = 1$

(III) $\binom{n}{n-1} = n$

(IV) $\binom{n}{n} = 1$

Depois de calcularmos o valor de cada coeficiente, teremos uma nova forma de representar o triângulo de Pascal:

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	1					
Linha 1	1	1				
Linha 2	1	2	1			
Linha 3	1	3	3	1		
Linha 4	1	4	6	4	1	
Linha 5	1	5	10	10	5	1

Depois da construção do triângulo de Pascal, temos as seguintes propriedades:

(1) Teorema dos elementos simétricos

Esse teorema afirma que, numa linha do triângulo, há uma simetria em relação à altura, caso o triângulo estiver disposto de modo que todas as linhas sejam simétricas em relação a uma mesma reta vertical, isto é,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad (2)$$

Exemplo: Na linha 5, temos, n = 5 se considerarmos a coluna 1, p = 1, e, na mesma linha, a coluna 4, substituindo tais valores na fórmula (2), temos o seguinte:

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{5-1} = \binom{5}{4}$$

A Figura 9 mostra os elementos simétricos, como podemos ver os elementos destacados correspondem à simetria dos que estão ligados.

(2) Relação de Stifel

A Relação de Stifel afirma que a soma de um elemento com outro elemento consecutivo da mesma linha do triângulo resulta no elemento abaixo do segundo elemento que foi somado com o primeiro elemento. Essa relação, que se encontra na análise combinatória, é dada por:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \qquad (3)$$

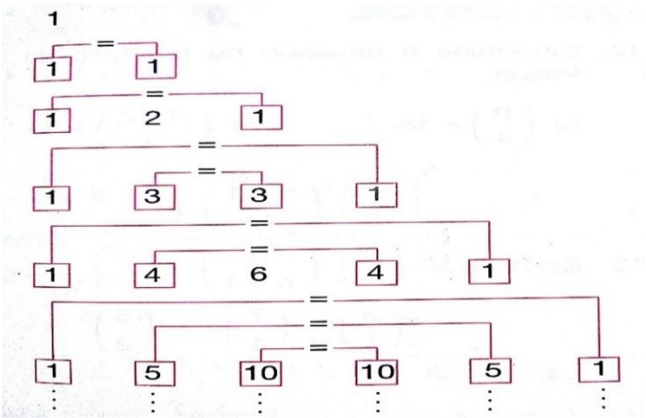


FIGURA 9: Teorema dos elementos simétricos. Fonte: SANTOS, GENTIL e GREGO (2002, p. 367).

Exemplo: O número 10 está na linha n = 5, coluna p = 2. Assim, substituindo na relação de Stifel, equação (3), os valores de n e p, obtemos:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$
$$\binom{5-1}{2-1} + \binom{5-1}{2} = \binom{5}{2}$$
$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$$
$$\frac{4!}{1!(4-1)!} + \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!}$$
$$4 + 6 = 10$$

A Figura 10 mostra a relação de Stifel que, como podemos observar nos números que estão destacados, permite afirmar que a soma de números consecutivos em uma mesma linha resulta no número abaixo do segundo número que foi somado.

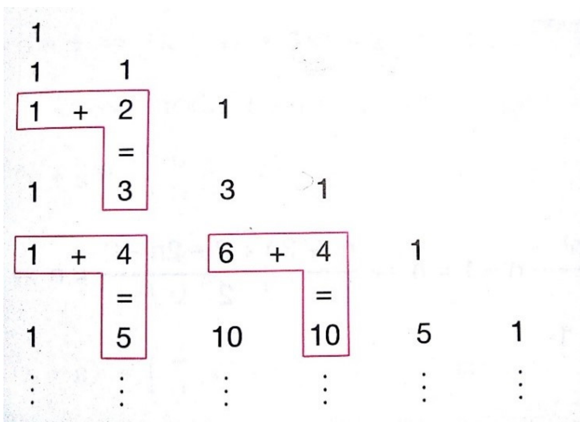


FIGURA 10: Relação de Stifel. Fonte: SANTOS, GENTIL e GREGO (2002, p. 367).

(3) Teorema das colunas

Esse teorema afirma que a soma de todos elementos de uma coluna até uma determinada linha resulta no número da próxima linha e próxima coluna. Exemplo: Se somarmos os seis primeiros números da 2ª coluna resulta no quinto elemento da 3ª coluna:

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$$

onde 56 é o valor da linha n = 8 e coluna p = 3.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

A Figura 11 mostra como o teorema é calculado, observando os números que estão destacados, a soma dos elementos da coluna até uma determinada linha que resulta no elemento da próxima linha e coluna.

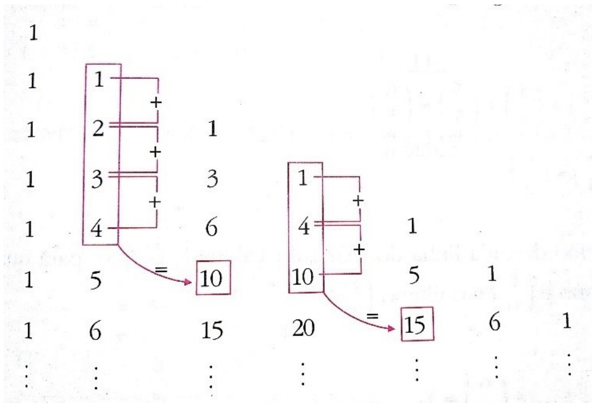


FIGURA 11: Teorema das colunas. Fonte: SANTOS, GENTIL e GREGO (2002, p. 105).

(4) Teorema das linhas

Esse teorema afirma que a soma dos elementos de cada linha n sempre resulta em uma potência de 2, que é 2^n, com n igual ao número da linha correspondente. De modo geral, tem-se a seguinte equação:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \tag{4}$$

Exemplos:

- Linha 0: $1 = 2^0$
- Linha 3: $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$
- Linha 6: $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6$
- Linha 7: $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 2^7$

Como podemos ver na Figura 12, a soma dos termos das linhas resulta em potências de 2.

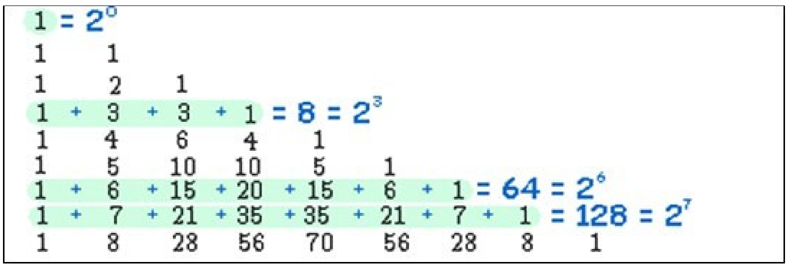


FIGURA 12: Teorema das linhas. Fonte: Matemática Didática[2]

(5) Teorema das diagonais

Na soma de todos elementos da diagonal até a uma determinada linha, obteremos o elemento da próxima linha da última coluna a ser somada.

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p} \tag{5}$$

[2]Disponível em http://www.matematicadidatica.com.br/TrianguloDePascal.aspx. Acessado em 22 de out. de 2018.

Exemplo: Se somarmos os quatro primeiros elementos da segunda diagonal, teremos o seguinte:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ que é o quinto termo da sexta linha.

Podemos observar, na Figura 13, como funciona o Teorema das Diagonais. Os elementos que estão destacados em cada diagonal resultam em um número que está abaixo do último elemento que foi somado.

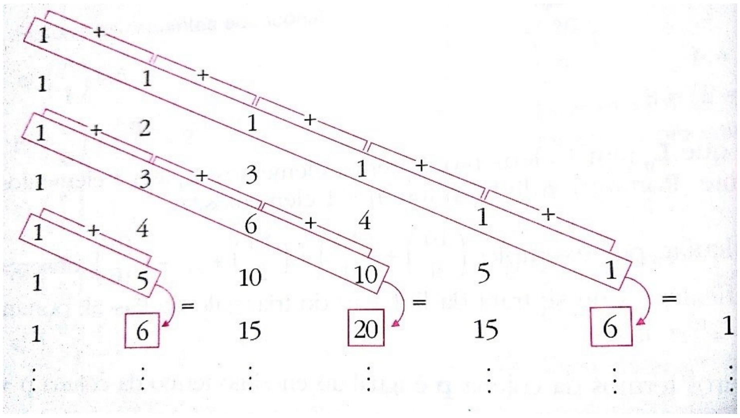


FIGURA 13: Teorema das diagonais. Fonte: SANTOS, GENTIL e GREGO (2002, p. 366)

Sendo assim, analisando as propriedades que foram estudadas através de dois modos: cálculo teórico e usando apenas o triângulo de Pascal em sua forma natural, percebemos que ambas os modos resultam nos mesmos valores. É importante citar que a relação de Stifel permite que o triângulo de Pascal seja construído utilizando apenas ordem.

4 O ENSINO DE MATEMÁTICA SUBSIDIADO POR TENDÊNCIA METODOLÓGICA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Os estudos e pesquisas do campo da Educação Matemática têm buscado desenvolver subsídios teóricos e metodológicos que propiciem a suplantação das dificuldades encontradas no processo educativo de Matemática. Neste sentido, surgem as Tendências em Educação Matemática, dentre elas, destacamos a História da Matemática no ensino, que é considerada como um recurso pedagógico que tem, como finalidade principal, "[...] promover um ensino-aprendizagem da Matemática que busque dar uma ressignificação ao conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos" (MENDES, 2009, p.76).

A matemática teve início diante da necessidade do homem de contar. Saber o tamanho da parte que cada família teria nas caçadas, se seus rebanhos diminuíam ou aumentavam, quantos inimigos e aliados, entre outras situações. Nos dias atuais, a matemática tem grande influência em todas as outras ciências descobertas pelo homem. A física e a química, por exemplo, utilizam-na para provar suas teorias e leis. É fundamental o seu aprendizado para que o indivíduo possa ser capaz de viver na sociedade. Assim, surgiu a carência de ensina-la de diversas formas.

Pensando numa maneira de melhorar o ensino da matemática, Gomes e Rodrigues (2014) afirmam que a História da Matemática é uma ferramenta que o professor pode utilizar como sendo uma forma para entender melhor os conteúdos matemáticos, possibilitando uma compreensão melhor de seus conceitos, ela deve ser usada para o desenvolvimento da aula, atraindo a curiosidade dos alunos.

> A História da Matemática se constitui como um meio em potencial para o desenvolvimento da aula e para a aprendizagem, pois "[...] conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de

> grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural" (GOMES, RODRIGUES, 2014, p. 62).

Para que a aprendizagem da matemática seja mais eficaz, às vezes, o professor tem que dispor de inúmeras possibilidades dentro das formas de ensino. Ministrar uma aula com mais de uma tendência é bastante interessante, pois o professor pode criar situações onde estas podem unir-se e fortalecer ainda mais compreensão dos alunos. Ainda segundo Gomes e Rodrigues (2014, p. 63), "o enfoque na História da Matemática, quando unido a tendências como a Resolução de Problemas, por exemplo, é muito eficaz, pois, em sala de aula, o educador pode propor situações problemas enfrentadas em determinado momento histórico".

Há algumas possibilidades para trabalhar com as concepções teórico-metodológicas das tendências em Educação Matemática, em especial da História da Matemática no ensino. Neste particular, os pesquisadores Mendes, Fossa e Valdés (2006, p. 95) afirmam que "o uso da história da matemática em sala de aula deve ser revestido de um significado contextual, formativo e concientizador[...]". O professor e pesquisador Mendes (2009) defende que

> [...] algumas formas de usar pedagogicamente a história nas aulas de Matemática são viáveis para elaborar e executar algumas introduções históricas aos conceitos que se apresentam como novidade para os alunos, visando estimula-los para o entendimento de problemas históricos nos quais esses conceitos a serem aprendidos poderão constituir-se em respostas para tal (p. 79).

Desse modo, a História da Matemática utilizada como recurso pedagógico pode esclarecer algumas ideias matemáticas e dar respostas a alguns questionamentos referentes à matemática, que, muitas vezes, são feitos pelos alunos durante as aulas, os quais demonstram a inquietude deles diante de uma ciência que aparenta não ter ligação com o "útil". Tal inquietude é reverberada em perguntas que, frequentemente, surgem nas aulas, tais como: "Para que serve isso?", "Quem inventou?" ou "Foi o professor que criou?".

Neste item, abordaremos uma proposta didática para o ensino do triângulo de Pascal no Ensino Médio, sabendo que, nos livros de Matemática para o Ensino Médio, o triângulo de Pascal só é visto no final do capítulo de análise combinatória, com uma breve abordagem. Estamos propondo uma abordagem um pouco mais ampla, interligando-a com outros conteúdos, com o intuito de corroborar para a aprendizagem do aluno e para o professor com uma didática diferente na explanação do conteúdo.

De acordo com os Parâmetros Curricular Nacionais (PCN), "é importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas" (BRASIL, 2000, p. 40). Desse modo, no Ensino Médio, podemos estudar o triângulo de Pascal fazendo uma análise sobre como esse triângulo é formado, verificando também quais conceitos podem ser explorados.

Tendo como base tudo o que já foi exposto, o nosso estudo consiste em possibilitar uma aplicação prática de todo o conteúdo presente no desenvolvimento teórico deste trabalho. Para isso, faz-se necessário uma organização dos conteúdos e a definição da ordem em que irão ser realizados. Para tais fins, decidimos adotar os fundamentos da sequência didática, que, segundo Zabala (1998, p. 18), "[...] são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

A proposta didática, primeiramente, é fazer uma breve abordagem histórica do triângulo de Pascal, destacando como ele surgiu e, logo em seguida, fazer uma explanação sobre como desenvolve-se o triângulo de Pascal de forma simples. Dessa maneira, a primeira questão colocada aos alunos é a construção do triângulo.

No segundo momento, vamos explicar as seguintes propriedades: relação de Stifel, teorema das linhas, das colunas e das diagonais, de forma simples sem usar os números binomiais, para que o aluno tenha menos dificuldade, assim sendo, com o intuito de colaborar com seu aprendizado. Após a compreensão dos alunos, podemos avançar, usando as combinações simples nas propriedades.

No terceiro e último momento, aplicaremos uma atividade com o objetivo de verificar se o aluno realmente aprendeu a construir o triângulo de Pascal e utilizar algumas de suas propriedades de maneira simples.

PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO TRIÂNGULO DE PASCAL NO ENSINO MÉDIO

Bloco Matemático: Análise combinatória
Conteúdo: Triângulo de Pascal
Ano de Ensino: 2º ano do Ensino Médio
Objetivos:

Geral: Desenvolver a capacidade para construir o triângulo de Pascal e resolver problemas matemáticos, utilizando-o em outros conteúdos.

Específicos:

- Estimular os alunos a explorar as propriedades do triângulo de Pascal, tais como: relação de Stifel, teorema das linhas, das colunas e das diagonais.
- Compreender como é formado o triângulo de Pascal a partir dos elementos dispostos em linha e colunas.
- Compreender a relação do triângulo de Pascal entre combinação simples e o binômio de Newton.

Tempo previsto: 4 horas/aulas.

<u>1° MOMENTO</u>

Atividade 1 – Realizar uma breve abordagem histórica[3] sobre o Triângulo de Pascal:

O triângulo de Pascal, ou triângulo aritmético, recebeu vários outros nomes, uma vez que foi estudado por diversos matemáticos. Essas alterações foram constantes e aconteceram conforme o estudo foi sendo lapidado.

Os primeiros registros do triângulo de Pascal foram realizados pelo matemático indiano Pingala, que viveu por volta de 200 a.C. Pingala desenvolvia vários estudos na área da Matemática e um deles foi de combinações, no qual ele desenvolveu o triângulo aritmético, através de combinação de sílabas como mostrado na Figura 1. Esse estudo utilizando o triângulo aritmético com a análise combinatória ficou conhecido como triângulo combinatório.

Na China, o seu aparecimento deu-se a partir dos estudos envolvendo raízes quadradas, cúbicas etc., e foi denominado sistema de tabulação para descobrir coeficientes binomiais. Esse estudo foi feito pelo chinês Yang Hui, quando o triângulo aritmético ficou conhecido como triângulo de Yang Hui, mostrado na Figura 2.

Embora muitos matemáticos tenham estudado o triângulo aritmético, o matemático Blaise Pascal foi o que mais se dedicou ao seu estudo e escreveu uma monografia com sessenta páginas sobre o triângulo aritmético, onde abordava as propriedades e aplicações em outros conteúdos. Depois dos seus estudos e aplicações, o triângulo aritmético ficou conhecido como "Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM", conforme a Figura 8.

Por fim, o triângulo aritmético, hoje conhecido como o triângulo de Pascal, está presente nos livros didáticos, sendo utilizado fortemente como ferramenta em outros conteúdos de Matemática. Entre esses conteúdos, podemos citar: probabilidade, binômio de Newton,

[3] Na abordagem histórica, utilizaremos algumas figuras apresentadas no tópico **TRIÂNGULO DE PASCAL: CONSTRUÇÃO HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA**, para mostrar como era desenvolvido o triângulo de Pascal no passado.

aplicações em aritmética, na álgebra e geometria entre outros.

Atividade 2 – Explanar a construção do Triângulo de Pascal:

Para construir o triângulo de Pascal é utilizada a fórmula de combinações simples, que é expressa da seguinte forma: $C_{n,p} = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Assim, temos n, o numerador que é a linha e p, o denominador que é a coluna:

$$\binom{\text{linha}}{\text{coluna}} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Assim, o triângulo de Pascal é expresso da seguinte maneira

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4
Linha 0	$\binom{0}{0}$				
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$			
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$		
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

Como já temos conhecimento prévio sobre como calcular combinações simples, calcularemos as três primeiras linhas e as últimas, os alunos calcularão com a ajuda do professor. Para calcular, basta substituir os números binomiais na fórmula $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Depois de terem calculado as outras três linhas do Triângulo de Pascal, a seguinte forma será obtida:

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4
Linha 0	1				
Linha 1	1	1			
Linha 2	1	2	1		
Linha 3	1	3	3	1	
Linha 4	1	4	6	4	1

Para a construção, vamos fazer uma coluna 1 com quatro linhas, depois disso, vamos somar o 1 com o número consecutivo da mesma linha e o resultado ficará abaixo do número consecutivo que foi somado. Na primeira linha, só temos o número 1 para somarmos, Observando o esquema anterior, vemos que a próxima coluna é 1. Neste caso, a linha acima vai ser 0, pois $1 + 0 = 1$. Depois somamos $1 + 1 = 2$, e repetimos o mesmo processo até o triângulo de Pascal ser obtido.

$$\begin{array}{l} 1+0 \\ 1+1 \\ 1+2 \\ 1+3 \\ 1+4 \end{array}$$

Depois de termos somado a primeira coluna com a segunda, temos a seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}$$

Em seguida, somamos a segunda coluna com a terceira, que vai sendo obtida através da soma das duas colunas.

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ 1 & 1+0 \\ 1 & 2+1 \\ 1 & 3+3 \\ 1 & 4+6 \end{array}$$

<u>2° MOMENTO</u>

Atividade 1 – Realizar uma explanação sobre as propriedades do Triângulo de Pascal na lousa, utilizando o próprio triângulo de Pascal para exemplificar cada propriedade, em seguida, dar um exemplo sobre cada uma das propriedades.

(1) Soma das Linhas: a soma das linhas é igual a 2^n.
Utilizando o triângulo que foi construído anteriormente, vamos ter o seguinte:

- linha 0: $1 = 2^0 = 1$. Como a linha é 0, isto é, $n = 0$ temos $2^0 = 1$.
- linha 1: $1 + 1 = 2^1 = 2$
- linha 2: $1 + 2 + 1 = 2^2 = 4$
- linha 3: $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 = 8$

Para verificarmos, basta calcular os termos do triângulo de Pascal na forma de números binomiais:

- Linha 0: $\binom{0}{0} = 1$
- Linha 1: $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$
- Linha 2: $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4$

(2) Teorema das colunas: A soma de todos os números de uma coluna até uma determinada linha resulta no número da próxima linha da próxima coluna.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	1					
Linha 1	1	1				
Linha 2	1	2	1			
Linha 3	1	3	3	1		
Linha 4	1	4	6	4	1	
Linha 5	1	5	10	10	5	1

Somando os números da segunda coluna até a quarta linha, temos como resultado igual a 10, isto é, $1+2+3+4=10$. Na forma binomial, temos o seguinte:

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\binom{4}{1}=\binom{5}{2}=10$$

(3) Teorema das diagonais: A soma de todos os números da diagonal até a uma determinada linha resulta no número da próxima linha da última coluna a ser somada.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	1					
Linha 1	1	1				
Linha 2	1	2	1			
Linha 3	1	3	3	1		
Linha 4	1	4	6	4	1	
Linha 5	1	5	10	10	5	1

Somando os números da segunda diagonal até a quarta linha da terceira coluna, temos como resultado igual a 10, isto é, $1+2+3+4=10$. Na forma binomial, temos o seguinte:

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}=10$$

(4) Relação de Stifel: Afirma que a soma de dois números da mesma linha do triângulo resulta no número abaixo do segundo número que foi somado com o primeiro número. O número 10 é soma de $4+6=10$. Observando, no triângulo que está na lousa, percebemos que a soma de 4 e 6 satisfaz a propriedade.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	1					
Linha 1	1	1				
Linha 2	1	2	1			
Linha 3	1	3	3	1		
Linha 4	1	4	6	4	1	
Linha 5	1	5	10	10	5	1

Verificando a soma dos números em forma de números binomiais, temos que:

$$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=\binom{5}{2}=10$$

<u>3° MOMENTO</u>

Atividade 1 –Desenvolver o raciocínio lógico por meio da construção do Triângulo de Pascal e a participação ativa do aluno nas duas atividades propostas.

Observe que, no triângulo a seguir, temos a primeira coluna formada pelo número 1, nas cinco primeiras linhas e a segunda coluna, cujo os elementos foram obtidos pela soma dos elementos da linha anterior. Já que temos conhecimento prévio sobre como montar o triângulo de Pascal, agora, complete as demais linhas e colunas:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & \_\_ & & & \\
1 & 3 & \_\_ & \_\_ & & \\
1 & 4 & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \\
\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_
\end{array}
$$

1. Observando o triângulo anterior, qual propriedade foi utilizada para obter as demais linhas? Explique o que diz essa propriedade.
2. Qual padrão que podemos encontrar no triângulo de Pascal?
3. Quais serão os números da 6ª linha?
4. Somado todos números de uma diagonal qualquer até uma determinada linha do triângulo anterior, obteremos qual número? O que podemos observar a partir do número obtido?

Atividade 2 – Construir um Triângulo de Pascal de forma diferente ao que foi visto na atividade 1, quando ele estava incompleto. Agora, o triângulo de Pascal será construído de forma prática. Separaremos a sala em 5 grupos e cada grupo desenvolverá o triângulo de Pascal. Depois de construído, cada grupo apresentará uma propriedade do triângulo de Pascal, utilizando o triângulo que foi construído.

Triângulo de Pascal								
L/C	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7
Linha 0	1							
Linha 1	1	1						
Linha 2	1	2	1					
Linha 3	1	3	3	1				
Linha 4	1	4	6	4	1			
Linha 5	1	5	10	10	5	1		
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1	
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1

<u>4° MOMENTO</u>

Atividade 1 – Apresentar aos alunos a aplicação do triângulo de Pascal para o desenvolvimento do binômio de Newton.

O triângulo de Pascal é um dispositivo mecânico de fácil geração dos coeficientes de expansões do binômio de Newton do tipo $(a+b)^n$, com n inteiro e positivo, onde o número da linha do triângulo de Pascal refere-se ao grau do binômio de Newton a ser expandido.

Portanto, depois de realizado o 3° momento, o professor deverá apresentar o desenvolvimento de alguns binômios Newton e mostrar que os coeficientes gerados pela sua expansão podem ser determinados pelo triângulo de Pascal. Podem ser apresentados como exemplo os coeficientes o binômio de Newton de grau 2 está relacionado com a segunda linha do triângulo de Pascal, e que os coeficientes o binômio de Newton de grau 3 está relacionado com a terceira linha do triângulo de Pascal e assim sucessivamente.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

Triângulo de Pascal								
L/C	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7
Linha 0	1							
Linha 1	1	1						
Linha 2	1	2	1					
Linha 3	1	3	3	1				
Linha 4	1	4	6	4	1			
Linha 5	1	5	10	10	5	1		
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1	
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1

DETALHAMENTO E ORIENTAÇÕES PEDAGÓGICAS PARA A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Primeiramente, o professor fará uma abordagem histórica do conteúdo que vai ser estudado. Anteriormente, foi estudada combinação simples e, a partir desse conteúdo, o aluno será motivado a construir o triângulo de Pascal, suas propriedades.

Algumas perguntas sugeridas para nortear essa parte são: Como surgiu o triângulo de Pascal? Quais foram os matemáticos que contribuíram para o estudo do triângulo de Pascal? Quais aplicações contribuíram para outros conteúdos de Matemática?

Depois da abordagem histórica, o professor explicará como é a construção do triângulo de Pascal, que pode ser feita através do cálculo mental ou utilizando combinação simples. Neste caso, vamos fazer os dois modos de maneira bem explícita para o aluno entender, para que não haja dificuldades durante a construção.

Ao iniciar a construção, o professor explica que o triângulo é composto por linhas e colunas e ele começa a montar as linhas e colunas conforme segue:

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4
Linha 0	$\binom{0}{0}$				
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$			
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$		
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

Já no segundo momento, a explanação de cada propriedade será realizada de forma clara, usando o cálculo mental e, em seguida, usando os números binomiais para verificação do resultado de cada propriedade.

Soma das Linhas: o professor explica que a propriedade soma das linhas é igual a uma potência de 2, que é soma dos números de cada linha. Utilizando o triângulo que foi construído anteriormente, vamos ter o seguinte:

- linha 0: $1 = 2^0 = 1$. Como a linha é 0, isto é, $n = 0$ temos $2^0 = 1$.
- linha 1: $1 + 1 = 2^1 = 2$
- linha 2: $1 + 2 + 1 = 2^2 = 4$
- linha 3: $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 = 8$

Teorema das Colunas: O professor explicará o teorema utilizando o triângulo de Pascal para mostrar aos alunos que os números da coluna 1, que estão sendo destacados através do pincel vermelho até a quarta linha ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$), serão somados resultando no número da próxima linha da próxima coluna. Para o aluno entender bem, será pedido que ele faça, pelo menos, dois exemplos ou mais e, depois, faça a verificação do resultado através dos números binomiais.

Teorema das diagonais: Neste teorema, utilizando novamente o triângulo de Pascal, o professor trabalha com as diagonais, usando uma linha vermelha ou circulando os números da diagonal para destacá-los. Em seguida, somamos os números até a linha desejada. O resultado da soma dos números, que foram destacados, será o número da próxima linha abaixo do último número a ser somado da diagonal. Será solicitado que o aluno faça, pelo menos, dois exemplos ou mais e, depois, faça a verificação do resultado através dos números binomiais.

Relação de Stifel: Na relação de Stifel, não há muita dificuldade para entendê-la. Neste caso, o docente explicará ao aluno que, através da relação de Stifel, podemos construir o triângulo de Pascal, pois a soma de dois números consecutivos da mesma linha resultará no número abaixo do segundo número que foi somado. Depois, ele deve fazer a verificação do resultado através da fórmula de Stifel. No terceiro momento, são duas atividades referentes ao triângulo de Pascal.

Atividade 1 – A primeira questão é para o aluno completar as demais linhas e colunas através do conhecimento prévio que ele já adquiriu no primeiro momento da construção do triângulo de Pascal. Desse modo, devemos deixa-lo responder livremente. Se ele estiver com dificuldades, explicamos para o aluno que ele pode usar as propriedades do triângulo de Pascal para preencher as demais linhas e colunas.

A segunda questão é respondida através da questão anterior, pois a propriedade que foi utilizada foi a relação de Stifel, e, depois, deixar que o aluno explique com seu entendimento a propriedade.

Na terceira questão, esperamos um tempo para que o aluno possa refletir, para que ele consiga associar as propriedades do triângulo, buscando padrões diferentes através das propriedades.

Já na quarta questão, vamos utilizar o triângulo de Pascal para obter a sexta linha.

A quinta questão refere-se ao teorema da diagonal. O intuito dessa questão é deixar o aluno responder só, utilizando os conhecimentos prévios que foram adquiridos para responder à questão.

Atividade 2 - Cada grupo fica responsável por construir o triângulo de Pascal e explicar uma propriedade dele. A construção será feita na cartolina, assim, para isso vamos usar os seguintes materiais: pincel, régua, lápis e caneta e a cartolina. Em seguida, o professor orienta como será feita a construção do triângulo de Pascal na cartolina, que pode ser feita uma tabela com quadrados ou retângulos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pesquisamos a história do triângulo de Pascal e fizemos um levantamento de todos os matemáticos em diferentes regiões do mundo que contribuíram no seu desenvolvimento, usando-o em outras áreas da Matemática para resolver problemas de forma mais prática. Posteriormente, foi feita a explanação das propriedades de maneira explícita para o leitor entendê-la.

Nas aplicações utilizando o triângulo de Pascal, abordamos algumas aplicações com o propósito de relacioná-lo a outros conteúdos da Matemática. Assim, corroboramos para o conhecimento no âmbito da Matemática.

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou a criação de uma proposta didática para o Ensino Médio, em que abordamos um pouco da história do triângulo de Pascal, a sua construção e as propriedades com a finalidade de minimizar as dificuldades que o docente tem durante a explanação do conteúdo. Em seguida, elaboramos duas atividades com a finalidade que contemplem os objetivos da proposta didática, visando fornecer ferramentas para apresentar o conteúdo de forma mais didática.

Além disso, podemos enfatizar que a proposta tem uma sequência didática que traz um detalhamento para orientar o professor no contexto didático, para que realize a explanação do triângulo de Pascal. Dessa forma, o professor pode inserir outros métodos que permitem explorar mais o conteúdo que será estudado.

Esperamos que este trabalho sirva como ferramenta para ajudar na explanação do triângulo de Pascal que está inserido no conteúdo de análise combinatória e binômio de Newton, e que ele convém para resolver outros problemas de outros conteúdos.

REFERÊNCIAS

[1] A. Affonso, "O triângulo de pascal e o binômio de newton," *(dissertação PROFMAT em Matemática)*, 2014.

[2] "Parâmetros curriculares nacionais–ensino médio." História da Matemática - UFRGS. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 19 nov. 2018.

[3] L. R. Dante, *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2 ed., 2006.

[4] T. A. Gomes e C. K. Rodrigues, "A evolução das tendências da educação matemática e o enfoque da história da matemática no ensino," *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, vol. 4, no. 3, pp. 57–67, 2014.

[5] P. S. Guimarães in *Equações Algébricas* (E. da UFSM, ed.), Santa Maria, 2006.

[6] I. A. Mendes, J. A. Fossa, e J. E. N. Valdés, *A história como um agente de cognição na educação matemática*. Porto Alegre: Sulina, 2006.

[7] I. A. Mendes in *Investigação Histórica no Ensino de Matemática*, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2009.

[8] "Blaise pascal: Curiosidades sobre o triângulo." Oliveira, A. R. e others. http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/pasca_1/index.htm. Acesso em: abr. 2018.

[9] "The arithmetic triangle(2009)." Pulskamp, R. https://www.cs.xu.edu/math/Sources/Pascal/Sources/arith_triangle.pdf. Acesso em: dez. 2018.

[10] V. D. S. Rosadas, "Triângulo de pascal: Curiosidades e aplicações na escola básica.," *(dissertação em Matemática)*, 2016.

[11] T. P. Santiago, "Triângulo de pascal: Aplicações no ensino fundamental e médio," *(dissertação em Matemática)*, 2016.

[12] C. A. M. d. Santos, N. Gentil, e S. E. Grego, *Matemática para o Ensino Médio*. São Paulo: Ática, 2002.

[13] M. O. Silva, "Do triângulo à pirâmide de pascal," *(Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)*, 2015.

[14] "O triângulo pascal é de pascal?." História da Matemática - UFRGS. http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html. Acessado em: set. 2018.

[15] J. Souza, *Novo Olhar Matemática.* São Paulo: FTD, 2 ed., 2013.

[16] A. Zabala, *A prática educativa: como ensinar. Trad. Ernani F. da F. Rosa.* Porto Alegre: ArtMed, 1998.