

# CALCULANDO DETALHADAMENTE OS GRUPOS DE HOMOLOGIA SIMPLICIAL DO TORO, DO PLANO PROJETIVO E DA GARRAFA DE KLEIN

**Wendy Díaz Valdés**

Universidade Federal de Uberlândia

[w3ndy0195@gmail.com](mailto:w3ndy0195@gmail.com)

**Ligia Laís Fêmina**

Universidade Federal de Uberlândia

[ligia@ufu.br](mailto:ligia@ufu.br)

## RESUMO

Nesse artigo, apresentamos detalhadamente os cálculos dos grupos de homologia simplicial do toro, do plano projetivo e da garrafa de Klein. O principal objetivo desse trabalho é mostrar para o leitor como é feita a mudança de geradores do núcleo e imagem dos operadores bordos, tais cálculos normalmente são omitidos nos livros de Topologia Algébrica.

## ABSTRACT

In this paper, we present in more detail the calculations of the groups of simplicial homology of the torus, the projective plane and the Klein bottle. The main objective of this work is to show to the reader how change the generators of the núcleo and image of the boundary operators is done, such calculations are usually omitted in Algebraic Topology's books.

**Palavras-chave:** Homologia simplicial. Simplexo. Triangularização. Toro. Plano Projetivo. Garrafa de Klein.

## 1 INTRODUÇÃO

A homologia simplicial surge como uma maneira de estudar os espaços topológicos, cujos componentes estruturais são  $n$ -simplexos. Tal ferramenta é calculada em espaços homeomorfos a um poliedro, tal homeomorfismo se refere a uma triangularização do espaço dado. Muitos espaços topológicos de interesse podem ser triangularizados, em especial o toro, o plano projetivo e a garrafa de Klein.

Normalmente, nos exemplos encontrados na literatura sobre grupos de homologia simplicial são exibidos o núcleo e a imagem dos operadores bordos, sem mencionar as matrizes de mudança de geradores utilizadas para a obtenção do resultado final, que são grupos quocientes desses subgrupos. Tais quocientes definem os grupos de homologia simplicial. Nesse sentido, no presente artigo apresentamos todas as matrizes de mudança de geradores nos cálculos dos grupos de homologia simplicial do toro, do plano projetivo e da garrafa de Klein, auxiliando o leitor não familiarizado com tais cálculos diretos.

## 2 COMPLEXO SIMPLICIAL E HOMOLOGIA SIMPLICIAL

Nesta seção, apresentamos os pré-requisitos de homologia simplicial. Para uma leitura mais aprofundada, consultar [1], [2] e [3].

**Definição 2.1:** Um conjunto  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  de  $k + 1$  pontos em  $\mathbb{R}^n$ , onde os vetores  $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_r - a_0$  são linearmente independentes, é denominado **geometricamente independente**.

**Definição 2.2:** O conjunto de todos os pontos  $x \in \mathbb{R}^n$ , que são gerados pelo conjunto de pontos geometricamente independente  $\{a_0, \dots, a_k\}$ , para os quais existem números reais não negativos  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  tal que  $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i$  e  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ , é chamado de **k-simplexo**, cuja notação é  $\sigma^k$ .

O **0-simplexo** é um conjunto unitário, **1-simplexo** é um segmento de linha fechado, **2-simplexo** é um triângulo (interior e arestas), **3-simplexo** é um tetraedro (interior e arestas). Esses simplexos podem ser visualizados na Figura 1.

Um **0-simplexo aberto** é o conjunto unitário, **1-simplexo aberto** é um segmento de linha com os pontos finais removidos, **2-simplexo aberto** é o interior de um triângulo, **3-simplexo aberto** é o interior de um tetraedro.

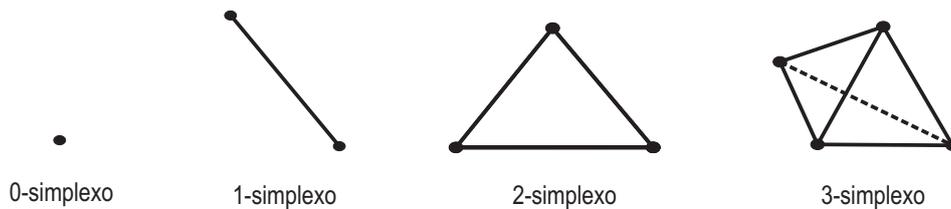


FIGURA 1: Simplexos

**Definição 2.3:** Seja  $k \leq n$ , um simplexo  $\sigma^k$  é uma **face** de um simplexo  $\sigma^n$ , quando cada vértice de  $\sigma^k$  é um vértice de  $\sigma^n$ .

Se  $\sigma^n$  é o simplexo com vértices  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , escrevemos  $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$ .

**Definição 2.4:** Dois simplexos  $\sigma^m$  e  $\sigma^n$  são **propriamente unidos**, se  $\sigma^m \cap \sigma^n$  é vazio ou  $\sigma^m \cap \sigma^n$  é uma face de ambos.

Na Figura 2, estão ilustrados alguns exemplos de simplexos propriamente unidos e simplexos que não satisfazem a definição.

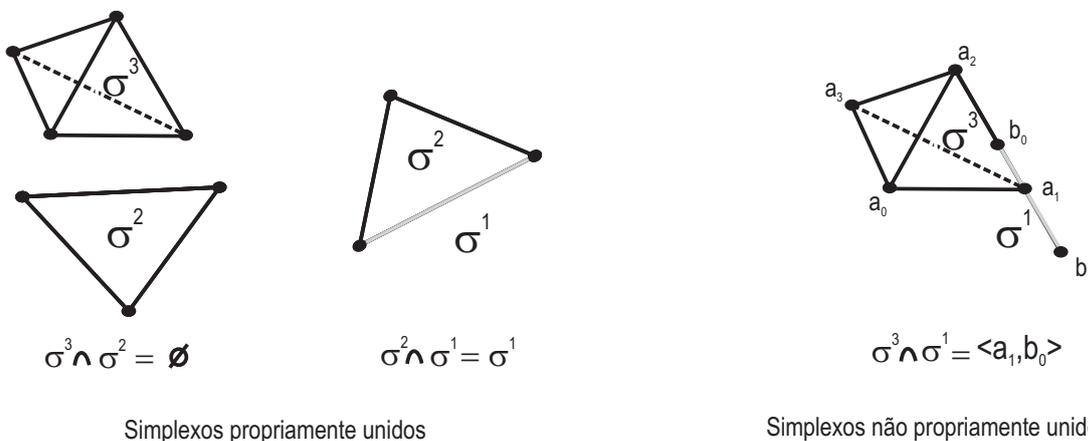


FIGURA 2: Exemplos

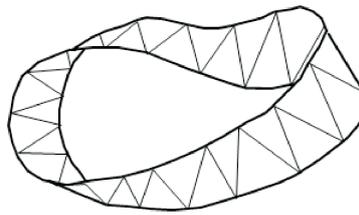
**Definição 2.5:** Um **complexo simplicial** é uma família finita  $K$  de *simplexos geométricos* contidos todos no mesmo  $\mathbb{R}^n$ , os quais são propriamente unidos e tem a propriedade de que cada face de um elemento de  $K$  é também um elemento de  $K$ . A dimensão de  $K$  é o maior índice positivo  $r$  tal que  $K$  tenha um  $r$ -simplexo.

A união de elementos de  $K$  em  $\mathbb{R}^n$  é denotado por  $|K|$  e é chamado de **poliedro** associado a  $K$ .

**Definição 2.6:** A **triangularização** de um espaço topológico  $X$  consiste num complexo simplicial  $K$  e um homeomorfismo  $h : |K| \rightarrow X$ .

Geometricamente, triangularizar uma superfície é cobri-la de formas triangulares, as quais ou tem uma face toda em comum, ou um vértice ou uma aresta. Além disso, a triangularização de uma superfície não é única.

Na Figura 3, temos uma triangularização da faixa de Möbius.

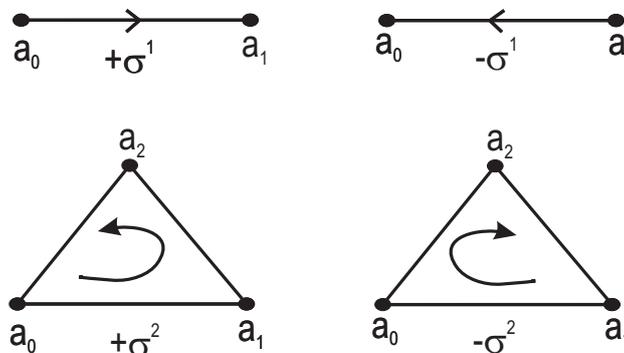


**FIGURA 3:** Triangularização da faixa de Möbius

**Definição 2.7:** Seja  $n \geq 1$ , um  **$n$ -simplexo orientado** é obtido de um  $n$ -simplexo  $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$  através da escolha da ordem para esses vértices. O *simplexo orientado positivamente*  $+\sigma^n$  é determinado pela classe de equivalência de permutações pares para escolha da ordem. Analogamente, a classe de equivalência das permutações ímpares determina o *simplexo orientado negativamente*  $-\sigma^n$ .

Atribuindo uma orientação para cada *simplexo* de um complexo simplicial, obtemos um **complexo simplicial orientado**. Sejam  $a_0, \dots, a_p$  os vértices de um  $p$ -simplexo  $\sigma^p$ , então o símbolo  $+\langle a_0 a_1 \dots a_p \rangle$  denota a classe de permutações pares para indicar a ordem  $a_0, \dots, a_p$  e  $-\langle a_0 a_1 \dots a_p \rangle$  denota a classe de permutações ímpares.

Na Figura 4, temos 1-simplexos e 2-simplexos orientados.



**FIGURA 4:** Simplexos Orientados

**Definição 2.8:** Sejam  $\sigma^{p+1}$  e  $\sigma^p$  *simplexos* de um complexo geométrico orientado  $K$ . A cada par  $(\sigma^{p+1}, \sigma^p)$  é associado um **número de incidência**  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$  definido como:

$$[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = \begin{cases} 0, & \text{se } \sigma^p \text{ não é uma face de } \sigma^{p+1}; \\ \pm 1, & \text{se } \sigma^p \text{ é uma face de } \sigma^{p+1}. \end{cases}$$

Se  $\sigma^p$  é uma face de  $\sigma^{p+1}$ , ordene os vértices  $a_0, \dots, a_p$  de  $\sigma^p$  tal que  $+\sigma^p = +\langle a_0 \dots a_p \rangle$ . Considere  $v$  o vértice de  $\sigma^{p+1}$ , o qual não é vértice de  $\sigma^p$ . Se  $+\sigma^{p+1} = +\langle va_0 \dots a_p \rangle$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$ . Se  $+\sigma^{p+1} = -\langle va_0 \dots a_p \rangle$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$ .

**Definição 2.9:** Seja  $K$  um complexo simplicial orientado. Se  $p$  é um número inteiro positivo, então a  $p$ -dimensional cadeia, ou **p-cadeia**, é uma função  $c_p : K \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que, para cada  $p$ -simplexo  $\sigma^p$ ,  $c_p(-\sigma^p) = -c_p(+\sigma^p)$ .

A família de  $p$ -cadeias forma um grupo  $C_p(K)$  chamado de **grupo p-dimensional cadeia de K**, com a operação adição ponto a ponto induzida pelos inteiros.

Se  $K$  tem  $\alpha_p$   $p$ -simplexos, então  $C_p(K)$  é isomorfo a soma direta de  $\alpha_p$  cópias de  $\mathbb{Z}$ , através da seguinte correspondência

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} g_i \cdot \sigma_i^p \longleftrightarrow (g_1, g_2, \dots, g_{\alpha_p}).$$

**Definição 2.10:** Seja  $p \geq 1$  e  $g \cdot \sigma^p$  é uma  $p$ -cadeia elementar, o **bordo** de  $g \cdot \sigma^p$  é definido por

$$\partial_p(g \cdot \sigma^p) = \sum [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g \cdot \sigma_i^{p-1}, \quad \sigma_i^{p-1} \in K.$$

O operador bordo  $\partial$  é estendido por linearidade para um homomorfismo

$$\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K).$$

Desse modo, se  $c_p = \sum g_i \cdot \sigma_i^p$  é uma  $p$ -cadeia arbitrária, então definimos

$$\partial_p(c_p) = \sum \partial_p(g_i \cdot \sigma_i^p).$$

O bordo de uma 0-cadeia é definido como sendo zero.

**Teorema 2.1** ((1), Teorema 2.1): Se  $K$  é um complexo orientado e  $p \geq 2$ , então a composição  $\partial_{p-1} \circ \partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-2}(K)$  no diagrama  $C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2}(K)$  é um homomorfismo trivial.

**Definição 2.11:** Seja  $K$  um complexo orientado.

Seja  $p \geq 0$ , um **p-ciclo** é uma  $p$ -cadeia  $z_p$  tal que  $\partial(z_p) = 0$ . O núcleo do homomorfismo  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  é um subgrupo de  $C_p(K)$  e é a família de  $p$ -ciclos. Esse subgrupo é denotado por  $Z_p(K)$ , e é chamado de grupo ciclo  $p$ -dimensional de  $K$ .

Como definimos o bordo de uma 0-cadeia como sendo 0, temos 0-ciclo como sendo sinônimo de 0-cadeia, ou seja, o grupo  $Z_0(K)$  de 0-ciclos é o grupo  $C_0(K)$  de 0-cadeias.

Seja  $p \geq 0$ , uma  $p$ -cadeia  $b_p$  é um **p-bordo** em  $K$ , se existe uma  $(p+1)$ -cadeia  $c_{p+1}$  tal que  $\partial(c_{p+1}) = b_p$ . A imagem de  $\partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$  é um subgrupo de  $C_p(K)$  e é a família de  $p$ -bordos. Esse subgrupo é denominado de  $p$ -dimensional grupo-bordo de  $K$  e é denotado por  $B_p(K)$ .

Se  $n$  é a dimensão de  $K$ , então não existe  $p$ -cadeias em  $K$  para  $p > n$ . Nesse caso, temos que  $C_p(K)$  é o grupo trivial  $\{0\}$ . Note que não existe  $(n+1)$ -cadeias em  $K$  tal que  $C_{n+1}(K) = \{0\}$  e portanto  $B_n(K) = \{0\}$ .

**Teorema 2.2** ((1), Teorema 2.2): Se  $K$  é um complexo orientado, então  $B_p(K) \subset Z_p(K)$  para cada inteiro  $p$  tal que  $0 \leq p \leq n$ , onde  $n$  é a dimensão de  $K$ .

**Definição 2.12:** Dados dois  $p$ -ciclos  $w_p$  e  $z_p$  num complexo  $K$ , dizemos que  $w_p$  e  $z_p$  são **homólogos**, ou seja,  $w_p \sim z_p$ , se existe uma  $(p+1)$ -cadeia  $c_{p+1}$  tal que  $\partial(c_{p+1}) = w_p - z_p$ . Em particular, se um  $p$ -ciclo  $t_p$  é bordo de uma  $(p+1)$ -cadeia, dizemos que  $t_p$  é homólogo a zero, isto é,  $t_p \sim 0$ .



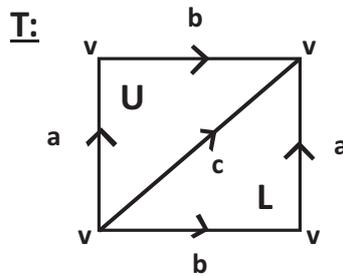


FIGURA 5: Triangularização do toro

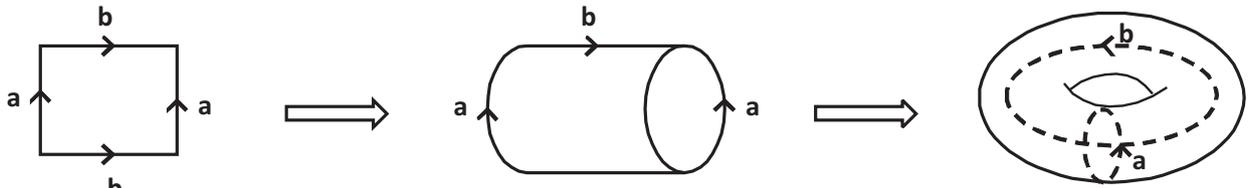


FIGURA 6: Transformação do toro

Primeiramente, como o operador  $\partial_0$  é nulo, segue que  $Z_0(T) = \langle v \rangle$ . Note que  $\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = 0$ . Logo,  $B_0(T) = \{0\}$ . Assim,

$$H_0(T) = \frac{Z_0(T)}{B_0(T)} = \frac{\langle v \rangle}{\{0\}} = \langle v \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Como  $\partial_1$  é o operador nulo, segue que  $Z_1(T) = \langle a, b, c \rangle$ .

Consideremos a mudança de geradores de  $\{a, b, c\}$  para  $\{a, b, a + b - c\}$ , a qual pode ser vista através da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é  $-1$ . Dessa forma,  $Z_1(T) = \langle a, b, a + b - c \rangle$ .

Agora,  $\partial_2(U) = \partial_2(L) = a + b - c$ , ou seja,  $B_1(T) = \langle a + b - c \rangle$ .

Logo,

$$H_1(T) = \frac{Z_1(T)}{B_1(T)} = \frac{\langle a, b, a + b - c \rangle}{\langle a + b - c \rangle} = \langle a, b \rangle \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Como não há  $3 - \text{simplexo}$ , temos que  $B_2(T) = \{0\}$ . Resta calcular o núcleo de  $\partial_2$ :

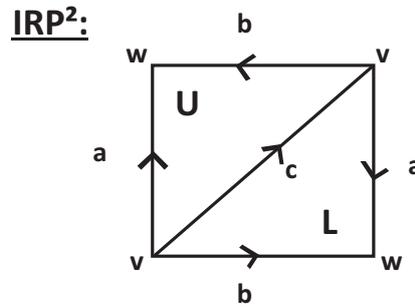
$$\begin{aligned} \partial_2(g_1U + g_2L) = 0 &\iff g_1(a + b - c) + g_2(a + b - c) = 0 \\ &\iff g_1 = -g_2 \\ &\iff g_1U - g_1L \in Z_2(T). \end{aligned}$$

Dessa forma, o  $Z_2(T)$  é um grupo cíclico infinito gerado por  $U - L$ , ou seja,

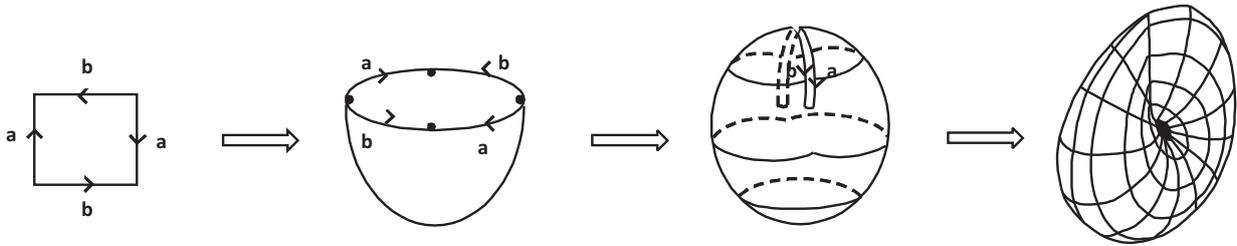
$$H_2(T) = \frac{Z_2(T)}{B_2(T)} = \frac{\langle U - L \rangle}{\{0\}} \approx \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$H_n(T) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{para } n = 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{para } n = 0, 2 \\ 0, & \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$



**FIGURA 7:** Triangularização do plano projetivo



**FIGURA 8:** Transformação do plano projetivo

#### 4 GRUPOS DE HOMOLOGIA SIMPLICIAL DO PLANO PROJETIVO

Considere a triangularização do plano projetivo  $\mathbb{R}P^2$ , constituída de dois 0-simplexos  $v$  e  $w$ , três 1-simplexos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e dois 2-simplexos  $U$  e  $L$ , conforme Figura 7.

Na Figura 8, temos a transformação do retângulo orientado no plano projetivo. Novamente, foi adicionado o segmento  $c$  no retângulo, para satisfazer o conceito de triangulação.

A sequência de cadeia de  $\mathbb{R}P^2$  é dada por:

$$0 \longrightarrow C_2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow C_1(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow 0,$$

a qual é equivalente a

$$0 \longrightarrow \langle U, L \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle a, b, c \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle v, w \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

O operador  $\partial_0$  é nulo, então  $Z_0(\mathbb{R}P^2) = \langle v, w \rangle$ .

Como  $\partial_1(a) = \partial_1(b) = w - v$  e  $\partial_1(c) = 0$ , obtemos  $B_0(\mathbb{R}P^2) = \langle w - v \rangle$ .

Fazendo mudança de geradores  $\{v, w\}$  para  $\{v, w - v\}$ , visualizada na matriz de determinante 1,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtemos

$$H_0(\mathbb{R}P^2) = \frac{Z_0(\mathbb{R}P^2)}{B_0(\mathbb{R}P^2)} = \frac{\langle v, w - v \rangle}{\langle w - v \rangle} = \langle v \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Calculemos  $Z_1(\mathbb{R}P^2)$ :

$$\begin{aligned} \partial_1(g_1a + g_2b + g_3c) = 0 &\iff g_1\partial_1(a) + g_2\partial_1(b) + g_3\partial_1(c) = 0 \\ &\iff (g_1 + g_2) \cdot (w - v) = 0 \\ &\iff g_1 = -g_2 \\ &\iff Z_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a - b, c \rangle. \end{aligned}$$

Considere a mudança de geradores de  $\{a - b, c\}$  para  $\{a - b + c, c\}$ , representada na matriz de determinante 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desse modo,  $Z_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a - b + c, c \rangle$ .

Resta calcular a imagem de  $\partial_2$ .

Fazendo a mudança de geradores  $\{U, L\}$  para  $\{L, -U + L\}$ , exibida na matriz de determinante 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que calculamos o operador bordo  $\partial_2$  em  $C_2(\mathbb{R}P^2) = \langle L, -U + L \rangle$ , ou seja,  $\partial(L) = a - b + c$  e  $\partial(-U + L) = 2c$ . Logo,  $B_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a - b + c, 2c \rangle$ .

Assim,

$$H_1(\mathbb{R}P^2) = \frac{Z_1(\mathbb{R}P^2)}{B_1(\mathbb{R}P^2)} = \frac{\langle a - b + c, c \rangle}{\langle a - b + c, 2c \rangle} = \frac{\langle c \rangle}{\langle 2c \rangle} \approx \mathbb{Z}_2.$$

Como não há 3 - *simplexo*, temos que  $B_2(\mathbb{R}P^2) = \{0\}$ . Resta calcular o núcleo de  $\partial_2$ :

$$\begin{aligned} \partial_2(g_1U + g_2L) = 0 &\iff g_1(a - b - c) + g_2(a - b + c) = 0 \\ &\iff \begin{cases} (a - b)(g_1 + g_2) = 0 \\ c(g_2 - g_1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} g_1 - g_2 = 0 \\ g_2 + g_1 = 0 \end{cases} \\ &\iff g_1 = g_2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $Z_2(\mathbb{R}P^2) = \{0\}$ .

Assim,

$$H_2(\mathbb{R}P^2) = \frac{Z_2(\mathbb{R}P^2)}{B_2(\mathbb{R}P^2)} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{0\}.$$

Então

$$H_n(\mathbb{R}P^2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

## 5 GRUPOS DE HOMOLOGIA SIMPLICIAL DO GARRAFA DE KLEIN

Considere  $K$ , a garrafa de Klein com a triangularização composta por um 0-simplexo  $v$ , três 1-simplexos  $a, b$  e  $c$ , e dois 2 - *simplexos*  $U$  e  $L$ , ilustrado na Figura 9.

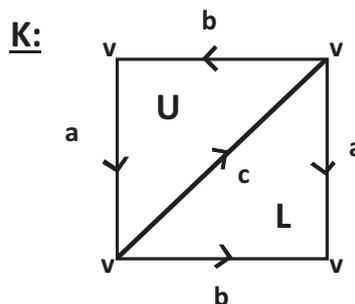
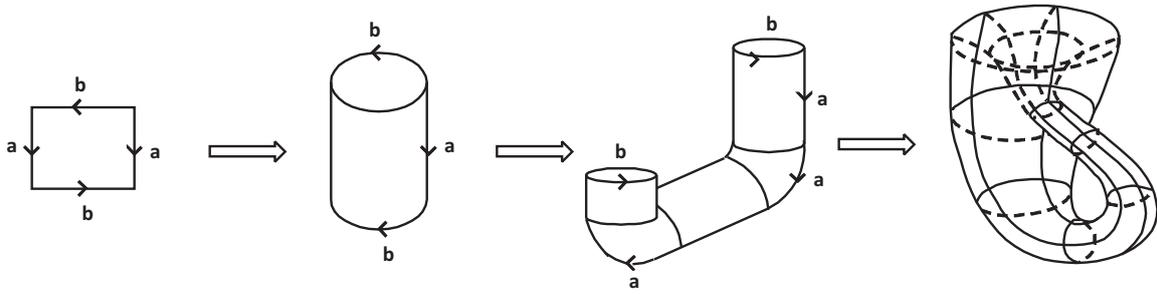


FIGURA 9: Triangularização da garrafa de Klein



**FIGURA 10:** Transformação da garrafa de Klein

Na Figura 10, vemos a transformação do retângulo orientando na garrafa de Klein. A sequência de cadeia de  $K$  fica da seguinte forma:

$$0 \longrightarrow C_2(K) \longrightarrow C_1(K) \longrightarrow C_0(K) \longrightarrow 0,$$

equivalente a

$$0 \longrightarrow \langle U, L \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle a, b, c \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle v \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Temos que  $Z_0(K) = \langle v \rangle$ , uma vez que  $\partial_0$  é o operador nulo. Como a imagem do operador bordo  $\partial_1$  é nula, temos

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{\langle v \rangle}{\{0\}} = \langle v \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Claramente,  $Z_1(K) = \langle a, b, c \rangle$ .

Considere a mudança de geradores  $\{a, b, c\}$  para  $\{a + b + c, b, c\}$ , que pode ser visualizada na matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é 1.

Dessa forma,  $Z_1(K) = \langle a + b + c, b, c \rangle$ .

Resta calcularmos a imagem do operador bordo  $\partial_2$ . Observe que calculamos  $\partial_2$  nos geradores de  $C_2(K) = \langle U, L \rangle$ .

Fazendo a mudança de geradores  $\{U, L\}$  para  $\{U, U - L\}$ , representada na matriz de determinante  $-1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, calculamos o operador bordo em  $C_2(K) = \langle U, U - L \rangle$ , ou seja,  $\partial(U) = a + b + c$  e  $\partial(U - L) = 2b$ .

Assim,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{\langle a + b + c, b, c \rangle}{\langle a + b + c, 2b \rangle} = \frac{\langle b, c \rangle}{\langle 2b \rangle} = \langle c \rangle \oplus \frac{\langle b \rangle}{2\langle b \rangle} \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Finalmente, como o operador bordo  $\partial_3$  é nulo, resta calcularmos o núcleo do operador bordo  $\partial_2$ :

$$\begin{aligned}
\partial_2(g_1U + g_2L) = 0 &\iff g_1(a + b - c) + g_2(a - b + c) = 0 \\
&\iff \begin{cases} (b - c)(g_1 - g_2) = 0 \\ a(g_2 + g_1) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} g_1 - g_2 = 0 \\ g_2 + g_1 = 0 \end{cases} \\
&\iff g_1 = g_2 = 0 \\
&\iff Z_2(K) = \{0\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$H_2(K) = \frac{Z_2(K)}{B_2(K)} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{0\}.$$

Portanto,

$$H_n(K) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

## 6 CONCLUSÃO

Nesse artigo, utilizamos um enfoque mais algébrico, visando o entendimento dos cálculos envolvidos para a determinação dos grupos de homologia simplicial do toro, do plano projetivo e da garrafa de Klein. Entretanto, esse assunto é bem vasto e possui também uma interpretação geométrica, isto é, os grupos de homologia de um complexo é descrito como um arranjo dos simplexes de tal modo que nos dirá os buracos associados ao poliedro e o número de componentes conexas do mesmo. Para um estudo mais aprofundado, [2] é uma excelente referência sobre o assunto.

## REFERÊNCIAS

- [1] F. H. Croom, *Basic Concepts of Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1978.
- [2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [3] E. L. Lima, *Homologia Básica*. IMPA, 2009.