PROGRESSÕES ARITMÉTICAS EM SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{Z}$: SEGUNDO SISTEMAS DINÂMICOS

Carlos Alison de Souza Azevedo
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia Baiano
carlos.azevedo@ifbaiano.edu.br

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar a demonstração do teorema de Van der Waerden via Sistemas Dinâmicos, apresentando a existência de Progressões Aritméticas em Subconjuntos quaisquer de $\mathbb{Z}$, bem como, discorrer sobre alguns problemas matemáticos históricos que levaram a necessidade desse referido teorema.

ABSTRACT

This paper aims to present the demonstration of Van der Waerden's theorem via Dynamical Systems, presenting the existence of Arithmetic Progressions in any subsets of $\mathbb{Z}$, as well as discuss some historical mathematical problems that led to the necessity of this theorem.

Palavras-chave: Progressão Aritmética, Sistemas Dinâmicos, Teorema de Van der Waerden..

1 INTRODUÇÃO

Da definição de Progressão Aritmética (P.A.), verificamos que ela está diretamente relacionada a características aditivas. Por outro lado, também notamos que o conceito de Progressão Aritmética está ligado ao conceito de conjunto, afinal ela dá origem a conjuntos numéricos com características particulares. Cientes desta correlação (Progressão Aritméticas $\times$ Conjunto), a seguinte pergunta merece um pouco de atenção:

Dado um subconjunto qualquer de $\mathbb{Z}$, é possível obter Progressões Aritméticas de comprimento[1] *maior ou igual a 3 formada somente por elementos desse subconjunto?*

Vários matemáticos analisaram esta questão, e algumas respostas foram obtidas; dentre as quais, destacamos a que se refere ao conjunto dos números primos, embora a definição de (P.A.) remeta a características de multiplicação (Green e Tao mostraram a existência de Progressões Aritméticas de comprimento maior ou igual a 3, formada apenas por números primos).

Esta pergunta impulsionou o desenvolvimento do estudo de Progressões Aritméticas (P.A.s) em subconjuntos dos Números Inteiros, pelos Teoremas de Van der Waerden e o Teorema de Szemerédi, além do Teorema de Ben Green e Terence Tao, que adaptou essas ideias para o conjunto dos números Primos.

Apesar do avanço no estudo das Progressões Aritméticas e dos números primos, ainda existem problemas clássicos os envolvendo, tais como:

1. A conjectura dos primos gêmeos: Fixe p um número primo. Primos gêmeos são os pares de números primos da forma p e $p+2$. Por exemplo, os números 3 e 5, 5 e 7, 11 e

[1] Número de elementos da P.A.

13, 17 e 19, 29 e 31 são todos pares de primos gêmeos. Um famoso prolema da teoria dos números é a conjectura dos primos gêmeos:

Existem infinitos primos gêmeos?

O matemático norueguês Viggo Brun mostrou que se existirem infinitos primos gêmeos, eles se tornam muito escassos quando analisamos pares de primos p e $p+2$ cada vez maiores, o que torna a conjectura mais difícil.

2. A conjectura de Goldbach: a Conjectura de Goldbach propõe que: *"Todo inteiro par, $n \geq 2$ pode ser escrito como soma de dois primos"*. Tal conjectura também é conhecida como a Conjectura de Goldbach "forte". Neste período, Goldbach assumia que 1 era primo, o que não é mais usado.

Embora seu enunciado seja de fácil entendimento, essa conjectura ainda continua sendo um dos grandes desafios da teoria dos números. Apesar de serem apresentados diversos resultados à seu respeito, nenhuma prova parece se estender a uma demonstração da conjectura.

Apresentaremos neste texto, informações a respeito das Progressões Aritméticas em subconjuntos de $\mathbb{Z}$. Para tal, recorreremos a contribuições dos Sistemas Dinâmicos na demonstração do Teorema de Van der Waerden, na tentativa de instigar estudantes ao interesse por este estudo, visto que esta é uma abordagem diferenciada daquela vista nos cursos de graduação em Matemática tradicionais.

2 DESCOBRINDO P.A.S

2.1 O TEOREMA DE VAN DER WAERDEN

Buscando por respostas a respeito de Progressões Aritméticas em subconjuntos de $\mathbb{Z}$, Bartel Leerndert Van der Waerden (1903-1996), recorreu à sua experiência em Combinatória, obtendo o conhecido **Teorema de Van der Waerden** (Teorema 2.1. Neste texto, demonstraremos o Teorema de Van der Waerden utilizando os conceitos de Sistemas Dinâmicos, desenvolvida por Furstenberg em 1977.

Van der Waerden foi responsável em impulsionar o desenvolvimento da Álgebra Moderna do século XX e em seus trabalhos há uma grande influência na base dos estudos de Álgebra, desenvolvidos por Emmy Noether (1882-1935) e Emil Artin (1898-1962).

Este Teorema, demonstrado no início do século XX, é um dos mais impressionantes resultados na Teoria dos Números e seu conceito fundamental menciona colorações[2] quaisquer do conjunto dos números inteiros. Segundo o teorema é possível (sempre) obter uma Progressão Aritmética monocromática[3] de comprimento arbitrariamente grande. O Teorema 2.1 basicamente, responde o Teorema Finito de Ramsey, ver [1]: *independente de como seja feita a coloração de algum objeto combinatório, um subconjunto monocromático ordenado sempre existirá.* Em outras palavras, não é possível obter completa desordem, e que diretamente conecta-se com a Conjectura 2.1, creditado à Baudet e Schur em [2].

Conjectura 2.1: *(Baudet-Schur). Para qualquer partição dos números naturais em dois conjuntos, um dos conjuntos vai ter progressões aritméticas arbitrariamente longas.*

Van der Waerden provou esta conjectura, no entanto, de forma mais geral, já que $\mathbb{Z}$ pode ser divididos de infinitas formas, ao invés de duas. O teorema de Van der Waerden teve grande relevância para a evolução de muitas áreas da Matemática, a exemplo:

[2]Repartir conjunto $\mathbb{Z}$ em subconjuntos utilizando cores (colorindo os elementos de um subconjunto $A \subset \mathbb{Z}$ com a mesma cor).

[3]Composta somente de uma cor.

Combinatória Extremal, Sistemas Dinâmicos e a Teoria Ergódica. Foi de extrema importância para muitos avanços nos estudos de Progressões Aritméticas em subconjuntos dos números inteiros.

Teorema 2.1: ***(Van der Waerden)*** *Se $\mathbb{Z} = C_1 \bigcup C_2 \bigcup \ldots \cup C_l$ é uma partição finita ($c : \mathbb{Z} \to [l]$ uma coloração dos inteiros), onde $[l] = \{1, 2, \ldots, l\}$, então, para algum $j \in [l]$, C_j contém uma progressão aritmética finita de tamanho arbitrário. Ou seja, toda coloração finita de $\mathbb{Z}$ contém uma P.A. de tamanho arbitrário finito monocromática.*

O enunciado do teorema é simples, no entanto, é preciso uma compreensão e estudo mais a fundo para sua demonstração, o que exige conhecimentos não triviais, tais como conceitos de Topologia e alguns princípios de Teoria da Medida, mas que apresentarão significantes informações, já que este teorema normalmente não faz parte dos currículos dos cursos de graduação em Matemática.

2.1.1 DEMONSTRAÇÃO UTILIZANDO A TEORIA DE SISTEMAS DINÂMICOS

Vamos considerar uma partição do conjunto dos números inteiros a qualquer família finita de conjuntos $C_1, \cdots, C_k \subset \mathbb{Z}$ disjuntos dois-a-dois e cuja união é todo o $\mathbb{Z}$.

Uma Progressão Aritmética (finita) é uma sequência da forma

$$m + n, m + 2n, \cdots, m + kn, \text{ com } m \in \mathbb{Z} \text{ e } n, k \geqslant 1.$$

O número k é chamado comprimento da progressão.

Apesar da existência da resolução deste problema, via Combinatória, Furstenberg percebeu que o mesmo pode também ser deduzido a partir de conceitos de Sistemas Dinâmicos. A ideia central é utilizar as propriedades de deslocamento à esquerda

$$T : \Omega \to \Omega,$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

no espaço $\Omega = \{1, 2, \ldots, l\}^{\mathbb{Z}}$ das sequências bilaterais com valores no conjunto $\{1, 2, \cdots, l\}$.

Observe que toda partição $\{C_1, \cdots, C_l\}$ de $\mathbb{Z}$, em l subconjuntos, determina um elemento $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\ldots, x_{-j}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots)$ de Ω, definido por $x_n = i \Leftrightarrow n \in C_i$. Reciprocamente, todo $x \in \Omega$ define uma partição de $\mathbb{Z}$ em subconjuntos

$$C_i = \{n \in \mathbb{Z} : x_n = i\}, i = 1, \cdots, l.$$

Nosso objetivo é mostrar que para todo $x \in \Omega$ e todo $k \geqslant 1$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \geqslant 1$, tais que

$$x_{m+n} = \cdots = x_{m+kn}.$$

Pelo que foi observado, isto significa que para toda partição $\{C_1, \cdots, C_l\}$ e todo $k \geqslant 1$ existe $i \in \{1, \ldots, l\}$, tal que C_i contém alguma Progressão Aritmética de comprimento k. Note que a família dos C_i é finita, e devido a isto, podemos concluir que algum C_j contém Progressões Aritméticas de comprimento arbitrariamente grande. Vale observar que uma Progressão Aritmética de comprimento k contém também Progressões Aritméticas de comprimentos menores que k. Assim, é claro que C_j contém Progressões Aritméticas de vários comprimentos, como é afirmado no Teorema 2.1.

Denotaremos um conjunto Λ com l cores, onde $l \in \mathbb{N}$ cores, como um conjunto de cardinalidade l, ou seja, $\Lambda = \{1, 2, \ldots, l\}$ munido da topologia discreta[4]. Como Λ é compacto[5], segue, pelo teorema de Tychonoff[6], que $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}}$, munido da topologia produto, é um compacto.

[4]Um espaço topológico diz-se discreto se todos os conjuntos são abertos.

[5]Qualquer fechado e limitado de um espaço euclididano é compacto. É o caso de Λ.

[6]O produto de compactos é um compacto.

Um ponto $x \in \Omega$ pode ser escrito como uma função

$$\begin{aligned} x : \mathbb{Z} &\to \Omega \\ i &\mapsto x_i. \end{aligned}$$

Para cada "posição" $j \in \mathbb{Z}$, tem-se a aplicação projeção $\pi_j : \Lambda^{\mathbb{Z}} \to \Lambda$, onde $\pi_j(x) = x_j$. A topologia produto torna todas essas aplicações contínuas, além disso ela é menor topologia que satisfaz tal propriedade.

Lema 2.1: *Seja $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}}$. Se $x, y \in \Omega$, com $x \neq y$ definimos*

$$d(x,y) = \frac{1}{1 + min\{|k| : x_k \neq y_k\}}.$$

Se $x = y$, então $d(x,x) = 0$. A aplicação d assim definida, é uma métrica que induz a topologia produto em Ω.

Demonstração

Mostraremos agora que d, definida no Lema 2.1, é uma métrica, e para isso devemos mostrar que:

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Isso está bem definido no Teorema 2.1.
- $d(x,y) = d(y,x)$. Isto é trivial, pois o k é o mesmo valor em ambos os casos.
- $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

  Vamos supor que α é o menor número tal que $x_\alpha \neq y_\alpha$, assim temos

  $$d(x,y) = \frac{1}{1+\alpha} > 0.$$

  Sem perda de generalidade, vamos supor que β é o menor número tal que $y_\beta \neq z_\beta$, assim temos

  $$d(y,z) = \frac{1}{1+\beta} > 0.$$

1. Se $\beta < \alpha$ temos que $d(x,z) = d(z,y)$ e isso ocorre pelo fato de que valores menores que α, x e y possuem a mesma coloração. Assim temos que

   $$d(x,z) = d(z,y) = \frac{1}{1+\beta} > \frac{1}{1+\alpha}.$$

   Portanto,

   $$d(x,y) < d(x,z) + d(z,y).$$

2. Se $\beta > \alpha$ neste caso temos que $d(z,y) = d(x,y)$ e isso ocorre pelo fato de que em α, z e x possuem a mesma coloração e, portanto, diferente de y. Assim temos que:

   $$d(z,y) = d(x,y) = \frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\beta}.$$

   Portanto,

   $$d(x,y) < d(z,y) + d(x,y).$$

3 Se $\beta = \alpha$, temos que $d(x, y) = d(x, z)$ e como $d(z, y) > 0$, temos que

$$d(x, y) < d(x, z) + d(z, y).$$

3 O caso da igualdade, só ocorrera quando $x = y = z$, $x = z$ ou $z = y$.

Mostremos agora, que d induz a topologia produto em Ω. Seja ρ_i a métrica zero-um em Λ_i, ou seja, $\rho_i(x, x) = 0$ e $\rho_i(x, y) = 1$, se $x \neq y$.
Com efeito, supõe-se $T : M \to \Omega$ contínua. Dada uma projeção $\pi_i : \Omega \to \Lambda_i$ qualquer, tem-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} d(x, y) < \delta \qquad & \Rightarrow d(T(x), T(y)) < \frac{1}{2|i|} \\ & \Rightarrow \frac{1}{1 + min\{|k| : T(x)_k \neq T(y)_k\}} < \frac{1}{2|i|} \Rightarrow \\ & \Rightarrow 1 + min\{|k| : T(x)_k \neq f(y)_k\} > 2|i| \Rightarrow \\ & \Rightarrow min\{|k| : T(x)_k \neq T(y)_k\} > 2|i| - 1. \end{aligned}$$

Como $|i| \geq 1 \Rightarrow 2|i| \geq 1 + |i| \Rightarrow 2|i| - 1 > |i|$, então

$$min\{|k| : T(x)_k \neq T(y)_k\} > |i|.$$

Como $k, i \in \mathbb{Z}$, então k não será mínimo, e dessa forma, $\rho_i(T(x)_i, T(y)_i) = 0 < \varepsilon$.
Portanto, "d" induz continuidade de T, logo $T \circ \pi_i$ é contínua, o que caracteriza uma Topologia Produto.
Reciprocamente, se $(\pi \circ T)$ é contínua para todo $i \in \mathbb{Z}$, segue que, dado $\varepsilon = \dfrac{1}{n_0} > 0$, existem $\delta_0, \delta_1, \delta_{-1}, \ldots, \delta_{n_0}, \delta_{-n_0} > 0$ tais que

$$\begin{gathered} d(x, y) < \delta_0 \Rightarrow \pi_0(T(x)) = \pi_0(T(y)); \\ d(x, y) < \delta_1 \Rightarrow \pi_1(T(x)) = \pi_1(T(y)); \\ d(x, y) < \delta_{-1} \Rightarrow \pi_{-1}(T(x)) = \pi_{-1}(T(y)); \\ \vdots \\ d(x, y) < \delta_{n_0} \Rightarrow \pi_{n_0}(T(x)) = \pi_{n_0}(T(y)); \\ d(x, y) < \delta_{-n_0} \Rightarrow \pi_{-n_0}(T(x)) = \pi_{-n_0}(T(y)); \end{gathered}$$

Logo $d(x, y) < min\{\delta_{-n_0}, \delta_{n_0}, \delta_{-n_0+1}, \delta_{n_0-1}, \ldots, \delta_0\}$ implica

$$d(T(x); T(y)) < \frac{1}{1 + |n_0|} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon.$$

Isso completa a prova da recíproca.

Note que, com a métrica definida no lema 2.1, $d(x, y) \leqslant 1$, $\forall x, y \in \Omega$.
De fato,
Se $k \to \pm\infty$;

$$\lim_{k \to \pm\infty} d(x, y) = \lim_{k \to \pm\infty} \frac{1}{1 + min\{|k| : x_k \neq y_k\}} = 0.$$

Se $k \to 0$;

$$\lim_{k \to 0} d(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{1}{1 + min\{|k| : x_k \neq y_k\}} = 1.$$

Definição 2.1: *Seja $T : \Omega \to \Omega$, $Tx_k = y_k$, onde $y_k = x_{k+1}$. A aplicação T é chamada de função-deslocamento no alfabeto Λ, ou "shift" no conjunto Λ. Chamamos o sistema dinâmico $(\Omega; T)$ de deslocamento (de dois lados) em k símbolos.*

A aplicação T é um homeomorfismo. De fato, dado $i \in \mathbb{Z}$, tem-se que $\pi_i \circ T = \pi_{i+1}$ é, evidentemente, contínua. Portanto, fica provado que T é contínua. Analogamente, dado $i \in \mathbb{Z}$, temos que $\pi_i \circ T^{-1} = \pi_{i-1}$ é contínua. Portanto, T é homeomorfismo.

Para provar o teorema de Van der Waerden, o primeiro passo é fazer uma "tradução" desses problemas de coloração para o contexto de Sistemas Dinâmicos. O Lema 2.2 é responsável por essa tradução, e o principal resultado utilizado nesta demonstração é o Teorema 2.2.

Teorema 2.2: ***(Recorrência Múltipla Topológica - Furstenberg e Weiss)****. Seja $T : X \to X$ contínua e X um espaço métrico compacto. Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^{in}(x), x) < \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Mais ainda, dado $Z \subset X$ denso, podemos escolher $x \in Z$.*

A demonstração do Teorema 2.2 pode ser encontrada em [3].

Lema 2.2: ***(Furstenberg)*** *Dado um sistema dinâmico $(X; T)$ qualquer, onde X é um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ uma transformação contínua. Para todo $x \in X$, todo $\varepsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\{T^m x, T^{m+n} x, \ldots, T^{m+nk} x\}$$

tem diâmetro menor que ε.

Demonstração

Considere um sistema dinâmico $(X; T)$ qualquer. Dados $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, seja $Y = \overline{\mathbb{Z}.x}$.
Por Y ser o fecho de um T-invariante, segue que Y é invariante.
Define-se $T_i := T^i$. Logo, $\{T_1, \ldots, T_k\}$ é uma família de homeomorfismos comutativos agindo em Y . Logo, pelo Teorema 2.2, segue que existem $y \in Y$ e $n_j \to \infty$ tais que

$$T_1^{n_j} y \to y, \ldots, T_k^{n_j} y \to y.$$

Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_1^n y \to y, \ldots, T_k^n y \to y \in B\left(y; \frac{\varepsilon}{8}\right)$.
Pela continuidade uniforme de $T_1^n, T_2^n, \ldots, T_k^n$, segue que existe $\delta > 0$, tal que

$$d(a,b) < \delta \Rightarrow min\{d(T_1^n a, T_1^n b), \ldots, d(T_k^n a, T_k^n b)\} < \frac{\varepsilon}{8}, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Como $y \in Y = \overline{\mathbb{Z}.x}$, segue que existe $m \in \mathbb{Z}$, tal que $d(T^m x, y) < min\{\delta, \frac{\varepsilon}{8}\}$. Logo

$$d(T^m x, y), d(T_1^n y, T_1^n(T^m x)), \ldots, d(T_k^n y; T_k^n(T^m x)) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Mas isso quer dizer que

$$d(y, T^m x), d(T^n y, T^{m+n} x), d(T^{2n} y, T^{m+2n} x), \ldots, d(T^{kn} y, T^{m+kn} x) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Tem-se que, para qualquer $q \in \{0, 1, \ldots, k\}$, vale, pela Desigualdade Triangular,

$$d(y, T^{m+nq}x) \leqslant d(T^{m+nq}x, T^{nq}y) + d(T^{nq}y, y) < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Portanto, $T^m x, \ldots, T^{m+nk}x \in B\left[y, \frac{\varepsilon}{4}\right]$. Ou seja, o diâmetro do conjunto

$$\{T^m x, \ldots, T^{m+nk}x\}$$

é menor que ε.

Segue, abaixo, a demonstração do teorema de **Van de Waerden**.

Demonstração

Dado o conjunto (de cores) $\Lambda = \{1, 2, \ldots, l\}$, munido da topologia discreta e uma coloração

$$\mathbb{Z} = C_1 \cup \ldots \cup C_l$$

de l cores, define-se o sistema dinâmico $(\Omega; T)$ de deslocamento de Bernoulli (shift), onde $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}} = \{1, \ldots, l\}^{\mathbb{Z}}$. Mune-se Ω da métrica d definida no Lema 2.1. Note que essa métrica tem a propriedade de

$$d(x, y) < 1 \Leftrightarrow x_0 = y_0.$$

Toma-se o ponto $x \in \Omega$ tal que $x_t = j$, se $t \in C_j$. Pelo Lema 2.2, dado um tamanho $k \in \mathbb{N}$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $\{T^m x, T^{m+n}x, \ldots, T^{m+nk}x\}$ tem diâmetro menor que 1. Pela métrica, segue que

$$(T^m x)_0 = \ldots = (T^{m+nk}x)_0,$$

onde $(T^m x)_0 = x_m$, $(T^{m+n}x)_0 = x_{m+n}$, ..., $(T^{m+nk}x)_0 = x_{m+nk}$.
Ou seja, $x_m = \ldots = x_{m+nk}$. Isso quer dizer que

$$\{m, \ldots, m + nk\} \subset C_j,$$

onde $j := x_m \in \{1, \ldots, l\}$.

E isto prova o Teorema de Van der Waerden.

3 CONCLUSÕES

O foco principal nesse trabalho foi apresentar aplicações dos conceitos de Sistemas Dinâmicos. Abordamos, portanto, conceitos de Progressões Aritméticas.

De fato, foi possível constatar que a existência de Progressões Aritméticas em subconjuntos de $\mathbb{Z}$ constitui um tema muito interessante para investigações futuras e podemos considerá-las como uma fonte muito rica em informações que faz conexões com muitas áreas da Matemática.

Do ponto de vista teórico-metodológico, foi possível efetuar um breve estudo do comportamento de pontos de um conjunto segundo a ação de uma transformação T, abordando as definições e as propriedades a ela inerentes. Mesmo considerando apenas a parte introdutória dos conteúdos, mostramos a rica estrutura aritmética pertencentes a estas Teorias.

Eventualmente, o desenvolvimento na íntegra de Sistemas Dinâmicos é algo que requer um tratamento muito mais aprofundado do que foi dado neste trabalho, inclusive um estudo mais amplo da Teoria da Medida e de Existência de Medidas Invariantes.

REFERÊNCIAS

[1] W. R. de Souza Neto, “O teorema de Paris-Harrington,” Dissertação de mestrado, PUC-Rio, Departamento de Matematica, 2007. orientador: Nicolau C. Saldanha.

[2] T. Peixe e J. Buescu, “Recorrências, progressões aritméticas e teoria ergódica: teoremas de Van der Waerden e de Green-Tao,” *Matemática Universitária*, vol. 48/49, pp. 39–51, 2010.

[3] F. Lucatelli, “Dinâmica topológica e aplicações à teoria dos números.”.