A MEDIDA DE LEBESGUE E O CONJUNTO DE CANTOR

Elis Coimbra de Moura
Universidade Federal de Uberlândia
coimbrademouraelis@yahoo.com

Elisa Regina dos Santos
Universidade Federal de Uberlândia
elisars@ufu.br

RESUMO

Apresentaremos neste trabalho a construção da medida de Lebesgue e um exemplo clássico de um conjunto não enumerável com medida de Lebesgue zero. Para tanto, iniciaremos por algumas preliminares sobre classes de conjuntos, em seguida exibiremos alguns resultados necessários para a construção da medida de Lebesgue e, por fim, definiremos o conjunto de Cantor e mostraremos que este possui medida de Lebesgue zero.

ABSTRACT

We will present in this work the construction of the Lebesgue measure and a classic example of an uncountable set with zero Lebesgue measure. To do so, we will start with some preliminaries about classes of sets, then in the following, we will show some results which are necessary for the construction of the Lebesgue measure, and finally, we will define the Cantor set and show that it has zero Lebesgue measure.

Palavras-chave: classes de conjuntos, medida de Lebesgue, conjunto de Cantor.

1 INTRODUÇÃO

A Teoria de Medida e Integração tem um papel essencial dentro da Análise Matemática Moderna. Essa teoria teve grandes contribuições entre o final do século XIX e o início do século XX, quando a teoria de integração de Riemann foi ampliada pela teoria de integração de Lebesgue.

Na segunda metade do século XIX, o grande instrumento para medida de grandezas era a integral formulada pelo matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866), cuja versão moderna foi finalizada por Gaston Darboux (1842-1917), que demonstrou que uma função é integrável quando as somas superior e inferior de Riemann convergem para o mesmo valor à medida que os comprimentos dos subintervalos tendem a zero para qualquer partição usada. Esta teoria, entretanto, contém certos inconvenientes que a tornam inadequada ao estudo de vários problemas da Análise Matemática.

Foi em 1902 que o matemático francês Henri Léon Lebesgue (1875-1941) revolucionou a Análise Matemática apresentando uma nova noção de integral que generaliza a integral de Riemann e possibilita o cálculo de integrais de certas funções que não são Riemann integráveis. Esse novo conceito de integral permitiu resolver, num período de poucos anos, alguns dos problemas fundamentais da Teoria da Integração que estavam em aberto: problemas de séries de Fourier (o Teorema de Fischer-Riesz), teoremas de convergência de integrais, condições da iteração de integrais (o Teorema de Fubini), entre outros. Além disso, a integral de Lebesgue deu um impulso decisivo à Análise Funcional e às Teorias das Equações Diferenciais e Integrais.

O ponto básico dessa nova teoria foi a introdução da noção de medida, estendendo as clássicas noções de comprimento, área, volume etc. Desenvolveu-se então a Teoria da Medida e a Teoria das Funções Mensuráveis.

O conjunto de Cantor é um subconjunto de pontos do intervalo $[0, 1]$ que possui propriedades muito interessantes. Este conjunto foi descoberto em 1874 por Henry John Stephen Smith e introduzido pelo matemático alemão Georg Cantor em 1883. Através da consideração deste conjunto, Cantor e outros contribuíram com o estabelecimento das bases da Topologia Geral.

Uma das interessantes propriedades que o conjunto de Cantor possui é o fato de ser um conjunto não enumerável com medida de Lebesgue zero, a qual destacaremos no final do texto.

2 CLASSES DE CONJUNTOS

Nesta seção serão introduzidas as definições principais para a compreensão do conceito de medida que será apresentado na próxima seção. Utilizamos a referência [1] como principal fonte de estudo dos conceitos apresentados a seguir.

Seja Ω um conjunto não vazio e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ uma classe não vazia de subconjuntos de Ω, onde $\mathcal{P}(\Omega)$ denota o conjunto das partes de Ω.

Definição 2.1: *A classe $\mathcal{S}$ é dita um* ***semianel*** *se satisfaz as seguintes condições:*

i) Se $A, B \in \mathcal{S}$ então $A \cap B \in \mathcal{S}$;

ii) Se $A, B \in \mathcal{S}$ então $A - B = \sum_{i=1}^{n} C_i$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e para alguns $C_i \in \mathcal{S}$, onde $1 \leq i \leq n$ (o sinal Σ indica união disjunta e será chamado de soma). Disto decorre que $\varnothing \in \mathcal{S}$.

Definição 2.2: *A classe $\mathcal{S}$ é dita uma* ***semiálgebra*** *se é um semianel e $\Omega \in \mathcal{S}$.*

Exemplo 2.1: *Sejam $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{S} = \{(a, b], (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, +\infty) : \ a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. Então $\mathcal{S}$ é semianel e semiálgebra.*

Seja agora $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ uma classe não vazia de subconjuntos de Ω.

Proposição 2.1: *As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) A classe $\mathbb{F}$ é fechada em relação a união finita e diferença.

ii) A classe $\mathbb{F}$ é fechada em relação a união finita e diferença própria.

iii) A classe $\mathbb{F}$ é fechada em relação a diferença simétrica e intersecção finita.

iv) A classe $\mathbb{F}$ é fechada em relação a união finita disjunta, diferença própria e intersecção finita.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Trivial.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sejam $A, B \in \mathbb{F}$. Observe que $A - B = (A \cup B) - B$ e $B - A = (B \cup A) - A$, ou seja, tais diferenças podem ser vistas como diferenças próprias. Como $\mathbb{F}$ é fechada para união finita e diferença própria, segue que $A - B$ e $B - A \in \mathbb{F}$. Utilizando mais uma vez que $\mathbb{F}$ é fechada para união finita, obtemos que a diferença simétrica $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) \in \mathbb{F}$.

Para mostrarmos que $\mathbb{F}$ é fechada em relação a intersecção finita, basta observarmos que

$$A \cap B = (A \cup B) - (A \triangle B).$$

Como $\mathbb{F}$ é fechada para união finita, diferença e diferença simétrica, podemos afirmar que $A \cap B \in \mathbb{F}$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Mostremos primeiro que $\mathbb{F}$ é fechada para diferença própria. Seja $B \subseteq A$ em $\mathbb{F}$. Então $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = A - B$. Logo, $(A - B) \in \mathbb{F}$, pois $\mathbb{F}$ é fechada em relação a diferença simétrica.

Agora mostremos que $\mathbb{F}$ é fechada em relação a união finita disjunta. Sejam $A, B \in \mathbb{F}$ tais que $A \cap B = \varnothing$. Observe que

$$A \cup B = A \triangle B \in \mathbb{F}.$$

$(iv) \Rightarrow (i)$ Basta observarmos que $A \cup B = (A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B)) \cup (A \cap B) \in \mathbb{F}$, pois $\mathbb{F}$ é fechada para diferença própria e união finita disjunta. Além disso,

$$A - B = ((A \cup B) - B) \in \mathbb{F},$$

pois $\mathbb{F}$ é fechada para diferença própria.

□

Definição 2.3: *A classe $\mathbb{F}$ é dita um **anel** se satisfaz alguma das condições da Proposição 2.1 (e consequentemente as outras quatro). E $\mathbb{F}$ é **álgebra** se é anel e $\Omega \in \mathbb{F}$.*

Não é difícil provar que $\mathbb{F}$ é álgebra se, e somente se, é fechada com relação a união finita e complementação de conjuntos, e $\Omega \in \mathbb{F}$.

A interseção de uma família qualquer de anéis é um anel. Portanto, dada uma classe não vazia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω, podemos definir o **anel gerado por** $\mathcal{C}$ como o menor anel que contém $\mathcal{C}$, que coincide com a interseção de todos os anéis que contêm $\mathcal{C}$. Podemos também considerar esta definição com álgebra no lugar de anel.

Proposição 2.2: *Se $\mathbb{S}$ é um semianel (resp. semiálgebra), então a família $R(\mathbb{S})$ das uniões finitas disjuntas de elementos de $\mathbb{S}$ é um anel (resp. álgebra) e coincide com o anel (resp. álgebra) gerado por $\mathbb{S}$.*

Demonstração. Provaremos apenas para anel, pois para álgebra utiliza-se o mesmo raciocínio. Vendo que $R(\mathbb{S})$ é um anel provaremos uma das inclusões. A outra inclusão é imediata.

Vamos utilizar o item (4) da Proposição 2.1.

Por definição, $R(\mathbb{S})$ é fechado por união finita disjunta. Para verificarmos que é fechado em relação à intersecção finita, basta observarmos a seguinte igualdade

$$\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\right) \bigcap \left(\sum_{j=1}^{m} B_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(C_i \cap B_j)$$

e o fato de que $\mathbb{S}$ é fechado por intersecção finita.

Vamos mostrar agora que $R(\mathbb{S})$ é fechado por diferença própria. Sejam $\sum_{i=1}^{n} C_i$, $\sum_{j=1}^{m} B_j$ com $C_i, B_j \in \mathbb{S}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m} B_j \subseteq \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

Então

$$\sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{j=1}^{m} B_j = \sum_{i=1}^{n}\left(C_i - \sum_{j=1}^{m} B_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(C_i - \sum_{j=1}^{m}(B_j \cap C_i)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\bigcap_{j=1}^{m}(C_i - (B_j \cap C_i))\right).$$

Como $B_j \cap C_i \in \mathbb{S}$, $C_i - (Bj \cap C_i)$ é uma soma finita de elementos de $\mathbb{S}$, ou seja, um elemento de $R(\mathbb{S})$. Agora basta usar o fato de que $R(\mathbb{S})$ é fechado com relação à soma finita. □

Exemplo 2.2: *Seja $\mathbb{F}$ a família das uniões finitas disjuntas de conjuntos da forma $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$. Então $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$, pelo Exemplo 2.1 e pela proposição anterior.*

Seja agora $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ uma classe não vazia de subconjuntos de Ω.

Definição 2.4: *A classe $\mathcal{A}$ é dita um σ-**anel** se é fechada por diferença e por união enumerável de conjuntos. Se $\mathcal{A}$ é σ-anel e $\Omega \in \mathcal{A}$, chamaremos $\mathcal{A}$ de σ-**álgebra**.*

Proposição 2.3: *A classe $\mathcal{A}$ é σ-**anel** se, e somente se, é fechada por intersecção finita, diferença própria e soma enumerável (isto é, união enumerável disjunta).*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{A}$ seja σ-anel. Como $\mathcal{A} \neq \varnothing$ e é fechado por diferença, temos que $\varnothing = A - A \in \mathcal{A}$, para $A \in \mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}$ é fechado por união finita, pois toda união finita é igual a uma união enumerável, onde todos os conjuntos, menos um número finito, são o vazio. Então $\mathcal{A}$ é anel, e portanto fechado por interseção finita. Além disso $\mathcal{A}$ é fechado por soma enumerável pela definição de σ-anel.

Agora para provarmos o outro lado da implicação, suponhamos que $\mathcal{A}$ seja fechado por interseção finita, diferença própria e soma enumerável. Exatamente como na parte anterior, prova-se que $\varnothing \in \mathcal{A}$, e como ele é fechado por soma enumerável, é fechado por soma finita. Então $\mathcal{A}$ é anel. Agora para provar que $\mathcal{A}$ é fechado por união enumerável basta utilizarmos a igualdade

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right).$$

□

Proposição 2.4: *Todo σ-anel é fechado por intersecção enumerável.*

Demonstração. Para provarmos esta proposição basta utilizarmos a igualdade

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 - \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 - A_i).$$

□

Proposição 2.5: *A classe $\mathcal{A}$ é σ-álgebra se, e somente se, é fechada por união enumerável e complementação.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de Ω. Então $\Omega \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é fechada por diferença e união enumerável. Precisamos provar que $\mathcal{A}$ é fechada por complementação. Seja $A \in \mathcal{A}$. Observe que

$$A^c = \Omega - A \in \mathcal{A},$$

já que $\Omega \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é fechada por diferença.

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{A}$ uma classe de conjuntos de Ω fechada por união enumerável e complementação. Mostremos que $\mathcal{A}$ é fechada por diferença. Sejam $A, B \in \mathcal{A}$. Observe que $A - B = (A^c \cup B)^c$. Logo, $A - B \in \mathcal{A}$. Para verificarmos que $\Omega \in \mathcal{A}$, basta notarmos que dado $A \in \mathcal{A}$ qualquer, temos $\Omega = A \cup (A^c)$. Logo, $\Omega \in \mathcal{A}$. □

A interseção de uma família qualquer de σ-anéis é um σ-anel. Portanto, dada uma classe não vazia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω, podemos definir o **σ-anel gerado por** $\mathcal{C}$ como o menor σ-anel que contém $\mathcal{C}$, que coincide com a interseção de todos os σ-anéis que contêm $\mathcal{C}$. Podemos também considerar esta definição para σ-álgebra. Adotaremos o símbolo $\sigma(\mathcal{C})$ ($\tilde{\sigma}(\mathcal{C})$) para denotar a σ-álgebra (σ-anel) gerada(o) pela família de conjuntos $\mathcal{C}$.

Com os resultados e definições desta seção pode-se introduzir o conceito de medida e, em particular, a medida de Lebesgue.

3 MEDIDA E EXTENSÃO DE MEDIDA

Seja Ω um conjunto não vazio e $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Definição 3.1: *Uma função $\mu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ é chamada uma* ***função de conjunto****.*

Exemplo 3.1: *Definimos o comprimento de um intervalo semiaberto $(a, b]$ como o número real $b-a$ e o comprimento de um intervalo da forma $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ ou $(-\infty, +\infty)$ pelo número estendido $+\infty$. Além disso, definimos o comprimento de uma união finita de conjuntos disjuntos dessas formas pela soma dos comprimentos correspondentes. Em particular, o comprimento de $\sum_{j=1}^{n}(a_j, b_j]$ é $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$. Dessa forma, o* ***comprimento*** *é uma função de conjunto sobre a família $\mathbb{F}$ do Exemplo 2.*

Definição 3.2: *Seja μ uma função de conjunto. Diremos que μ é* ***finitamente aditiva*** *se $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, para todo $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$, onde $A, A_i \in \mathcal{A}$. E diremos que μ é* ***σ-aditiva*** *se $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ para todo $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, onde $A, A_i \in \mathcal{A}$.*

Definição 3.3: *Sejam $\mathcal{S}$ um semianel e $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ uma função conjunto. Se $\mu(\varnothing) = 0$ e μ é σ-aditiva, então μ é chamada* ***medida****.*

A definição de medida sobre semiálgebra, anel, álgebra, σ-anel e σ-álgebra é a mesma.

Definição 3.4: *Uma terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ em que Ω é um conjunto não vazio, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra contida em $\mathcal{P}(\Omega)$ e μ é uma medida sobre $\mathcal{A}$, é chamada um* ***espaço de medida****. O par $(\Omega, \mathcal{A})$ é chamado um* ***espaço mensurável****.*

Definição 3.5: *Um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tal que $\mu(\Omega) = 1$ é denominado* ***espaço de probabilidades****.*

Definição 3.6: *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se para todo $A \in \mathcal{A}$ existe uma sequência $\{A_i\}$ de conjuntos onde $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\mu(A_i) < \infty$, para todo i, então μ é chamada* ***σ-finita****. Se $\mu(A) < \infty$ para todo $A \in \mathcal{A}$, então μ é chamada* ***finita****.*

De maneira análoga podemos definir medida σ-finita sobre um semianel.

Exemplo 3.2: ***(a)*** *Seja A um conjunto não vazio e seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de todos os subconjuntos de A. Seja μ_1 definida em $\mathcal{A}$ por*

$$\mu_1(E) = 0, \quad \text{para todo } E \in \mathcal{A},$$

e seja μ_2 definida por

$$\mu_2(\varnothing) = 0, \quad \mu_2(E) = +\infty \quad \text{se} \quad E \neq \varnothing.$$

Ambas μ_1 e μ_2 são medidas. Note que μ_2 não é finita nem σ-finita.
(b) *Sejam $(A, \mathcal{A})$ como no item anterior e p um elemento fixo de A. Seja μ definida por*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad p \notin E \\ 1, & \text{se} \quad p \in E. \end{cases}$$

Podemos observar que μ é uma medida finita. Esta é chamada ***medida de unidade concentrada em*** *p.*
(c) *Seja $A = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ e seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$. Para $E \in \mathcal{A}$ defina $\mu(E)$ como o número de elementos em E se E é um conjunto finito, e como $+\infty$ se E for infinito. Então μ é uma medida e será chamada de* ***medida de contagem em*** *$\mathbb{N}$. Note que μ não é finita, mas é σ-finita.*
(d) *A função comprimento do Exemplo 3.1 é uma medida sobre a álgebra $\mathbb{F}$. Para mais informações, ver ([2], Lemma 9.3).*

Antes de enunciarmos a próxima proposição precisaremos de algumas definições.

Se $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$ é uma sucessão de conjuntos, chamaremos **limite superior** da sucessão $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$ ao conjunto de todos os pontos ω que pertencem a A_n para infinitos índices n. Tal conjunto será denotado por $\lim_n \sup A_n$. Podemos observar que

$$\lim_n \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i.$$

O conjunto de todos os pontos de Ω que pertencem a todos os A_n, a menos de um número finito de tais A_n, é chamado de **limite inferior** da sucessão $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$, e simbolizado por $\lim_n \inf A_n$. Observemos também que

$$\lim_n \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i.$$

Uma sucessão $\{A_n\}_{n=1,2\ldots}$ é dita **crescente** (respectivamente **decrescente**) se $A_n \subseteq A_{n+1}$, para $n = 1, 2, \ldots$ (respectivamente $A_n \supseteq A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$).

Se para uma sucessão $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$, $\lim_n \inf A_n = \lim_n \sup A_n$, dizemos que tal sucessão tem limite e denotaremos tal conjunto por $\lim_n A_n$. Indicaremos sucessões crescentes (respectivamente decrescentes) de conjuntos com a notação $A_n \uparrow$ (respectivamente $A_n \downarrow$). Escrevemos $A_n \uparrow A$ (respectivamente $A_n \downarrow A$), se $A_n \uparrow$ (respectivamente $A \downarrow$) e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ (respectivamente $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$).

Proposição 3.1: *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. São válidas as seguintes afirmações:*

1) $A \subseteq B$ e $\mu(B) < \infty$ implicam $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$;

2) $A_n \uparrow A$ implica $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$;

3) Se $A_n \downarrow A$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{n_0}) < \infty$ então $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$;

5) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$;

6) Para toda sucessão $\{A_n\}$ de elementos de $\mathcal{A}$ temos $\mu(\liminf A_n) \leqslant \liminf \mu(A_n)$ e se, para algum n_0, $\mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n\right) < \infty$, então $\limsup \mu(A_n) \leqslant \mu(\limsup A_n)$. Em particular se $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é um espaço de probabilidades, então $A_n \to A$ implica $P(A_n) \to P(A)$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ implica $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Demonstração. Ver ([1], Proposição 2.1.1). □

Proposição 3.2: *Seja μ uma medida finitamente aditiva sobre o semianel $\mathbb{S}$. Então existe uma única medida $\overline{\mu}$ finitamente aditiva sobre o anel gerado por $\mathbb{S}$, que é uma extensão de μ.*

Demonstração. Observemos inicialmente que se $\sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{j=1}^{m} B_j$, com C_i e $B_j \in \mathbb{S}$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(C_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

Para todo A no anel gerado por $\mathbb{S}$, com

$$A = \sum_{i=1}^{n} C_i \quad \text{e} \quad C_i \in \mathbb{S},$$

definimos

$$\overline{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_j),$$

o que é possível pela observação acima (isto é, $\overline{\mu}$ está bem definida). Não é difícil mostrar que $\overline{\mu}$ é finitamente aditiva sobre o anel gerado. A unicidade segue da definição. □

Proposição 3.3: *Seja μ uma medida sobre um semianel $\mathbb{S}$. Então:*

i) $A \subseteq B$ *implica* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *para todos* $A, B \in \mathbb{S}$*;*

ii) $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *implica* $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *para todos* A*,* $A_n \in \mathbb{S}$*.*

Demonstração. Ver ([1], Proposição 2.2.2). □

Seja $\mathbb{S}$ um semianel. Considere a classe

$$\mathcal{F} = \left\{ A \subseteq \Omega : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \text{ para alguma sequência } \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{S} \right\}.$$

Não é difícil verificar que $\mathcal{F}$ é um σ-anel, e que se $B \subseteq A$ e $A \in \mathcal{F}$ então $B \in \mathcal{F}$.

Definição 3.7: *Considere o conjunto $\mathcal{F}$ definido acima e μ uma medida sobre $\mathbb{S}$. Para cada $A \in \mathcal{F}$ definimos*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) : \; A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \quad C_n \in \mathbb{S}, \; \forall n \right\}.$$

A função de conjunto $\mu^* : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ assim definida é chamada ***medida exterior induzida*** *por μ sobre $\mathcal{F}$.*

Proposição 3.4: *São válidas as seguintes afirmações:*

1. $A \in \mathbb{S}$ *implica* $\mu(A) = \mu^*(A)$*;*
2. $\mu^*(\varnothing) = 0$ *e* $0 \leq \mu^*(A) \leq \infty$*, para todo* $A \in \mathcal{F}$*;*
3. $A \subseteq B$ *implica* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*, para todos* $A, B \in \mathcal{F}$*;*
4. $\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$*, para toda* $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$*.*

Demonstração. Ver ([1], Proposição 2.2.4). □

Observe que μ^* é uma extensão de μ pelo item (1) da proposição anterior.

Definição 3.8: *Seja $\mathcal{F}$ o conjunto definido acima, μ uma medida sobre $\mathbb{S}$ e μ^* a medida exterior induzida por μ sobre $\mathcal{F}$. Um conjunto $M \in \mathcal{F}$ é dito* ***mensurável*** *se, para todo $A \in \mathcal{F}$,*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c).$$

Denotaremos por Λ o conjunto $\{M \in \mathcal{F} : \; M \text{ é mensurável}\}$.

Definição 3.9: *Uma medida μ sobre um σ-anel $\mathcal{A}$ é dita* ***completa*** *se*

$$B \subseteq A, \quad A \in \mathcal{A} \quad \text{e} \quad \mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad B \in \mathcal{A}.$$

Teorema 3.1 (Teorema de Extensão de Carathéodory)**:** *A família Λ é um σ-anel contendo $\mathbb{S}$ e μ^* restrita a Λ é uma medida completa que estende μ.*

Demonstração. Ver ([1], Proposição 2.2.5, Proposição 2.2.6 e Proposição 2.2.7). □

Teorema 3.2 (Teorema de Extensão de Hahn)**:** *Se μ é σ-finita, então a extensão de μ a $\tilde{\sigma}(\mathbb{S})$ é única.*

Demonstração. Ver ([1], Proposição 2.2.8). □

Proposição 3.5: *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Então, se definirmos*

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, \; N \subseteq M \text{ para algum } M \in \mathcal{A} \text{ tal que } \mu(M) = 0\}$$

e $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ por $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$, teremos que $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ é um espaço de medida completo. Nessas condições diz-se que $\overline{\mathcal{A}}$ é o ***completamento*** *de $\mathcal{A}$ com respeito a μ.*

Demonstração. Ver ([1], Proposição 2.2.9). □

Proposição 3.6: *Seja μ uma medida σ-finita sobre o semianel $\mathbb{S}$. Então, Λ é o completamento de $\tilde{\sigma}(\mathbb{S})$ em relação a μ, ou seja, $\Lambda = \overline{\tilde{\sigma}(\mathbb{S})}$.*

Demonstração. Ver ([1], Proposição 2.2.12). □

Com estes resultados e definições podemos definir a medida de Lebesgue no seguinte exemplo.

Exemplo 3.3: *Considere $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathbb{S} = \{(a, b], (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, +\infty) : \ a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ o semianel apresentado no Exemplo 1 e μ como a função comprimento (medida) do Exemplo 3, a qual é σ-finita. Pelo Teorema de Extensão de Hahn, μ pode ser estendida a uma única medida λ sobre $\tilde{\sigma}(\mathbb{S})$. Obtemos então uma medida completa $\overline{\lambda}$ sobre $\Lambda = \overline{\tilde{\sigma}(\mathbb{S})}$ pelas Proposições 10 e 11. A σ-álgebra $\overline{\sigma(\mathbb{S})}$ é chamada σ-álgebra de Lebesgue de $\mathbb{R}$, os conjuntos de $\overline{\sigma(\mathbb{S})}$ são chamados conjuntos Lebesgue mensuráveis e a medida λ restrita a $\overline{\sigma(\mathbb{S})}$ é chamada* ***medida de Lebesgue****.*

Observe que a medida de Lebesgue μ de um conjunto unitário $\{x\}$, consistindo de um único ponto $x \in \mathbb{R}$, é zero, pois

$$\begin{aligned}\mu(\{x\}) &= \inf\{\mu(A) : x \in A = (a, b], \ a, b \in \mathbb{R}\} \\ &\leq \inf\left\{\mu(A_n) : A_n = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0.\end{aligned}$$

Consequentemente, a medida de Lebesgue de qualquer conjunto enumerável $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ também é zero, pois

$$\mu(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x_n\}) = 0.$$

Em particular, obtemos que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$. No entanto, existem conjuntos não enumeráveis com medida de Lebesgue zero. O exemplo considerado mais interessante é o conjunto de Cantor, que apresentaremos na próxima seção.

Para mais informações sobre a medida de Lebesgue, indicamos as referências [1], [2] e [3].

4 Conjunto de Cantor

Para construirmos o conjunto de Cantor, consideremos o intervalo $I = [0, 1]$ da reta real. No primeiro passo, trisseccionamos o intervalo I nos pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ e, em seguida, removemos seu terço médio aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Denotemos por C_1 o conjunto dos pontos restantes de I, isto é,

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

No segundo passo, trisseccionamos cada um dos dois intervalos fechados de C_1, nos pontos $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$, e removemos os terços médios abertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ desses intervalos fechados. Denotamos então por C_2 o conjunto formado pelos pontos restantes de C_1, isto é,

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Repetindo este processo, no terceiro passo, obtemos o conjunto

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

A Figura 1 representa os três primeiros passos da construção.

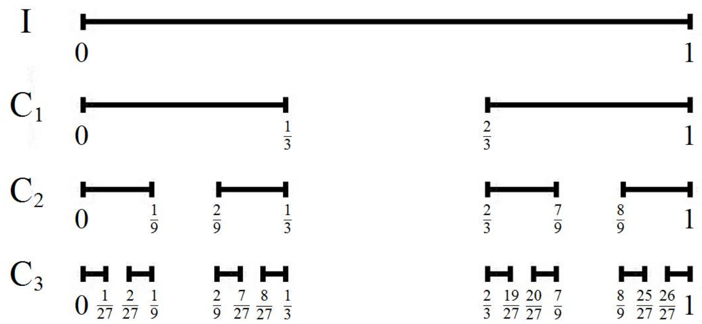

FIGURA 1: Construção do conjunto de Cantor

Prosseguindo desta maneira, obtemos uma sequência de conjuntos

$$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$$

tais que

$$I \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots \supset C_{n-1} \supset C_n \supset \cdots,$$

em que C_n é constituído dos pontos do conjunto C_{n-1} excluídos os terços médios abertos. Observemos que cada C_n consiste em 2^n intervalos fechados e disjuntos dois a dois.

O conjunto de Cantor é o que resta após aplicarmos esse procedimento para todo $n \in \mathbb{N}$. Apresentamos a seguir a definição precisa de tal conjunto.

Definição 4.1: *O **conjunto de Cantor** C é a interseção dos conjuntos C_n, obtidos através da remoção sucessiva dos terços médios abertos do intervalo $I = [0, 1]$, ou seja, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.*

À primeira vista, pode parecer que C é o conjunto vazio, mas isto não acontece pois os pontos $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ e 1 permanecem em todos os conjuntos C_n, estando assim no conjunto de Cantor.

Teorema 4.1: *Os elementos do conjunto de Cantor possuem expansão ternária (base 3) usando os dígitos 0 e 2, isto é,*

$$C = \left\{ x \in [0, 1] : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n} \ \text{ para } \ i_n = 0 \ \text{ ou } \ i_n = 2 \right\}.$$

Antes de demonstrarmos esse teorema, vamos nos familiarizar com a representação de números reais em base ternária. Dado $x \in [0, 1]$, representar x na base 3 significa escrever $x = (0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \ldots)_3$, onde cada um dos dígitos x_n é igual a $0, 1$ ou 2, de tal modo que

$$x = \frac{x_1}{3^1} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \cdots + \frac{x_n}{3^n} + \cdots.$$

Para compreendermos melhor façamos alguns exemplos.

Exemplo 4.1: *O ponto $\frac{1}{3}$ tem expansão ternária igual $(0, 1)_3$. De fato, podemos escrever*

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3^1} + \tfrac{0}{3^2} + \tfrac{0}{3^3} + \cdots,$$

donde deduzimos que $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$.

Exemplo 4.2: *O ponto $\frac{17}{27}$ tem expansão ternária igual a $(0, 122)_3$. De fato, podemos escrever*

$$\tfrac{17}{27} = \tfrac{1}{3^1} + \tfrac{2}{3^2} + \tfrac{2}{3^3} + \tfrac{0}{3^4} + \cdots.$$

Exemplo 4.3: *O ponto $\frac{1}{4}$ tem expansão ternária igual a $(0,0202020202\ldots)_3$. De fato, temos que*

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{0}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \frac{0}{3^9} + \frac{2}{3^{10}} + \cdots.\end{aligned}$$

Agora demonstraremos o Teorema 4.1.

Demonstração do Teorema 4.1. No primeiro passo da construção do conjunto de Cantor, ao retirarmos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, excluímos os valores x do intervalo $[0,1]$ cuja representação ternária, $x = (0, x_1x_2x_3\ldots)_3$, tem $x_1 = 1$, com a única exceção de $\frac{1}{3} = (0,1)_3$ que permanece.

No segundo passo, excluímos os números reais dos intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, ou seja, aqueles da forma $(0,01x_3x_4x_5\ldots)_3$ ou da forma $(0,21x_3x_4x_5\ldots)$, com exceção de $\frac{1}{9} = (0,01)_3$ e $\frac{7}{9} = (0,21)_3$ que permanecem.

No terceiro passo, removemos os intervalos $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ e $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ que contêm os números da seguinte forma:

$$(0,001x_4x_5\ldots)_3, (0,021x_4x_5\ldots)_3, (0,201x_4x_5\ldots)_3 \text{ e } (0,221x_3x_4x_5\ldots)_3,$$

com exceção de $\frac{1}{27} = (0,001)_3$, $\frac{7}{27} = (0,021)_3$, $\frac{19}{27} = (0,201)_3$ e $\frac{25}{27} = (0,221)_3$ que permanecem.

Este processo continua indutivamente. De modo geral, fica garantido que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo $I = [0,1]$ cuja representação ternária $x = (0, x_1x_2x_3\ldots)_3$ só contém os algarismos 0 e 2, com exceção daqueles que possuem um único algarismo igual a 1 como o algarismo significativo final, como $\frac{25}{27} = (0,221)_3$, por exemplo. Mas, se observarmos que $(0,221)_3 = (0,22022222)_3$, poderemos sempre substituir o algarismo final 1 pela sequência $22222\ldots$. Com esta convenção (também usada em outras bases como, por exemplo, na base decimal) podemos afirmar, sem exceções, que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo $I = [0,1]$ cuja representação na base 3 só contém os algarismos 0 e 2. □

Teorema 4.2: *O conjunto de Cantor é não enumerável.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que o conjunto de Cantor seja enumerável. Usando representações ternárias podemos escrever todos seus elementos numa lista da seguinte maneira

$$\begin{gathered}0, a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\ldots \\ 0, a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\ldots \\ \vdots\end{gathered}$$

usando apenas os dígitos 0 e 2. Agora construiremos o seguinte elemento do conjunto de Cantor

$$0, b_1b_2b_3b_4\ldots$$

onde b_j é um algarismo diferente de $a_{j,j}$ e de 1. Obviamente este é um elemento do conjunto de Cantor que não está na lista anterior.

Logo, o conjunto de Cantor é não enumerável. □

Teorema 4.3: *O conjunto de Cantor tem medida de Lebesgue zero.*

Demonstração. Para ver que $\mu(C) = 0$, observe que C é obtido removendo-se do intervalo $I = [0,1]$, um intervalo de comprimento $\frac{1}{3}$, dois intervalos de comprimento $\frac{1}{9}$, quatro intervalos de comprimento $\frac{1}{27}$ e assim por diante. Logo,

$$\mu(C) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 0.$$

□

Concluímos a partir dos resultados demonstrados nesta seção que o conjunto de Cantor é um conjunto não enumerável com medida de Lebesgue zero. Mais informações sobre o conjunto de Cantor podem ser encontradas nas referências [4] e [5].

REFERÊNCIAS

[1] P. J. Fernandez, *Medida e Integração.* IMPA, 2002.

[2] R. G. Bartle, *The elements of integration.* John Wiley & Sons, 1966.

[3] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications.* John Wiley & Sons, 2013.

[4] M. T. Alves, *O Conjunto de Cantor.* Trabalho de Conclusão de Curso. Departamento de Matemática - UFSC, 2008.

[5] E. L. Lima, *Análise real - Volume 1.* IMPA, 2016.