

# PROJEÇÕES CILÍNDRICAS E MAPAS: PROJEÇÃO EQUIRETANGULAR, PROJEÇÃO CONFORME E PROJEÇÃO EQUIVALENTE

**Edson Agustini**

Universidade Federal de Uberlândia  
[agustini@ufu.br](mailto:agustini@ufu.br)

**Christopher Silva Aguiar**

Universidade Federal de Uberlândia  
[christopher.ufu@gmail.com](mailto:christopher.ufu@gmail.com)

**Gisele Andrade Lemos**

Universidade Federal de Uberlândia  
[giselelemosgl7@gmail.com](mailto:giselelemosgl7@gmail.com)

**Luísa Andrade Martins**

Universidade Federal de Uberlândia  
[luisaamartins10@gmail.com](mailto:luisaamartins10@gmail.com)

**Vítor Marques Barbosa**

Universidade Federal de Uberlândia  
[vitinho0.gyn@gmail.com](mailto:vitinho0.gyn@gmail.com)

**RESUMO**

Neste artigo apresentamos o desenvolvimento matemático de três projeções cilíndricas, que são as chamadas projeções *equiretangular*, *conforme* e *equivalente* da superfície esférica terrestre. A projeção equiretangular preserva, a menos de escala, distâncias ao longo dos meridianos terrestres; a projeção conforme preserva ângulos; e a projeção equivalente preserva áreas, também, a menos de escala.

**ABSTRACT**

In this paper we present the mathematical development of three cylindrical projections, which are the so-called *equiretangular*, *conformal* and *equivalent* projections of the spherical surface of Earth. The equiretangular projection preserves, less than scale, distances along the terrestrial meridians; the conformal projection preserves angles; and the equivalent projection preserves areas (less than scale).

**Palavras-chave:** Projeção, Mapa, Equiretangular, Conforme, Equivalente.

## 1 INTRODUÇÃO

Quando se estudam mapas geográficos planos de nosso planeta é natural a seguinte pergunta: *é possível construir, a menos de escala, um mapa plano perfeito do globo terrestre?* Ou então, mais tecnicamente: *existe uma isometria entre uma superfície esférica, com*

*métrica induzida da métrica euclidiana do espaço, em parte de um plano, também com métrica euclidiana?* A resposta é não. E é simples provar isso, por absurdo. Entretanto, se quisermos citar um resultado matemático famoso que respalda essa resposta, podemos considerar o *Teorema Egrégio de Gauss* (referência [1]). Naturalmente, o *Teorema Egrégio* é muito mais do que o necessário para justificar que não existe isometria entre partes de uma esfera e partes de um plano (com métricas euclidianas). Mas é um resultado interessante de ser lembrado no contexto dos mapas geográficos.

Como não é possível confeccionarmos mapas terrestres globais sem algum tipo de distorção, então podemos fazer algumas escolhas possíveis de serem implementadas. Eis algumas delas:

- *É possível construir um mapa plano do globo que preserva, a menos de escala, distâncias ao longo de certas trajetórias. (preservar distâncias de um modo geral, já vimos que não é possível)*

- *É possível construir um mapa plano do globo que preserva localmente medidas de ângulos.*

- *É possível construir um mapa plano do globo que preserva, a menos de escala, áreas.*

Felizmente, há roteiro matemático para construir mapas com as características acima e as projeções são sempre ótimas opções para essa construção.

Vamos fazer três mapeamentos rigorosos, um para cada item acima, utilizando projeções cilíndricas. São as chamadas projeções: *equiretangular*, *conforme* e *equivalente*, respectivamente. Estas três escolhas, bem como algumas técnicas matemáticas, foram baseadas na referência [2].

## 2 PROJETANDO UMA ESFERA EM UM CILINDRO

Consideremos uma esfera  $S$  de raio  $r$  com os pólos norte e sul fixados e um cilindro circular  $C$  de raio  $r$  e altura infinita, em ambos os sentidos, circunscrito à esfera na linha do equador. Isto significa que as geratrizes do cilindro  $C$  são retas. As projeções com  $S$  e  $C$  assim convencionados são chamadas de *Projeções Equatoriais* ou *Projeções Normais*. A figura abaixo à esquerda ilustra uma projeção equatorial.

Fixemos o sistema de coordenadas “*latitude-longitude*” sobre  $S$  de modo que o eixo do cilindro  $C$  passe pelos pólos norte e sul de  $S$  (e, portanto, a intersecção de  $S$  com  $C$  é, de fato, o equador de  $S$ , que são os pontos de *latitude zero*). Chamemos de  $S'$  a esfera  $S$  menos os pólos norte e sul.

Para simplificar os cálculos, vamos considerar latitudes  $a^\circ S$  e  $b^\circ N$  como sendo  $-a$  e  $+b$ ; e longitudes  $c^\circ W$  e  $d^\circ E$  como sendo  $-c$  e  $+d$ , respectivamente, ou seja, vamos considerar uma orientação para a latitude e para a longitude. Além disso, vamos considerar as medidas dos ângulos em radianos e não em graus. Desta forma, um ponto  $P \in S'$  pode ser associado de forma unívoca a um par ordenado quando fazemos as restrições de latitude em  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  e de longitude em  $[-\pi, \pi[$ .

Para facilitar nossas contas, vamos inverter a ordem das coordenadas, tomando longitude como abscissa e latitude como ordenada, ou seja, um ponto  $P \in S'$  será associado de forma unívoca ao par ordenado  $(\theta; \phi)$  sendo  $\theta \in [-\pi, \pi[$  a longitude; e  $\phi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  a latitude.

É interessante notar a similitude entre as coordenadas “*latitude-longitude*” e as coordenadas esféricas usuais quando fixamos o raio  $r$  da esfera, ou seja, um ponto de  $S$  em coordenadas esféricas  $(\rho; \theta; \phi)$  tem  $\rho = r$ , ordenada  $\theta$  e cota  $\phi$  associadas à longitude  $\theta$  e latitude  $\phi$ , respectivamente. A diferença é que nas coordenadas esféricas usuais  $\theta$  varia em  $[0, 2\pi[$  e  $\phi$  varia em  $[0, \pi]$ .

Lembremos que se  $S$  for usado como modelo para nosso planeta, seus pontos tais que  $\theta = 0$  (longitude zero) correspondem ao *Meridiano de Greenwich*, que passa próximo a Londres, sobre o observatório astronômico de Greenwich. Trata-se de uma convenção, uma vez que, devido à rotação do planeta, não há meridianos “naturalmente especiais”. Quanto à latitude zero,  $\phi = 0$ , é natural que seja o equador terrestre, que é um paralelo

especial do globo devido à rotação do planeta. Trata-se do único paralelo terrestre cujo raio coincide com o raio do planeta.

Para estabelecer um sistema de coordenadas no cilindro  $C$ , comecemos com o sistema de coordenadas cilíndricas usuais (coordenadas polares na abscissa e na ordenada, e cota do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço), ou seja,  $(r; \theta; z)$ . Como um cilindro pode ser planificado de modo isométrico (sem distorções), vamos adotar o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais  $(x, y) = (r\theta, z)$  no cilindro  $C'$  planificado, ou seja, um ponto  $Q(r; \theta; z) \in C$  pode ser associado de forma unívoca a um ponto  $Q'(r\theta, z) \in C'$ , sendo  $\theta \in [-\pi, \pi[$  e  $z \in \mathbb{R}$ .

Observemos que  $r\theta$  indica o comprimento orientado do arco de circunferência que liga o ponto  $O(r; 0; 0)$  ao ponto  $A(r; \theta; 0)$  (em coordenadas cilíndricas) no cilindro  $C$ .

Consideremos a projeção cilíndrica  $\gamma : S' \rightarrow C'$  construída do seguinte modo:

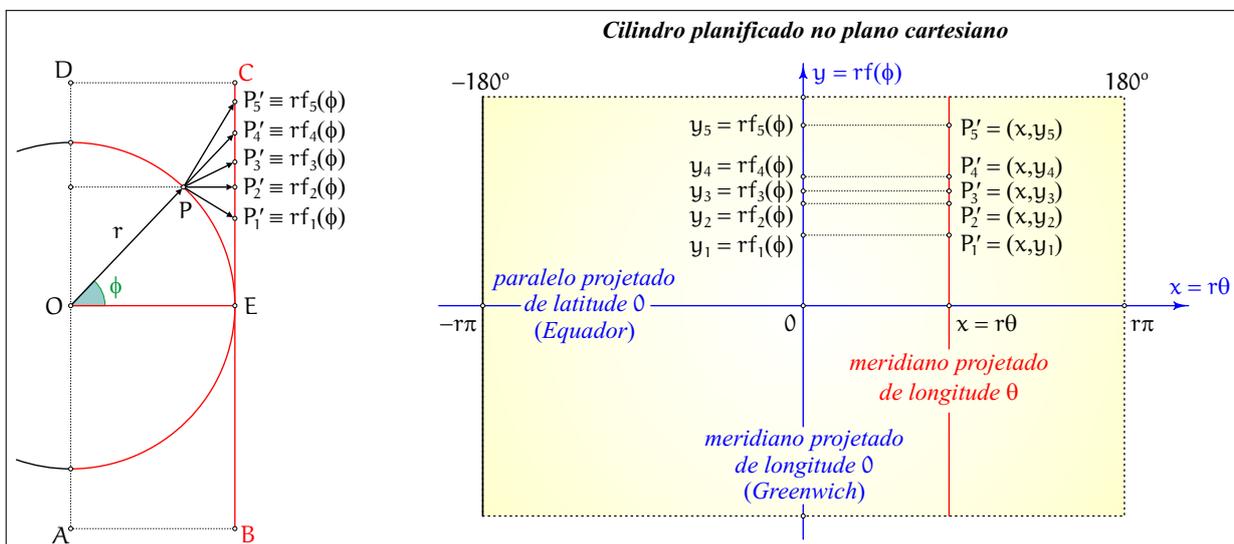
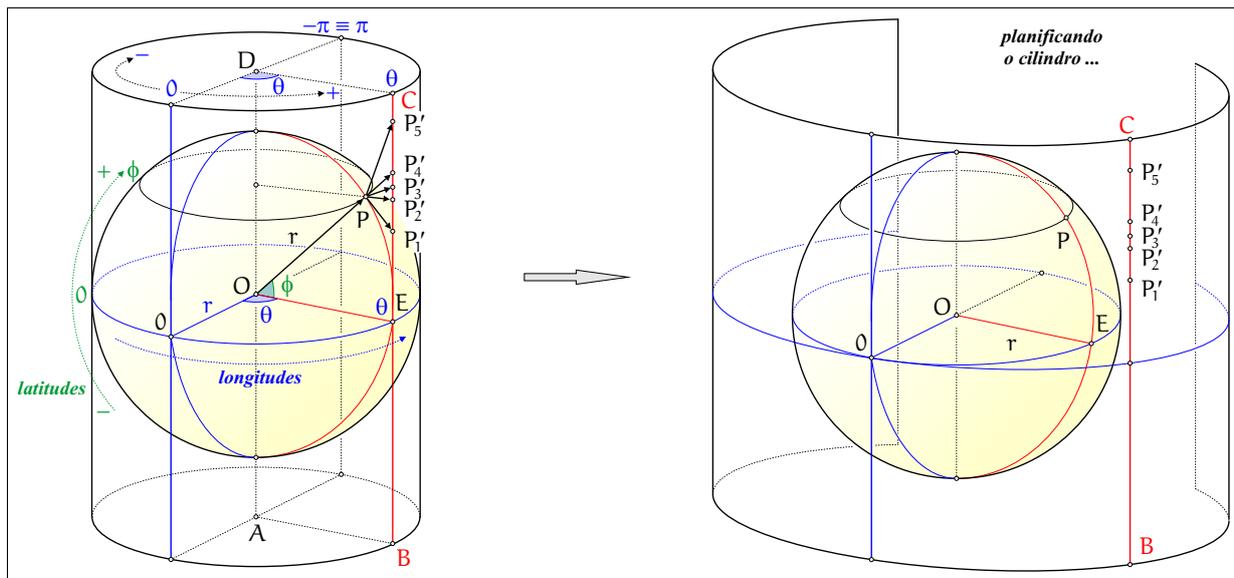
$$\gamma(\theta; \phi) = (r\theta, z)$$

com  $z = rf(\phi)$ , sendo  $f : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função injetiva diferenciável, ou seja:

$$\gamma : S' \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow C' \subset \mathbb{R}^2$$

$$(\theta; \phi) \longmapsto (x, y) = (r\theta, rf(\phi))$$

Abaixo seguem quatro figuras que ajudam a compreender, de modo geométrico, a ação da projeção cilíndrica  $\gamma$  para cinco funções  $f$  diferentes.



Duas observações importantes se destacam nesse tipo de projeção:

(1) A projeção  $\gamma$  mapeia o equador de  $S'$  de forma isométrica no eixo  $x$  de  $C'$ , ou seja, nesse tipo de projeção temos uma *retificação isométrica* do equador de  $S'$ . Esse comportamento de  $\gamma$  não se aplica aos demais paralelos de  $S'$ , que sofrem distorção e são projetados de forma “esticada” em  $C'$ .

(2) Um meridiano  $m$  equidistante de outros dois meridianos  $m_1$  e  $m_2$  em  $S'$  (equidistante em termos da longitude  $\theta$ ) é mapeado em uma reta vertical  $\gamma(m)$  equidistante das retas verticais  $\gamma(m_1)$  e  $\gamma(m_2)$  em  $C'$ .

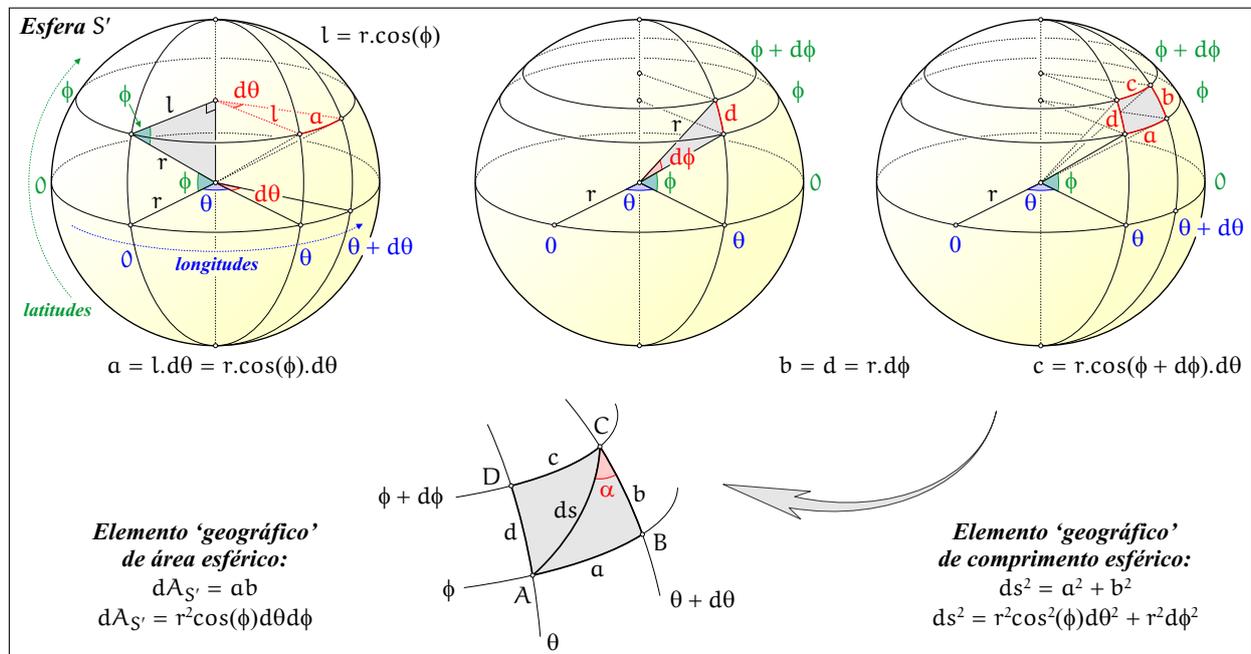
Naturalmente, dependendo de  $f$  temos os diversos tipos de projeções cilíndricas. Veremos algumas delas, mas antes, façamos a associação entre um elemento de área  $dA_{S'}$  na esfera  $S'$  e um elemento de área  $dA_{C'}$  no cilindro planificado  $C'$  em termos da longitude  $\theta$  e da latitude  $\phi$ . Chamaremos esses elementos de área de “geográficos”.

### 3 ESTABELECENDO ELEMENTOS DE ÁREAS

Na esfera  $S'$  o elemento de área  $dA_{S'}$  provém da área do “retângulo esférico geográfico”  $ABCD$  delimitado entre os meridianos de longitude  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  e entre os paralelos de latitude  $\phi$  e  $\phi + d\phi$ . Este “retângulo esférico geográfico”  $ABCD$  possui lados horizontais medindo  $a = r \cos(\phi) d\theta$  e  $c = r \cos(\phi + d\phi) d\theta$  e lados verticais medindo  $b = d = r d\phi$  (veja a figura abaixo). Como o “retângulo esférico geográfico”  $ABCD$  na esfera é tanto próximo de um retângulo plano quanto menores forem  $d\theta$  e  $d\phi$ , temos

$$dA_{S'} = ab = (r \cos(\phi) d\theta) (r d\phi) \Rightarrow \boxed{dA_{S'} = r^2 \cos(\phi) d\theta d\phi}.$$

Consideremos, ainda, que no triângulo esférico  $ABC$  a medida do ângulo  $\widehat{ACB}$  seja  $\alpha$  raios.



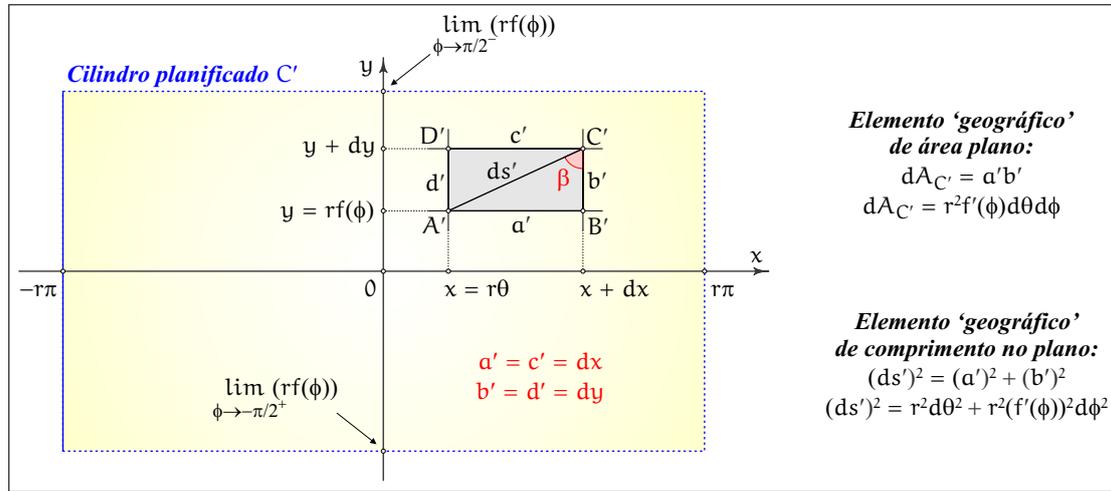
É importante observar que um “retângulo esférico geográfico” não é um quadrilátero esférico, pois dois de seus lados não estão sobre círculos máximos da esfera  $S'$ . O único paralelo que é círculo máximo sobre a esfera  $S'$  é o equador.

No cilindro planificado  $C'$  temos o elemento de área  $dA_{C'}$  dado pela área do retângulo plano  $A'B'C'D'$ , delimitado entre as retas verticais  $x$  e  $x + dx$ , e as retas horizontais  $y$  e

$y + dy$  (veja a figura abaixo). Este retângulo  $A'B'C'D'$  possui lados horizontais medindo  $a' = c' = dx$  e lados verticais medindo  $b' = d' = dy$ . Como  $x = r\theta$  e  $y = rf(\phi)$  temos:

$$dA_{C'} = a'b' = dx dy = (rd\theta) (rf'(\phi) d\phi) \Rightarrow dA_{C'} = r^2 f'(\phi) d\theta d\phi.$$

Consideremos, ainda, que no triângulo  $A'B'C'$  a medida do ângulo  $A'C'B'$  seja  $\beta$  radianos.



**Dois preliminares importantes:**

(1) Como relacionar  $\alpha$  e  $\beta$  citados acima?

Vejam os:

Como o "retângulo esférico geográfico"  $ABCD$  na esfera é tanto próximo de um retângulo plano quanto menores forem  $d\theta$  e  $d\phi$ , temos

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{r \cos(\phi) d\theta}{rd\phi} \Rightarrow \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\text{tg}(\alpha)}{\cos(\phi)}. \tag{1}$$

Já no retângulo  $A'B'C'D'$  no cilindro planificado:

$$\text{tg}(\beta) = \frac{dx}{dy}. \tag{2}$$

Mas, de  $x = r\theta$  temos  $\frac{dx}{d\theta} = r$  (lembramos que  $r$  é constante), ou seja,

$$dx = r d\theta. \tag{3}$$

De  $y = rf(\phi)$  temos  $\frac{dy}{d\phi} = rf'(\phi)$ , ou seja,

$$dy = rf'(\phi) d\phi. \tag{4}$$

Assim, substituindo (3) e (4) em (2):

$$\text{tg}(\beta) = \frac{rd\theta}{rf'(\phi)d\phi} \Rightarrow \frac{d\theta}{d\phi} = \text{tg}(\beta) f'(\phi), \tag{5}$$

de onde concluímos, igualando (1) e (5):

$$\frac{\text{tg}(\alpha)}{\cos(\phi)} = \text{tg}(\beta) f'(\phi) \Rightarrow \frac{\text{tg}(\alpha)}{\text{tg}(\beta)} = \cos(\phi) f'(\phi),$$

que é a relação entre ângulos na esfera  $S'$  e ângulos projetados no cilindro planificado  $C'$ .

(2) Como podemos encontrar um fator de escala entre os elementos de áreas  $dA_{S'}$  e  $dA_{C'}$ ?

Das expressões para os elementos de área encontrados acima:

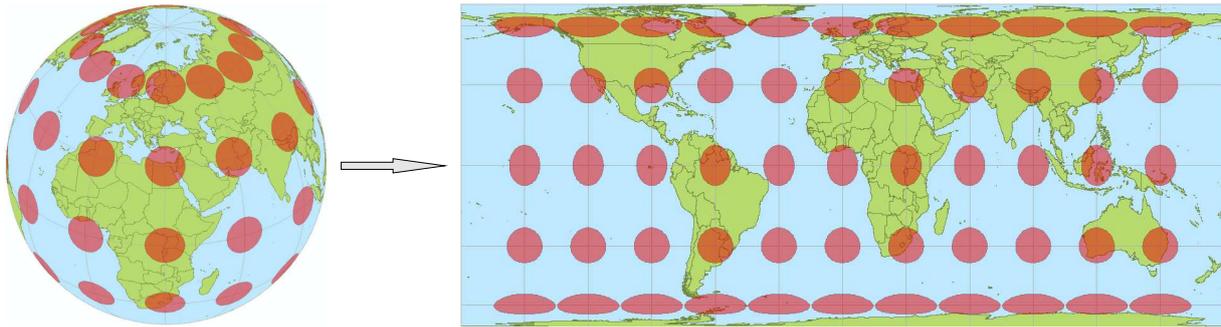
$$\frac{dA_{S'}}{dA_{C'}} = \frac{r^2 \cos(\phi) d\theta d\phi}{r^2 f'(\phi) d\theta d\phi} \Rightarrow \frac{dA_{S'}}{dA_{C'}} = \frac{\cos(\phi)}{f'(\phi)},$$

que é a razão entre áreas de regiões na esfera  $S'$  e áreas das projeções dessas regiões no cilindro planificado  $C'$ .

## 4 TRÊS TIPOS IMPORTANTES DE PROJEÇÕES CILÍNDRICAS

Lembremos que, conforme já observado, na projeção cilíndrica  $\gamma : S' \rightarrow C'$ , meridianos equidistantes em  $S'$  (em relação à longitude  $\theta$ ) são mapeados em retas verticais equidistantes em  $C'$ . Além disso, a linha do equador de  $S'$  é projetada isometricamente em  $C'$  por  $\gamma$ . As três projeções cilíndricas listadas abaixo cumprem essas propriedades.

Para avaliar o nível de distorção de áreas, ângulos e distâncias dos mapas obtidos nestas três projeções, usamos a chamada técnica das *Indicatrizes de Tissot*<sup>1</sup>, que consiste na colocação de discos esféricos (calotas) congruentes ao longo de alguns meridianos da esfera e a avaliação de sua imagem no plano (figura abaixo). As imagens dessas calotas são as indicatrizes e, geralmente, são muito parecidas com elipses, conforme podemos verificar nos exemplos trabalhados abaixo.



### (1) Projeção Cilíndrica Equiretangular ou Equidistante.

Embora no nome sugira, não trata-se de uma projeção que preserve distâncias de um modo geral (pois tal projeção não existe, pelo *Teorema Egrégio de Gauss*). Trata-se de uma projeção cilíndrica  $\gamma : S' \rightarrow C'$  que mapeia paralelos equidistantes de  $S'$  (equidistantes em relação à latitude  $\phi$ ) em segmentos horizontais equidistantes em  $C'$  e, além disso, o fator de escala entre comprimento e largura no retângulo planificado  $ABCD$  em  $C'$  é um, ou seja:

$$dx = dy.$$

Esta projeção é interessante porque um “*quadrulado esférico geográfico*” ( $d\theta = d\phi$ ) formado por meridianos e paralelos cobrindo  $S'$  é mapeado pela projeção cilíndrica  $\gamma$  em um quadrulado plano formado por segmentos horizontais e verticais em  $C'$ .

Vamos à contas. Usando (3) e (4):

$$dx = dy \Rightarrow r d\theta = r f'(\phi) d\phi \Rightarrow f'(\phi) = \frac{d\theta}{d\phi} \Rightarrow f'(\phi) = 1 \Rightarrow f(\phi) = \phi + k.$$

Como queremos que o equador de  $S'$  seja mapeado sobre o eixo  $x$  de  $C'$ , tomemos  $k = 0$ . Assim, a *Projeção Cilíndrica Equiretangular* é dada por

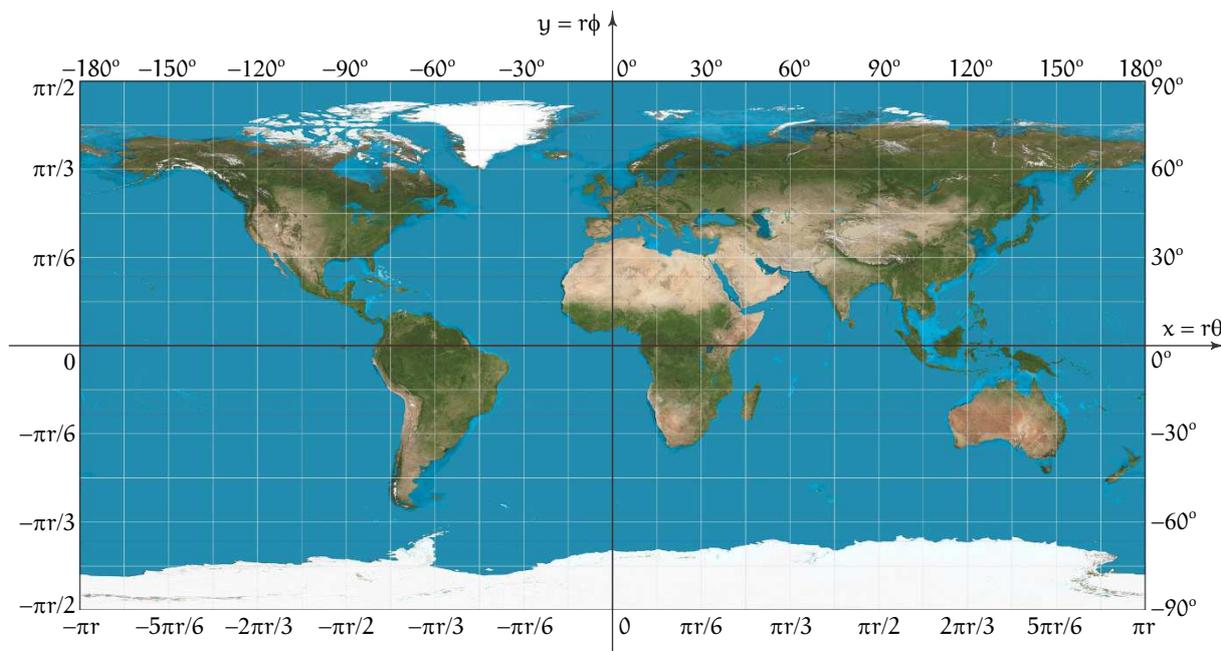
$$\boxed{\begin{array}{l} \gamma : S' \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow C' \subset \mathbb{R}^2 \\ (\theta; \phi) \longmapsto (x, y) = (r\theta, r\phi) \end{array}},$$

sendo  $(\theta; \phi)$  as coordenadas geográficas “*longitude-latitude*” (nesta ordem) sobre  $S'$ .

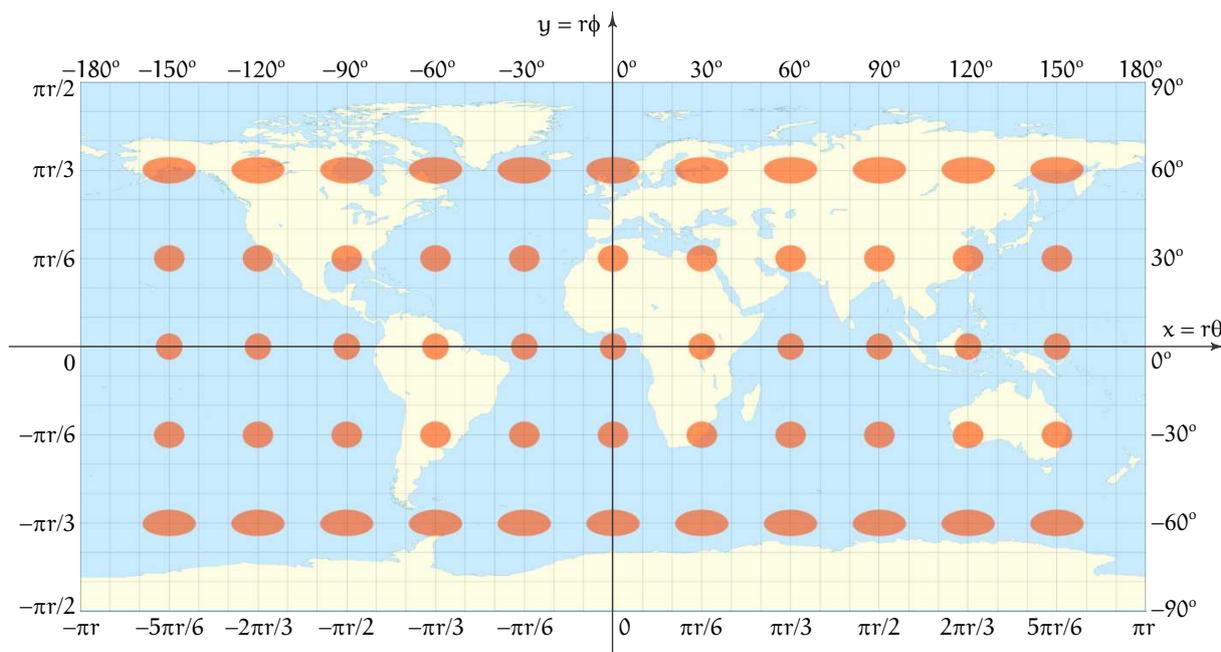
Na figura abaixo<sup>2</sup> temos o mapa dos continentes do planeta Terra planificado pela projeção cilíndrica equiretangular. Áreas, ângulos e distâncias (exceto ao longo dos meridianos e do equador) não são preservadas nesse tipo de projeção. Observemos que a distorção é maior em latitudes  $\gamma$  mais extremas.

<sup>1</sup>**Nicolas Auguste Tissot** (1824 – 1897): cartógrafo francês que desenvolveu um método de avaliação de distorção geométrica de mapas conhecido, hoje, como “*Indicatrizes de Tissot*”.

<sup>2</sup>Todas as imagens de fundo de mapas terrestres e *Indicatrizes de Tissot* deste artigo foram obtidas do banco de imagens “Wikimedia Commons” da Internet, e todas elas são regidas pela licença “Creative Commons”.



A figura abaixo ilustra melhor a distorção produzida pela planificação equiretangular, por meio das *Indicatrizes de Tissot*. Todas as “elipses” são imagens de calotas (discos sobre a esfera) congruentes distribuídas homogeneamente ao longo de alguns meridianos de  $S'$ .



Observemos que as alturas das “elipses” são iguais, o que confirma que as distâncias são preservadas ao longo dos meridianos. Já as áreas, os ângulos e as distâncias (exceto nos meridianos e no equador) sofrem distorções. Este tipo de mapa é bastante difundido devido à sua estética, pois um “*quadriculado geográfico*” criado pelas latitudes e longitudes do globo, espaçadas por um mesmo ângulo (de 10° em 10° na figura acima), é mapeado em um quadriculado plano.

**(2) Projeção Cilíndrica Conforme ou de Mercator.**

Nesta projeção queremos preservar ângulos, ou seja, queremos preservar o formato, ou o contorno, dos continentes do globo. Matematicamente queremos  $\alpha = \beta$  nos quadriláteros  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  em  $S'$  e  $C'$ , respectivamente. Assim, de

$$\frac{\text{tg}(\alpha)}{\text{tg}(\beta)} = \cos(\phi) f'(\phi) \Rightarrow \cos(\phi) f'(\phi) = 1 \Rightarrow f'(\phi) = \sec(\phi) \Rightarrow f(\phi) = \ln(|\sec(\phi) + \text{tg}(\phi)|) + k.$$

Como queremos que o equador de  $S'$  seja mapeado sobre o eixo  $x$  de  $C'$ , tomemos  $k = 0$ . Há uma expressão mais simples para a função  $f$ . Vamos a ela:

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \ln(|\sec(\phi) + \operatorname{tg}(\phi)|) = \ln\left(\left|\frac{1+\operatorname{sen}(\phi)}{\cos(\phi)}\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{\operatorname{sen}^2(\frac{\phi}{2})+2\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2})\cos(\frac{\phi}{2})+\cos^2(\frac{\phi}{2})}{\cos^2(\frac{\phi}{2})-\operatorname{sen}^2(\frac{\phi}{2})}\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|\frac{(\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2})+\cos(\frac{\phi}{2}))^2}{(\cos(\frac{\phi}{2})-\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2}))(\cos(\frac{\phi}{2})+\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2}))}\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2})+\cos(\frac{\phi}{2})}{\cos(\frac{\phi}{2})-\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2})}\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2})\cos(\frac{\pi}{4})+\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\phi}{2})}{\cos(\frac{\phi}{2})\cos(\frac{\pi}{4})-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2})}\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|\frac{\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4})}\right|\right) = \ln\left(\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right), \end{aligned}$$

pois  $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$  para  $\phi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

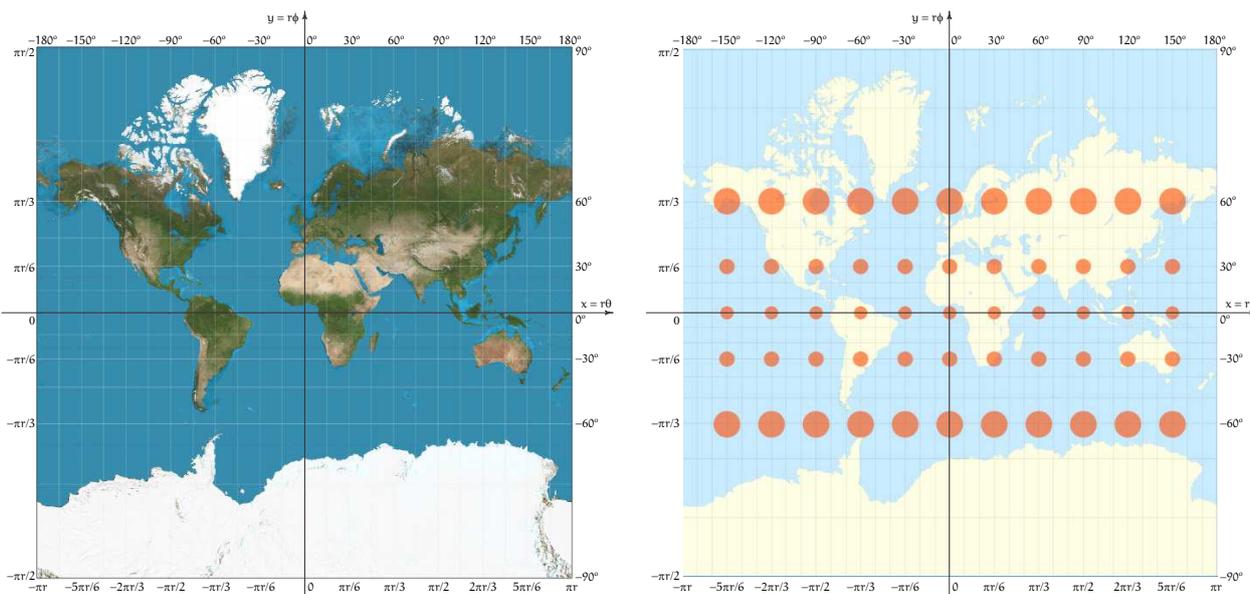
Assim, a *Projeção Cilíndrica Conforme* é dada por

$$\gamma: S' \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow C' \subset \mathbb{R}^2$$

$$(\theta; \phi) \longmapsto (x, y) = \left(r\theta, r \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right),$$

sendo  $(\theta; \phi)$  as coordenadas geográficas “longitude-latitude” (nesta ordem) sobre  $S'$ .

Na figura abaixo à esquerda temos o mapa dos continentes do planeta Terra planificado pela projeção conforme. Ângulos são preservados, ou seja, o contorno dos continentes são preservados, mas áreas e distâncias (exceto no equador) não são preservadas nesse tipo de projeção. Observemos que a distorção é maior em latitudes mais extremas.



A figura acima à direita ilustra melhor a distorção produzida pela projeção conforme, utilizando as *Indicatrizes de Tissot*. Todas os discos são imagens de calotas congruentes (discos congruentes sobre a esfera) distribuídas homogeneamente ao longo de alguns meridianos de  $S'$ .

Observemos que a preservação de ângulos faz com que as calotas sejam sempre mapeadas em discos, ou seja, as *Indicatrizes de Tissot* são discos no plano. Entretanto, seus raios variam ao longo dos meridianos. Já os áreas e os perímetros dos discos sofrem distorções.

A projeção conforme teve importância fundamental na época dos grandes descobrimentos nos séculos *XVI* e *XVII*, uma vez que as chamadas *linhas de rumo* (curvas que formam ângulos constante com os meridianos) são mapeadas em retas no mapa conforme. A navegação no oceano por meio de uma linha de rumo foi algo fácil de se realizar com o auxílio de uma bússola pois, estabelecido o ângulo da linha de rumo, basta manter o norte da bússola e a proa do navio (ou caravela) com esse ângulo.

**(3) Projeção Cilíndrica Equivalente ou de Lambert.**

Nesta projeção queremos preservar áreas, ou seja,  $dA_{S'} = dA_{C'}$ . Assim, de

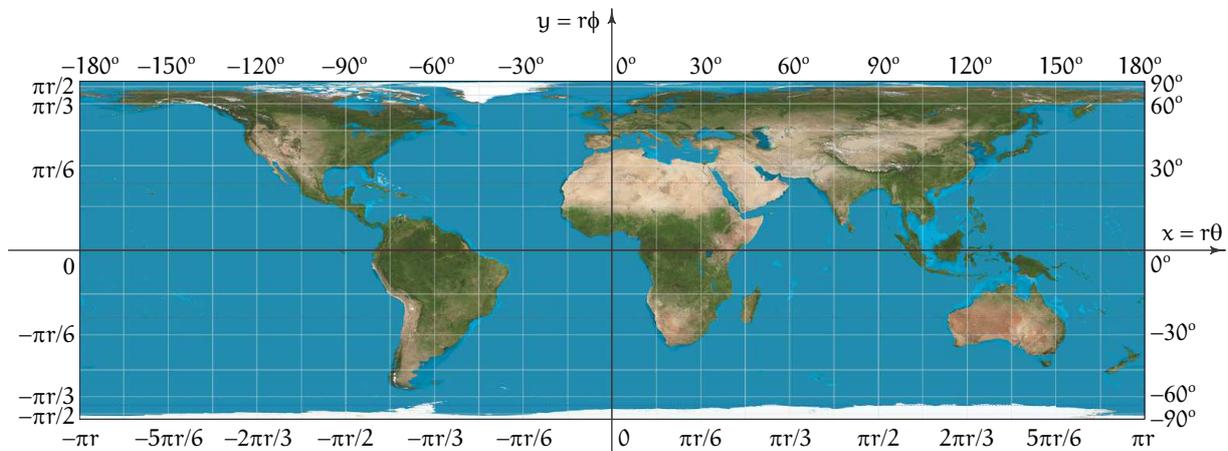
$$\frac{dA_{S'}}{dA_{C'}} = \frac{\cos(\phi)}{f'(\phi)} \Rightarrow \frac{\cos(\phi)}{f'(\phi)} = 1 \Rightarrow f'(\phi) = \cos(\phi) \Rightarrow f(\phi) = \text{sen}(\phi) + k.$$

Como queremos que o equador de  $S'$  seja mapeado sobre o eixo  $x$  de  $C'$ , tomemos  $k = 0$ . Assim, a *Projeção Cilíndrica Equivalente* é dada por

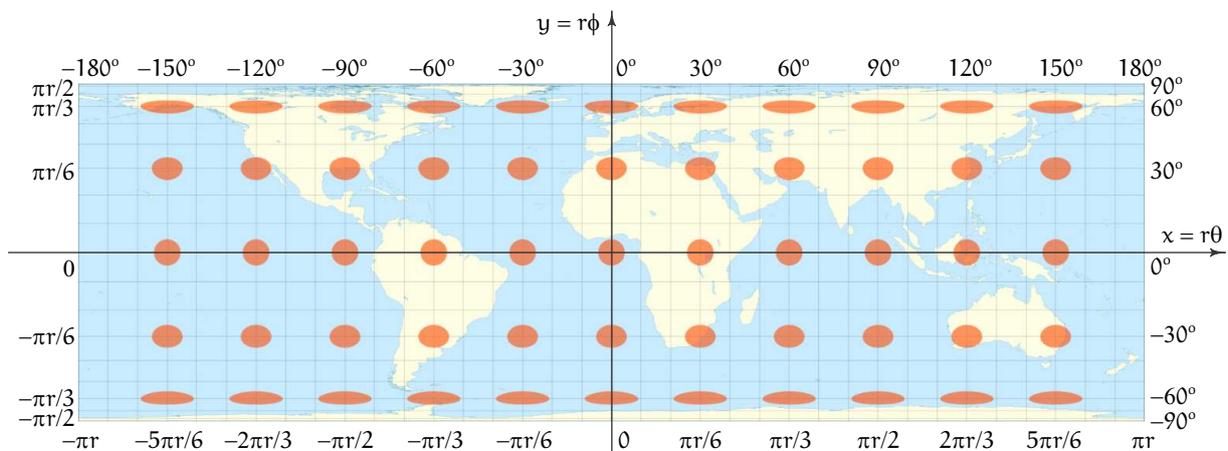
$$\gamma : \begin{matrix} S' \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & C' \subset \mathbb{R}^2 \\ (\theta; \phi) & \longmapsto & (r\theta, r \text{sen}(\phi)) \end{matrix},$$

sendo  $(\theta; \phi)$  as coordenadas geográficas “longitude-latitude” (nesta ordem) sobre  $S'$ .

Na figura abaixo temos o mapa dos continentes do planeta Terra planificado pela projeção equivalente. Áreas são preservadas, mas distâncias (exceto no equador) e ângulos não são preservados nesse tipo de projeção. Observemos que a distorção é maior em latitudes mais extremas.

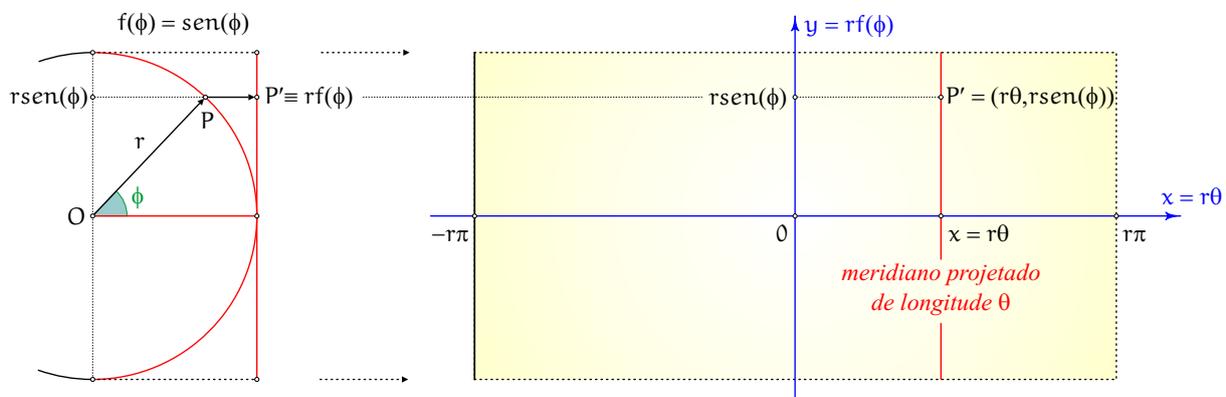


A figura abaixo ilustra melhor a distorção produzida pela projeção equivalente utilizando as *Indicatrizes de Tissot*. Todas as “elipses” possuem a mesma área e são imagens de calotas (discos sobre a esfera) congruentes distribuídas homogeneamente ao longo de alguns meridianos de  $S'$ .



Claramente se observa que distâncias e ângulos ficam seriamente comprometidos. Observa-se, também que, tomando-se por base a projeção equiretangular, a projeção conforme “estica verticalmente” o mapa, enquanto que a projeção equivalente “comprime verticalmente” o mapa.

Uma outra observação bastante importante é que a projeção cilíndrica equivalente é **ortogonal**, no sentido de que um ponto de coordenadas geográficas  $(\theta; \phi)$  na esfera  $S'$  é projetado em um ponto de cota  $\text{sen}(\phi)$  no cilindro  $C$  por meio de uma reta paralela ao plano horizontal que passa pelo equador da esfera. Portanto, a reta que liga o ponto  $(\theta; \phi)$  de  $S'$  à sua projeção no cilindro  $C$  é uma reta *ortogonal* ao cilindro  $C$ . Nas figuras que apresentamos no início dessa seção, a projeção cilíndrica equivalente está associada à função  $f_2$ . A figura abaixo ajuda a compreender a projeção equivalente ortogonal.



## 5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo apresentamos apenas três tipos de projeções cilíndricas com o objetivo de mapear a superfície terrestre: a projeção *equiretangular*, a projeção *conforme* e a projeção *equivalente*. Entretanto, existem outros tipos de projeções como, por exemplo, as *projeções cônicas*, onde a esfera é projetada em um cone, ou então as *projeções planas*, onde a esfera é projetada diretamente em um plano (a famosa *projeção estereográfica* é um exemplo disso).

Uma rápida pesquisa na Internet revela quase uma centena (!!) de projeções terrestres apenas com os tipos derivados das projeções cilíndricas, cônicas e planas. Todas elas com o embasamento matemático necessário. Sem dúvida, uma fonte imensa de estudos matemáticos e cartográficos. Além disso, existe quase uma infinidade de mapas “artísticos” e, também, “históricos” que, por si só, constituem uma bela página da evolução da ciência cartográfica ao longo dos tempos.

## REFERÊNCIAS

- [1] M. P. Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [2] C. S. Serrano Paulo, “Projeções e curvas notáveis da esfera,” Master’s thesis, Universidade da Beira Interior - Covilhã. Portugal, 2012.