# O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROWER E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS DINÂMICOS

**Valdair Bonfim**
Universidade Federal de Uberlândia
valdair@ufu.br

**Gregory Duran Cunha**
Universidade Federal de Uberlândia
gregdurancunha@gmail.com

**RESUMO**

Neste artigo construiremos o grupo fundamental de um espaço topológico, também denominado Primeiro Grupo de Homotopia, e o usaremos para provar o Teorema do Ponto Fixo de Brower, um importante resultado na teoria de pontos fixos. Na sequência faremos uma aplicação na teoria dos sistemas dinâmicos, provando que um certo sistema de equações diferenciais ordinárias tem solução periódica não trivial.

**ABSTRACT**

In this work we will construct the fundamental group of a topological space, also called First Homotopy Group, and use it to prove the Brower Fixed Point Theorem, an important result on fixed point theory. In the sequel, we will do an application in the theory of dynamical systems, proving that a certain system of ordinary differential equations has non-trivial periodic solutions.

**Palavras-chave:** Topologia Algébrica, Grupo Fundamental, Aplicação de Poincaré, Equações Diferenciais.

## 1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de sistemas mecânicos e elétricos, da interação entre diferentes espécies de seres vivos, do espalhamento de doenças em grupos sociais, o equilíbrio em sistemas econômicos, dentre várias outras situações concretas, conduzem ao estudo de sistemas de equações diferenciais do tipo

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \quad\vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{1}$$

Este, por sua vez, pode ser escrito sucintamente como

$$X'(t) = F(X(t)), \tag{2}$$

onde $F : D \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação $F(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))$, definida num certo subconjunto aberto $D$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Na literatura matemática a aplicação $F$ é também denominada um *campo vetorial*.

Neste trabalho vamos considerar campos vetoriais $F$ para os quais o problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{3}$$

possui, para cada condição inicial $X_0$, uma única solução $t \mapsto X(t)$, definida para todo $t \geq 0$, a qual denotaremos por $X(t, X_0)$. Vamos supor ainda que estas soluções dependam continuamente dos dados iniciais $X_0$. Tais propriedades são verificadas, por exemplo, quando o campo $F$ é Lipschitiziano, isto é, quando existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|F(X) - F(Y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq C\|X - Y\|_{\mathbb{R}^n}, \ \ \forall X, Y \in D,$$

e quando, com alguma hipótese adicional, consigamos demonstrar que as órbitas são limitadas.

Nestas condições, a família $(X(t, \cdot))_{t\geq 0}$ satisfaz:

(i) $X(0, \cdot) = Id_{\mathbb{R}^2}$;

(ii) $X(t + s, \cdot) = X(t, X(s, \cdot))$, $\forall t, s \geq 0$.

Famílias como estas são denominadas *sistemas dinâmicos*. O leitor interessado num texto introdutório deste assunto poderá consultar [1].

A equação $X'(t) = F(X(t))$ diz que o vetor velocidade $X'(t)$ é igual ao vetor $F(X(t))$, ou seja, qualquer solução $t \mapsto X(t)$ de (2) tangencia o campo de vetores $F$, conforme ilustra a figura 1. Nesta figura podemos ver as soluções a partir de três condições iniciais distintas. Tais soluções também são chamadas *trajetórias* ou *órbitas do campo vetorial* $F$.

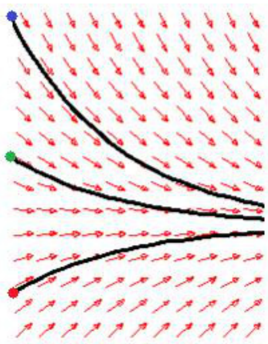

**FIGURA 1:** Órbitas de um campo vetorial

## 2 O GRUPO FUNDAMENTAL E O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROWER

Nesta seção vamos construir o grupo fundamental de um espaço topológico $X$, definir o homomorfismo induzido por uma aplicação contínua, e demonstrar um conjunto de propriedades que serão suficientes para uma prova rigorosa do Teorema do Ponto Fixo de Brower. Este, por sua vez, será usado na seção 3 para provarmos existência de soluções periódicas não triviais para uma classe de sistemas dinâmicos no plano.

**Definição 2.1:** *Dados um espaço topológico $X$ e um ponto $x_0 \in X$, um laço com ponto base $x_0$ nesse espaço topológico é uma função contínua $\alpha : [0, 1] \to X$ satisfazendo $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.*

O conjunto de todos os laços com ponto base $x_0$ será denotado por $L(X, x_0)$.

**Definição 2.2:** *Dois laços $\alpha$ e $\beta$ são ditos homotópicos, e escreve-se $\alpha\dot{\sim}\beta$, quando existe uma função contínua $H : [0,1]\times[0,1] \to X$ tal que:*

$$\begin{cases} H(0,t) = \alpha(t), \ \ \forall t \in [0,1] \\ H(1,t) = \beta(t), \ \ \forall t \in [0,1] \\ H(s,0) = H(s,1) = x_0, \ \ \forall s \in [0,1]. \end{cases}$$

Ou seja, $\alpha\dot{\sim}\beta$ significa que é possível deformar continuamente o laço $\alpha$ no laço $\beta$ sem sair do espaço $X$, e de modo que, em qualquer instante $s$ da deformação, a função $H(s,\cdot) : [0,1] \to X$ ainda seja um laço com ponto base $x_0$. A função $H$ é chamada uma *homotopia* entre os laços $\alpha$ e $\beta$.

**Lema 2.1:** *A homotopia de laços é uma relação de equivalência em $L(X, x_0)$.*

*Demonstração.* A relação de homotopia é reflexiva, pois dado $\alpha \in L(X, x_0)$, basta considerar a aplicação contínua $H(s,t) = \alpha(t)$ para concluir que $\alpha\dot{\sim}\alpha$. Para provar que a relação de homotopia é simétrica, sejam $\alpha$ e $\beta$ laços com ponto base $x_0$, e suponha que $\alpha\dot{\sim}\beta$. Então existe uma homotopia $H : [0,1]\times[0,1] \to X$ tal que $H(0,t) = \alpha(t)$, $H(1,t) = \beta(t)$, $H(s,0) = H(s,1) = x_0$. Logo, a função $G : [0,1]\times[0,1] \to X$ definida por $G(s,t) = H(1-s,t)$ é contínua, e satisfaz as condições $G(0,t) = H(1,t) = \beta(t)$, $G(1,t) = H(0,t) = \alpha(t)$, $G(s,0) = H(1-s,0) = x_0$ e $G(s,1) = H(1-s,1) = x_0$, $\forall s,t \in [0,1]$. Assim, $G$ é uma homotopia entre $\beta$ e $\alpha$, ou seja, $\beta\dot{\sim}\alpha$. Resta provar que a relação de homotopia é transitiva, isto é, que se $\alpha\dot{\sim}\beta$ e $\beta\dot{\sim}\gamma$, então $\alpha\dot{\sim}\gamma$. Mas isto significa que existem homotopias $F : [0,1]\times[0,1] \to X$ e $G : [0,1]\times[0,1] \to X$ tais que $\forall s,t \in [0,1]$, tem-se,

$$F(0,t) = \alpha(t), \ \ F(1,t) = \beta(t), \ \ F(s,0) = F(s,1) = x_0$$

$$G(0,t) = \beta(t), \ \ G(1,t) = \gamma(t), \ \ G(s,0) = G(s,1) = x_0.$$

Assim, definindo $H : [0,1]\times[0,1] \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & \text{se } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t), & \text{se } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

temos que $H$ é contínua pelo *lema da colagem*, pois quando $s = \frac{1}{2}$ as expressões $F(2s,t)$ e $G(2s-1,t)$ assumem os mesmos valores, já que por hipótese $F(1,t) = \beta(t)$ e $G(0,t) = \beta(t)$. Mais ainda, esta aplicação $H$ satisfaz todas as condições de ser uma homotopia entre $\alpha$ e $\gamma$, pois:

$$H(0,t) = F(0,t) = \alpha(t)$$

$$H(1,t) = G(1,t) = \gamma(t)$$

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0) = x_0, & \forall s \in [0,\frac{1}{2}] \\ G(2s-1,0) = x_0, & \forall s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

$$H(s,1) = \begin{cases} F(2s,1) = x_0, & \forall s \in [0,\frac{1}{2}] \\ G(2s-1,1) = x_0, & \forall s \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Conclusão: $\alpha\dot{\sim}\gamma$. □

**Definição 2.3:** *Em $L(X, x_0)$ definimos o produto dos laços $\alpha$ e $\beta$ pondo*

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \textit{se } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1), & \textit{se } t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Trata-se do laço obtido pela colagem de $\alpha$ e $\beta$ no ponto $x_0$, porém ambos percorridos com o dobro da velocidade original, o laço $\alpha$ primeiro, e o laço $\beta$ depois.

O conjunto quociente $L(X, x_0)/\dot{\sim}$ será denotado $\Pi_1(X, x_0)$, e a classe de equivalência do laço $\alpha$ será denotada por $\langle\alpha\rangle$.

O próximo lema possibilita munir $\Pi_1(X, x_0)$ de uma estrutura de grupo.

**Lema 2.2:** *Se* $\alpha_1 \dot{\sim} \alpha_2$ *e* $\beta_1 \dot{\sim} \beta_2$, *então* $(\alpha_1 * \beta_1) \dot{\sim} (\alpha_2 * \beta_2)$.

*Demonstração.* De fato, se $F(s,t)$ é uma homotopia entre $\alpha_1$ e $\alpha_2$, e $G(s,t)$ é uma homotopia entre $\beta_1$ e $\beta_2$, então a função

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s,2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(s,2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é contínua, e além disso satisfaz:

$$H(0,t) = \begin{cases} F(0,2t) = \alpha_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(0,2t-1) = \beta_1(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \text{ ou seja, } H(0,t) = (\alpha_1 * \beta_1)(t)$$

$$H(1,t) = \begin{cases} F(1,2t) = \alpha_2(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(1,2t-1) = \beta_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \text{ ou seja, } H(1,t) = (\alpha_2 * \beta_2)(t)$$

$$H(s,0) = F(s,0) = x_0, \text{ e } H(s,1) = G(s,1) = x_0,$$

sendo portanto uma homotopia entre $\alpha_1 * \beta_1$ e $\alpha_2 * \beta_2$. □

Dessa forma, dadas as classes $\langle \alpha \rangle$ e $\langle \beta \rangle$ em $\Pi_1(X, x_0)$, fica bem definido o produto $\langle \alpha \rangle * \langle \beta \rangle = \langle \alpha * \beta \rangle$, uma vez que, se $\langle \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_2 \rangle$ e $\langle \beta_1 \rangle = \langle \beta_2 \rangle$, então $\alpha_1 \dot{\sim} \alpha_2$ e $\beta_1 \dot{\sim} \beta_2$, de onde segue do Lema 2 que $(\alpha_1 * \beta_1) \dot{\sim} (\alpha_2 * \beta_2)$, ou seja, $\langle \alpha_1 * \beta_1 \rangle = \langle \alpha_2 * \beta_2 \rangle$.

**Lema 2.3:** $(\Pi_1(X, x_0), *)$ *é um grupo, chamado Grupo Fundamental, ou* $1^{\underline{o}}$ *Grupo de Homotopia do espaço topológico* $X$.

*Demonstração.* Seja $e_{x_0} \in L(X, x_0)$ o laço constante, isto é, $e_{x_0}(t) = x_0$, $\forall t \in [0,1]$. Então

$$\langle e_{x_0} \rangle * \langle \alpha \rangle = \langle \alpha \rangle$$

bastando para isso observar que a função

$$H(s,t) = \begin{cases} e_{x_0}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha\left(\dfrac{2t+s-1}{1+s}\right), & \text{se } \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é uma homotopia entre $e_{x_0} * \alpha$ e $\alpha$. Analogamente, $\langle \alpha \rangle * \langle e_{x_0} \rangle = \langle \alpha \rangle$, ou seja, o elemento neutro $e_{\Pi_1(X,x_0)}$ de $\Pi_1(X, x_0)$ é a classe $\langle e_{x_0} \rangle$.

O inverso da classe $\langle \alpha \rangle$ é a classe $\langle \alpha^{-1} \rangle$, onde $\alpha^{-1}$ é o laço cuja imagem é a mesma do laço $\alpha$, porém percorrido no sentido oposto, isto é, $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$, $\forall t \in [0,1]$. De fato, a função

$$H(s,t) = \begin{cases} x_0, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha(2t+s-1), & \text{se } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha^{-1}\left(\frac{2t-1}{s}\right), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ x_0, & \text{se } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é uma homotopia entre $e_{x_0}$ e $\alpha * \alpha^{-1}$, de onde segue que

$$\langle \alpha \rangle * \langle \alpha^{-1} \rangle = \langle \alpha * \alpha^{-1} \rangle = \langle e_{x_0} \rangle = e_{\Pi_1(X,x_0)}.$$

Finalmente, dados laços $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, todos com ponto base $x_0$, a associatividade da operação $*$ é conseguida exibindo-se uma homotopia entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$, a saber:

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{4t}{s+1}\right), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ \beta(4t-s-1), & \text{se } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma\left(\dfrac{4t-s-2}{2-s}\right), & \text{se } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

**Lema 2.4:** *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre os espaços topológicos $X$ e $Y$, seja $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$. Então a aplicação $f^{\#} : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, y_0)$ definia por $f^{\#}(\langle\alpha\rangle) = \langle f \circ \alpha\rangle$ é um homomorfismo de grupos, chamado homomorfismo induzido por $f$.*

*Demonstração.*

$$f^{\#}(\langle\alpha\rangle * \langle\beta\rangle) = f^{\#}(\langle\alpha * \beta\rangle) = \langle f \circ (\alpha * \beta)\rangle = \langle (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)\rangle = \langle f \circ \alpha\rangle * \langle f \circ \beta\rangle = f^{\#}(\langle\alpha\rangle) * f^{\#}(\langle\beta\rangle).$$

□

**Lema 2.5:** *Dados espaços topológicos $X$, $Y$ e $Z$ temos que:*

*(i) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas, então $(g \circ f)^{\#} = g^{\#} \circ f^{\#}$.*

*(ii) $(Id_X)^{\#} = Id_{\Pi_1(X,x_0)}$.*

*Demonstração.* **(i)** $(g \circ f)^{\#}(\langle\alpha\rangle) = \langle (g \circ f) \circ \alpha\rangle = \langle g \circ (f \circ \alpha)\rangle = g^{\#}(f^{\#}(\langle\alpha\rangle)) = (g^{\#} \circ f^{\#})(\langle\alpha\rangle)$;

**(ii)** $(Id_X)^{\#}(\langle\alpha\rangle) = \langle Id_X \circ \alpha\rangle = \langle\alpha\rangle = Id_{\Pi_1(X,x_0)}(\langle\alpha\rangle)$.

□

**Lema 2.6:** *Se $X$ é conexo por caminhos, então os grupos $\Pi_1(X, x_0)$ e $\Pi_1(X, x_1)$ são isomorfos, quaisquer que sejam os pontos $x_0, x_1 \in X$.*

*Demonstração.* Sejam $x_0, x_1 \in X$. Como $X$ é conexo por caminhos, existe um caminho $\gamma$ de $x_0$ a $x_1$.
Defina $\gamma_{\#} : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(X, x_1)$, tal que $\gamma_{\#}(\langle\alpha\rangle) = \langle\gamma\rangle^{-1}\langle\alpha\rangle\langle\gamma\rangle$. Daí,

$$\gamma_{\#}(\langle\beta\rangle\langle\alpha\rangle) = \gamma_{\#}(\langle\beta\alpha\rangle) = \langle\gamma\rangle^{-1}\langle\beta\alpha\rangle\langle\gamma\rangle = \langle\gamma^{-1}\beta\alpha\gamma\rangle =$$

$$\langle\gamma^{-1}\beta(\gamma\gamma^{-1})\alpha\gamma\rangle = (\langle\gamma\rangle^{-1}\langle\beta\rangle\langle\gamma\rangle)(\langle\gamma\rangle^{-1}\langle\alpha\rangle\langle\gamma\rangle) = \gamma_{\#}(\langle\beta\rangle)\gamma_{\#}(\langle\alpha\rangle),$$

para todos $\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle \in \Pi_1(X, x_0)$. Agora, considere

$$(\gamma^{-1})_{\#}(\langle\alpha\rangle) = \langle\gamma\alpha\gamma^{-1}\rangle.$$

Assim, dado $\langle\delta\rangle \in \Pi_1(X, x_0)$ temos que,

$$((\gamma^{-1})_{\#} \circ \gamma_{\#})(\langle\delta\rangle) = (\gamma^{-1})_{\#}(\gamma_{\#}(\langle\delta\rangle)) = (\gamma^{-1})_{\#}(\langle\gamma^{-1}\delta\gamma\rangle) = \langle\gamma\gamma^{-1}\delta\gamma\gamma^{-1}\rangle = \langle\delta\rangle = Id_{\Pi_1(X,x_0)}(\langle\delta\rangle).$$

Portanto, $\gamma_{\#}$ é um isomorfismo de grupos de $\Pi_1(X, x_0)$ em $\Pi_1(X, x_1)$.

□

Dessa forma, para espaços topológicos que são conexos por caminhos, não há necessidade de explicitar o ponto base $x_0$. Para tais espaços podemos denotar o grupo fundamental simplesmente por $\Pi_1(X)$.

Se $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e se $x_0 = (0, 0)$, então é fácil ver que $H(s, t) = (1-s)\alpha(t)+sx_0$ é uma homotopia entre o laço $\alpha$ e o laço $e_{x_0}$, ou seja, o grupo fundamental do disco unitário do espaço $\mathbb{R}^2$ é trivial. Bastante técnica, entretanto, é a prova do lema abaixo, que caracteriza o grupo fundamental do círculo unitário $S^1$, a menos de isomorfismo de grupo. O leitor interessado poderá consultar a referência [2], à página 76.

**Lema 2.7:** *Se $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, então $\Pi_1(S^1)$ é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros, isto é, $\Pi_1(S^1) \approx (\mathbb{Z}, +)$.*

Já estamos preparados para demonstrar um importante Teorema de Ponto Fixo.

**Teorema 2.1** (Teorema do Ponto Fixo de Brower): *Se $f : D^2 \to D^2$ é contínua, então existe $x_0 \in D^2$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

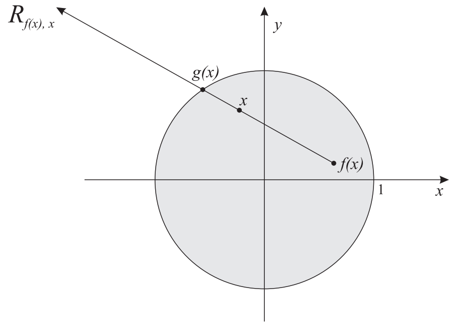


**FIGURA 2:** semirreta $R_{f(x),x}$

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que $f(x) \neq x$, $\forall x \in D^2$. Defina $g : D^2 \to S^1$ pondo

$$g(x) = S^1 \cap R_{f(x),x}$$

onde $R_{f(x),x}$ é a semirreta com origem $f(x)$, passando pelo ponto $x$.

Analiticamente, temos que,

$$g(x) = f(x) + \left[ \frac{\sqrt{\langle f(x), x - f(x)\rangle^2 - \|x - f(x)\|^2 \|f(x)\|^2} - \langle f(x), x - f(x)\rangle}{\|x - f(x)\|^2} \right] (x - f(x))$$

cuja continuidade segue da continuidade de $f$.

Pela própria definição, $g(x) = x$, $\forall x \in S^1$. Portanto, $g|_{S^1} = id_{S^1}$.

Agora, seja $i : S^1 \to D^2$ a operação de inclusão e seja $t \in S^1$, temos que,

$$(g \circ i)(t) = g(i(t)) = g(t) = t = id_{S^1}(t)$$

Logo, $g \circ i = id_{S^1}$.

Assim, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "id_{S^1}"'] & D^2 \arrow[d, "g"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

Passando aos homomorfismos induzidos obtemos:

$$\begin{tikzcd} \Pi_1(S^1) \arrow[r, hook, "i^{\#}"] \arrow[dr, "(g \circ i)^{\#}"'] & \Pi_1(D^2) \arrow[d, "g^{\#}"] \\ & \Pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

como $\Pi_1(S^1)$ é o grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$ e como $\Pi_1(D^2, 0) = \{\langle e_0 \rangle\}$ temos que

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{Z}, +) \arrow[r, hook, "i^{\#}"] \arrow[dr, "id_{\mathbb{Z}}"'] & \{e\} \arrow[d, "g^{\#}"] \\ & (\mathbb{Z}, +) \end{tikzcd}$$

Agora, seja $a \in (\mathbb{Z}, +)$, tal que $a \neq 0$, daí $(g^{\#} \circ i^{\#})(a) = id_{\mathbb{Z}}(a) = a$. Por outro lado, temos que, $(g^{\#} \circ i^{\#})(a) = g^{\#}(i^{\#}(a)) = g^{\#}(e) = 0$, o que é um absurdo.

□

**Corolário 2.1:** *Se $X$ é um espaço topológico homeomorfo ao disco unitário $D^2$ e $f : X \to X$ é contínua, então existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) = x_1$.*

*Demonstração.* Seja $\varphi : X \to D^2$ um homeomorfismo. Então $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : D^2 \to D^2$ é contínua, de onde segue, pelo Teorema de Brower, que existe $x_0 \in D^2$ tal que $(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_0) = x_0$. Mas então temos também que $f(\varphi^{-1}(x_0)) = \varphi^{-1}(x_0)$, ou seja, $x_1 = \varphi^{-1}(x_0)$ é ponto fixo de $f$. □

## 3 SOLUÇÃO PERIÓDICA VIA PONTO FIXO

Uma questão abordada com frequência na teoria das equações diferenciais ordinárias diz respeito à existência de soluções $T$-periódicas de (2), ou seja, soluções satisfazendo $X(t+T) = X(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. A Figura 3 abaixo ilustra uma solução periódica do sistema não-linear

$$\begin{cases} x_1' = 1.0x_1 - 0.8x_1x_2 \\ x_2' = 0.3x_1x_2 - 0.5x_2 \end{cases}, \tag{4}$$

e também o campo vetorial $F(x_1, x_2) = (x_1 - 0.8x_1x_2, 0.3x_1x_2 - 0.5x_2)$ no retângulo $0 \leq x_1 \leq 3.5$, $0 \leq x_2 \leq 2$. Neste sistema, $x_1$ e $x_2$ são as populações de duas espécies, uma presa e a outra predadora, respectivamente, e as equações (4) modelam a interação entre tais espécies. Para detalhes sobre a modelagem matemática do sistema predador-presa o leitor poderá consultar a referência [3].

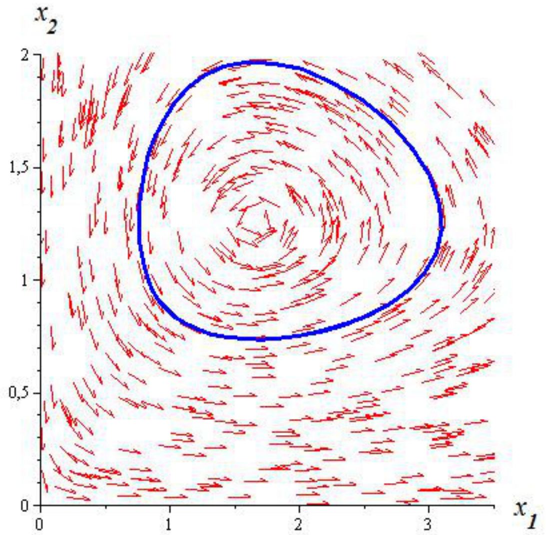


**FIGURA 3:** Solução periódica

Observe que, se existir uma condição inicial $X_0$ tal que $X(T, X_0) = X_0$, então esta solução $t \mapsto X(t, X_0)$ será $T$-periódica, graças à propriedade de unicidade das soluções. Sendo assim, a existência de solução $T$-periódica poderá ser vista como um problema de existência de ponto fixo para a chamada *Aplicação de Poincaré* $P_T$. Tal aplicação $P_T : D \to D$ é definida da seguinte maneira:

$$P_T(X_0) = X(T, X_0),$$

sendo $X(t, X_0)$ a única solução de (3).

Muita teoria relacionada com pontos fixos já foi desenvolvida, algumas utilizando argumentos analíticos, outras argumentos algébrico-topológicos. Nosso objetivo neste trabalho é utilizar a segunda metodologia para mostrar que a aplicação de Poincaré associada a uma classe de sistemas do tipo (2) possui ponto fixo, o que renderá a existência de solução periódica.

Para enunciarmos o resultado principal deste artigo precisaremos da seguinte definição:

**Definição 3.1:** *Diremos que um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ satisfaz a propriedade $(P)$ se, para cada $(a,b) \in \partial\Omega$, existir uma bola aberta $U_{(a,b)}$ centrada em $(a,b)$ tal que*

$$\text{dist}((x,y);\partial\Omega) = \text{dist}((x,y);U_{(a,b)} \cap \partial\Omega).$$

**Teorema 3.1:** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto cujo fecho é homeomorfo ao disco $D^2$, e cuja fronteira (de classe $C^2$) satisfaz a propriedade $(P)$. Seja $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial Lipschitziano satisfazendo a seguinte condição de transversalidade na fronteira:*

$$\vec{F}(x,y) \cdot \vec{n}(x,y) < 0, \ \forall (x,y) \in \partial\Omega, \tag{5}$$

*onde o ponto indica o produto escalar usual de vetores em $\mathbb{R}^2$, e $\vec{n}(x,y)$ é a normal unitária exterior a $\Omega$. Então, dado qualquer $T > 0$, o sistema de equações diferenciais ordinárias*

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \quad\vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

*admite solução $T$-periódica inteiramente contida em $\Omega$.*

A figura 4 ilustra a condição de transversalidade na fronteira. Como $\vec{n}(X)$ é a normal unitária exterior, a condição (5) nos diz que $\vec{F}(X)$ aponta “para o interior de $\Omega$” quando $X \in \partial\Omega$.

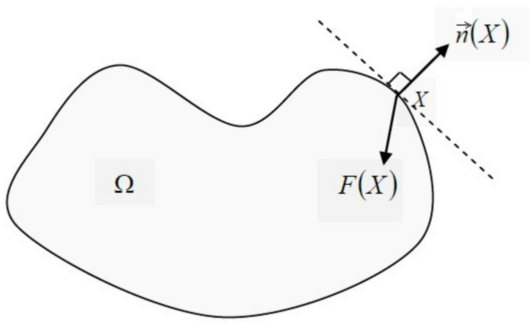


**FIGURA 4:** Transversalidade na fronteira

Para a demonstração do Teorema necessitaremos do seguinte lema.

**Lema 3.1:** *Seja $\Omega$ como no enunciado do Teorema anterior, e $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\delta(x,y) := \begin{cases} -[\text{dist}((x,y);\partial\Omega)]^2, & \textit{se } (x,y) \in \Omega \\ \ \ [\text{dist}((x,y);\partial\Omega)]^2, & \textit{se } (x,y) \notin \Omega \end{cases}.$$

*Então:*

$(i)$ $\delta(x,y) < 0$, $\forall (x,y) \in \text{int}(\Omega)$;

$(ii)$ $\delta(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in \partial(\Omega)$;

$(iii)$ $\delta(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \notin \overline{\Omega}$;

$(iv)$ *$\delta$ é de classe $C^1$ em uma vizinhança aberta de qualquer ponto $(a,b) \in \partial(\Omega)$. Mais ainda, nesta vizinhança aberta temos que $\nabla\delta(x,y) = \lambda(x,y) \cdot \vec{n}(x,y)$, onde $\lambda$ é uma função positiva.*

*Demonstração.* As condições $(i)$, $(ii)$ e $(iii)$ são imediatas. Provemos a diferenciabilidade de $\delta$ numa vizinhança do ponto $(a,b) \in \partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ é de classe $C^2$, existe uma bola aberta $U_{(a,b)}$ de $\mathbb{R}^2$ centrada em $(a,b)$ e uma função $\varphi : (-\sigma,\sigma) \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ tal que $U_{(a,b)} \cap \partial\Omega$ é o gráfico de $\varphi$. Precisamente:

$$U_{(a,b)} \cap \partial\Omega = \{(u,v) \mid u \in (-\sigma,\sigma) \text{ e } v = \varphi(u)\}.$$

Como $\partial\Omega$ satisfaz a propriedade $(P)$ podemos, se necessário for, diminuir o raio da bola $U_{(a,b)}$ para que tenhamos também a propriedade

$$\text{dist}((x,y);\partial\Omega) = \text{dist}((x,y);U_{(a,b)} \cap \partial\Omega).$$

Vamos provar que a restrição de $\delta$ no aberto $U_{(a,b)}$ é de classe $C^1$. Ora, mas para $(x,y) \in U_{(a,b)}$ temos, pela propriedade $(P)$, que

$$[\text{dist}((x,y);\partial\Omega)]^2 = \left[\text{dist}((x,y);U_{(a,b)} \cap \partial\Omega)\right]^2 = \min\{(x-u)^2 + (y-v)^2 \mid \Phi(u,v) = 0\},$$

onde $\Phi(u,v) = \varphi(u) - v$, pois em $U_{(a,b)}$ a fronteira de $\Omega$ tem equação $v = \varphi(u)$. Assim, pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, o ponto $(u_0,v_0)$ que minimiza a distância de $(x,y)$ até $\partial\Omega$, ou seja, o ponto $(u_0,v_0)$ tal que

$$\left[\text{dist}((x,y);U_{(a,b)} \cap \partial\Omega)\right]^2 = (x-u_0)^2 + (y-v_0)^2$$

deve satisfazer

$$\begin{cases} \nabla\left[(x-u)^2 + (y-v)^2\right]|_{(u_0,v_0)} = \lambda \cdot \nabla\Phi|_{(u_0,v_0)} \\ v_0 = \varphi(u_0) \end{cases} \tag{6}$$

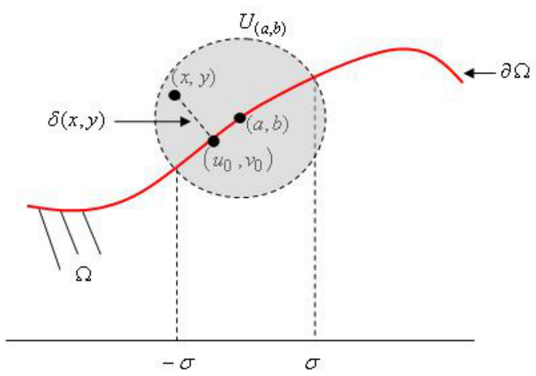


**FIGURA 5:** Forma Local de $\partial\Omega$

De (6) obtemos que:

$$v_0 = \varphi(u_0) \tag{7}$$

$$2 \cdot (x - u_0) = \lambda \cdot \varphi'(u_0) \tag{8}$$

$$2 \cdot (y - v_0) = -\lambda. \tag{9}$$

Substituindo (7) e (9) em (8) e efetuando as simplificações obtemos que

$$(x-u_0) + [y - \varphi(u_0)] \cdot \varphi'(u_0) = 0.$$

Assim:

$$\eta(x,y,u_0) = 0, \text{ identicamente para } (x,y) \in U_{(a,b)}, \tag{10}$$

onde $\eta(x,y,u_0) = (x-u_0) + [y-\varphi(u_0)]\cdot\varphi'(u_0)$, a qual é de classe $C^1$ em $(x,y,u_0)$, já que $\varphi$ é, por hipótese, de classe $C^2$.

Afirmação: $\dfrac{\partial\eta}{\partial u_0}(x,y,u_0) \neq 0$.

Prova da afirmação: Se, por absurdo, tivéssemos $\dfrac{\partial\eta}{\partial u_0}(x,y,u_0) = 0$, então

$$\varphi''(u_0)\cdot[y-\varphi(u_0)] = 1 + \left[\varphi'(u_0)\right]^2, \tag{11}$$

o que é uma contradição, pois o segundo membro de (11) é sempre positivo, enquanto que o primeiro membro pode assumir valor positivo ou negativo, dependendo do sinal de $\varphi''(u_0)$ e do fato de $y$ ser maior ou menor do que $\varphi(u_0)$, isto é, dependendo do ponto $(x,y)$ estar fora ou dentro de $\Omega$.

Assim, graças à afirmação anterior, segue do Teorema da Função Implícita que a equação (10) define implicitamente $u_0$ como uma função de classe $C^1$ das variáveis $x, y$, isto é, $u_0 = \beta(x,y)$ para certa função real $\beta$ de classe $C^1$. Assim,

$$\text{dist}((x,y); U_{(a,b)}\cap\partial\Omega) = \left((x-\beta(x,y))^2 + (y-\varphi(\beta(x,y)))^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Conclusão: $\delta$ é uma função de classe $C^1$ na vizinhança aberta $U_{(a,b)}$, pois nesta vizinhança a expressão de $\left[\text{dist}\left((x,y); U_{(a,b)}\cap\partial\Omega\right)\right]^2$ é a composição de funções de classe $C^1$ que podemos ver no segundo membro de (12).

Para finalizar a prova do Lema 8, resta mostrar que grad$\delta(x,y) = \lambda(x,y)\vec{n}(x,y)$, para certa função real positiva $\lambda(x,y)$. Ora, mas isto é imediato, pois como $\partial\Omega$ é a curva de nível zero da função $\delta$, então $\delta$ é normal a $\partial\Omega$ em qualquer de seus pontos $(x,y)$. Em particular, grad$\delta(x,y)$ e $\vec{n}(x,y)$ são múltiplos. Mais ainda, como $\delta$ cresce na direção e sentido da normal exterior a $\Omega$ (pela própria definição de $\delta$), então grad$\delta(x,y)$ e $\vec{n}(x,y)$ tem ambos o mesmo sentido, ou seja, existirá um escalar positivo $\lambda(x,y)$ tal que grad$\delta(x,y) = \lambda(x,y)\vec{n}(x,y)$, como afirmado. A prova do Lema 8 está completa. $\square$

A figura 6 ilustra uma vizinhança aberta da fronteira de $\Omega$, e a figura 7 ilustra o esboço de um pedaço do gráfico de $\delta$ nesta vizinhança $V_\varepsilon$. Na figura 7 a fronteira de $\Omega$ esta ilustrada na cor verde.

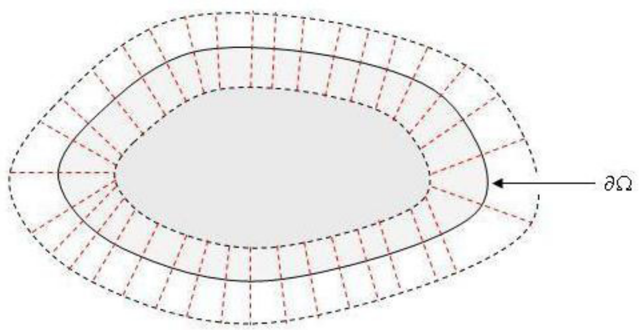


**FIGURA 6:** Vizinhança aberta de $\partial\Omega$

*Prova do Teorema.* Seja $X_0 \in \Omega$, e $t \mapsto X(t,X_0)$ a única solução de $X'(t) = F(X(t))$ satisfazendo $X(0,X_0) = X_0$. Vamos provar que $X(t,X_0) \in \Omega$, $\forall t > 0$. Suponha, por absurdo, que exista $\tau > 0$ de modo que $X(\tau,X_0) \notin \Omega$.

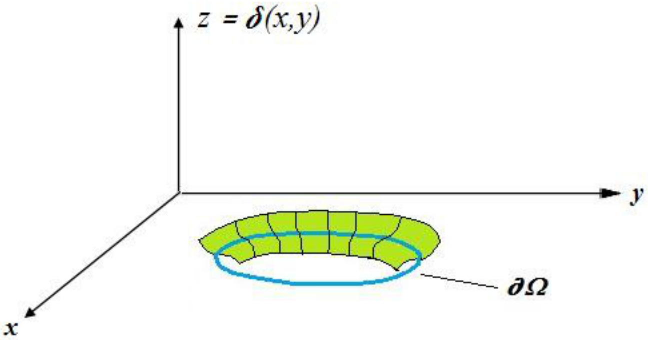


**FIGURA 7:** Parte do gráfico de $\delta$ na vizinhança $V_\varepsilon$

Seja $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \delta(X(t, X_0))$. Então $g$ é contínua por ser composição de funções contínuas. Além disso:

$$g(0) = \delta(X(0, X_0)) = \delta(X_0) < 0, \text{ pois } X_0 \in \Omega;$$

$$g(\tau) = \delta(X(\tau, X_0)) > 0, \text{ pois } X(\tau, X_0) \notin \Omega.$$

Da continuidade de $g$ segue que existe $\tau^* \in (0, \tau)$ de modo que $g(\tau^*) = 0$.

Dessa forma, temos por um lado que

$$g'(\tau^*) = \text{grad}\delta(X(\tau^*, X_0)) \cdot X'(\tau^*, X_0) = \text{grad}\delta(X(\tau^*, X_0)) \cdot \vec{F}(X(\tau^*, X_0)), \tag{13}$$

e que devido à propriedade $(iv)$ do Lema 8, pode ser ainda escrita como

$$g'(\tau^*) = \lambda(X(\tau^*, X_0)) \cdot \vec{n}(X(\tau^*, X_0)) \cdot \vec{F}(X(\tau^*, X_0)). \tag{14}$$

Como a solução está deixando $\Omega$ no instante $\tau^*$, então a função $g(t)$ é não-decrescente numa vizinhança aberta de $\tau^*$, de onde segue que $g'(\tau^*) \geq 0$. Logo, o segundo membro de (14) também deve ser maior ou igual a zero. Ora, mas como $\lambda(X(\tau^*, X_0)) > 0$, então $\vec{n}(X(\tau^*, X_0)) \cdot \vec{F}(X(\tau^*, X_0)) \geq 0$, contradizendo a condição de transversalidade (5).

Conclusão: $X(t, X_0) \in \Omega$, $\forall t > 0$.

Assim, qualquer que seja $\tau > 0$, o domínio $\Omega$ é invariante pela aplicação de Poincaré $P_T : \Omega \to \mathbb{R}^2$. Pelo Corolário do Teorema de Brower segue que $P_T$ tem ponto fixo $X_0 \in \Omega$, ou seja, existirá uma solução periódica inteiramente contida em $\Omega$. □

Como aplicação, seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^k$, com $k > 1$, e consideremos a seguinte classe de sistemas de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1 \cdot \text{sen}\left[g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right] - x_2 \cdot \cos\left[g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right] \\ x_2'(t) = -x_1 \cdot \cos\left[g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right] - x_2 \cdot \text{sen}\left[g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right] \end{cases} \tag{15}$$

A título de exemplo, suponhamos que $g(r) = -\frac{1}{2}r^3 + 3r^2 - 4r$, e que $\Omega$ é a bola aberta de raio 3, centrada na origem do plano cartesiano $x_1Ox_2$. Então o fecho de $\Omega$ é obviamente homeomorfo ao disco $D^2$, e sua fronteira satisfaz a propriedade $(P)$.

Para provarmos a condição de transversalidade na fronteira observe que, chamando $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, temos $\vec{F}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(g(r)) & -\cos(g(r)) \\ \cos(g(r)) & -\text{sen}(g(r)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, e $\vec{n}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Assim, para pontos $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \partial\Omega$ temos que

$$\vec{F}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{n}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \cdot \text{sen}(g(3)) - x_2 \cdot \cos(g(3)) \\ x_1 \cdot \cos(g(3)) - x_2 \cdot \text{sen}(g(3)) \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right).$$

Efetuando o produto escalar acima obtemos

$$\vec{F}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{n}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \text{sen}(g(3)) \cdot (x_1^2 + x_2^2) < 0.$$

Pelo Teorema provado segue que existe uma condição inicial $X_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $X(T, X_0) = X_0$, ou seja, o sistema (15) admite solução $T$-periódica contida em $\overline{\Omega}$.

Convém observar que o teorema nada garante sobre multiplicidade de soluções periódicas. Não se exclui, portanto, a possibilidade da solução periódica do exemplo acima ser a solução trivial. Se o campo $\vec{F}$ no enunciado do teorema não possuir zeros em $\overline{\Omega}$, então qualquer solução periódica contida em $\overline{\Omega}$ será não-trivial. Esta condição, entretanto, é apenas suficiente para a existência de soluções periódicas não-triviais, mas não necessária. De fato, no exemplo dado temos $\vec{F}(0) = 0$, mas a solução $X(t) = (2\cos(t), 2\text{sen}(t))$ é periódica e não-trivial. Na figura 8 abaixo vemos esta solução periódica em azul, a fronteira de $\Omega$ na cor preta, e duas outras soluções, uma na cor verde começando no ponto $(1.75, 2.35)$, outra na cor vermelha começando no ponto $(-0.2, -0.2)$, e também o campo vetorial associado a (15). A figura sugere que qualquer solução começando num ponto distinto da origem em $t = 0$ aproxima-se da solução periódica quando $t \to \infty$. Isto é realmente verdade, mas não será objeto da nossa preocupação nesse texto.

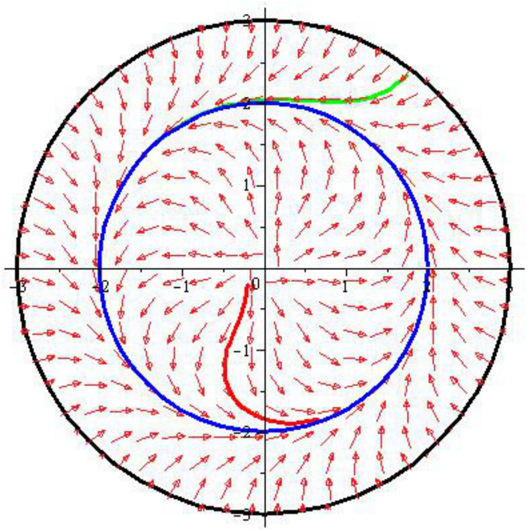

**FIGURA 8:** Algumas soluções de (15)

## REFERÊNCIAS

[1] S. Smale and M. Hirsch, *Dynamical Systems, Differential Equations and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.

[2] I. M. Singer and J. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1967.

[3] R. Bassanezzi and W. C. Ferreira, *Equações Diferenciais com Aplicações*. Harbra, 1988.